

颜色方程类比下的空间向量基本定理教学探索

李 凡, 鲁海波

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年5月18日; 录用日期: 2026年6月22日; 发布日期: 2026年6月30日

摘 要

空间向量基本定理是高中立体几何的教学难点, 传统的纯数学推导教学过于抽象, 学生理解困难。本文基于跨学科融合思想, 引入格拉斯曼光混合定律与颜色方程通过类比推理, 将直观的颜色混合与抽象的向量概念关联, 帮助学生从直观感知过渡到抽象理解深刻理解定理本质。同时设计了从实验到类比迁移最终进行数学建模的教学设计这贴合高中课堂的实操方案, 体现了数学与科学的内在关联, 培养学生核心素养与跨学科思维, 为一线教学提供新思路。

关键词

空间向量基本定理, 颜色方程, 类比推理, 教学设计, 跨学科融合

Teaching Exploration of the Fundamental Theorem of Spatial Vectors Based on the Analogy of Color Equations

Fan Li, Haibo Lu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 18, 2026; accepted: June 22, 2026; published: June 30, 2026

Abstract

The Fundamental Theorem of Space Vectors is a difficult point in teaching solid geometry in high schools. The traditional pure mathematical derivation teaching is too abstract and difficult for students to understand. Based on the idea of interdisciplinary integration, this article introduces Grassmann's light mixing law and color equation through analogy reasoning, associates intuitive color mixing with abstract vector concepts, and helps students transition from intuitive perception to abstract understanding to deeply understand the essence of the theorem. At the same time, we designed

a teaching design that transfers from experiments to analogies and finally to mathematical modeling. This practical plan is suitable for high school classrooms. It reflects the inherent connection between mathematics and science, cultivates students' core literacy and interdisciplinary thinking, and provides new ideas for front-line teaching.

Keywords

Fundamental Theorem of Space Vectors, Color Equation, Reasoning by Analogy, Instructional Design, Interdisciplinary Integration

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

空间向量基本定理是连接几何直观与代数运算的关键, 但该定理抽象性强、基底选择灵活, 传统纯数学推导教学侧重逻辑证明与公式记忆, 忽略直观性与应用性, 导致学生出现“听懂不会用”“概念模糊”的痛点, 难以契合新课标“强化直观教学、促进跨学科融合”的要求[1]。当前, 国外研究强调借助物理模型、几何直观降低向量抽象性, 注重从具体情境到形式化定义的过渡强调以真实问题为载体、以学生探究为中心、以教师协作为支撑[2]; 国内研究则以平面向量类比[3]、多媒体演示、问题导向教学为主[4], 部分成果探索了跨学科视角在立体几何教学中的应用。但已有研究仍存在明显不足: 一是类比对象多局限于平面向量或简单实物, 缺乏与物理定律、科学模型的深度融合, 类比的科学性与严谨性不足; 二是对类比教学的优势、边界与局限性探讨不足, 易使学生将直观类比等同于数学证明; 三是跨学科融合多停留在现象引用, 未形成“实验-类比-抽象-证明”的完整教学链条, 对学生从直观感知走向逻辑推理的引导不够具体。

基于以上研究缺口, 本文以格拉斯曼光混合定律与颜色方程为科学载体, 开展空间向量基本定理的类比教学研究, 既弥补当前类比教学科学性不足的问题, 又明确类比的适用边界与数学证明的核心地位, 构建规范可操作的跨学科教学流程, 丰富空间向量与高中数学跨学科教学的理论与实践成果, 为一线教学提供可借鉴的实操方案。

2. 理论基石: 格拉斯曼“光混合定律”与颜色方程

2.1. 格拉斯曼“光混合定律”

格拉斯曼的光混合定律[5]是关于颜色如何通过不同光源的组合产生的规律, 基于人眼对颜色的感知方式, 格拉斯曼提出:

(1) 光的加法定律: 根据加法混色原理, 当不同波长的光合成时, 它们的波长或频率并不会互相干扰, 而是简单地叠加到一起, 因此产生的颜色亮度是各个单一光源亮度的总和。简单来说就是当两种或多种不同颜色的光混合时, 混合后的颜色是这些光的加权平均。

(2) 三原色理论: 人眼能感知的颜色大多可以通过三种原色的不同组合来产生。通过适当地调配红、绿、蓝三种颜色(RGB模型), 几乎可以表示所有其他颜色。RGB模型是色彩空间中最常见的三原色组合, 它说明了三原色的基础性作用。

(3) 任意颜色的可分解性: 由光的加法定律得到, 任意颜色的光可以通过一组基本光的线性组合来实

现, 这一原理表明任何一种颜色都可以分解为几个基本颜色光的加权和, 且这种分解方式是唯一的。

这些定律为色彩学提供了科学的基础, 也能为学生从理解颜色合成到向量合成提供启示, 激发学生对空间向量基本定理的兴趣。

2.2. 颜色方程

颜色方程: 基于格拉斯曼的光混合定律, 我们可以用数学模型来描述颜色混合和匹配, 即颜色方程 [6]。其基本形式为 $C \equiv r(R) + g(G) + b(B)$, 其中“ \equiv ”表示视觉等效, C 代表我们想要得到的任意目标颜色, R 、 G 、 B 分别代表红、绿、蓝三种基本颜色它们是构成所有颜色的“基石”, r 、 g 、 b 它们表示了每种原色在混合中占的“份量”。

这个方程形象地说明了任意颜色 C 都可以通过调整三种基本颜色 R 、 G 、 B 的“强度”或“份量” r 、 g 、 b 进行线性组合而得到。这并非物理光谱的简单叠加, 而是描述了人眼视觉系统在特定观察条件下的等效性, 其整个理论基础建立在线性叠加性的假设之上。

3. 教学过程: 从“色彩三原色”到“空间向量基底”

3.1. 导入: 直观实验——感知线性组合的本质

目标: 通过直观的实验让学生在好奇中深刻体会三原色如何构成所有颜色, 为后续类比做好铺垫。

活动设计:

光混合实验: 准备红、绿、蓝三种独立可调光的射灯, 以及一个白色屏幕。

实验步骤:

(1) 教师引导学生认识基石, 在白墙上演示单独的红光、绿光、蓝光。让学生明确实验目的即探究三原色光的混合规律, 记录不同亮度组合下的色光变化。

(2) 教师先做示范展示三原色红光、绿光、蓝光两两混合后的效果以及三束光混合在一起后的效果。

(3) 学生分组操作, 调节红、绿、蓝色灯的亮度观察光屏上的色光变化, 填写实验记录表, 重点记录单一基色、两种基色混合、三种基色混合的不同结果。

(4) 教师巡视指导及时纠正学生常见的操作误区, 如亮度调节过度导致色光失真、未规范记录亮度参数等, 引导学生关注亮度比例与色光呈现的线性关系。

讨论与思考:

(1) 通过这个色彩实验, 你们有什么最深刻的发现?

(2) 这三种基石——红、绿、蓝, 是不是真的能变出所有颜色呢?

(3) 如果把红、绿、蓝看作最基本的元素那么其他颜色和它们有什么关系?

(4) 我们是如何混合这些光的? 仅仅是把它们简单地加起来吗?

教师总结: 红、绿、蓝三原色的光通过不同比例的线性混合, 可得到任意一种色光。在混合这些光时只是改变三原色各自的“份量”或“强度”就可以得到任意一种颜色的光。

设计意图: 通过沉浸式体验, 激发学生对光和色彩的好奇心。学生亲身实践和观察, 将直观感受到三原色的基础性、构成性、独立性以及颜色线性叠加的特性, 为后续类比到向量的线性组合概念打下坚实的认知基础。

3.2. 建立联系: 从色彩配方到向量方程

目标: 引导学生将具体的色彩配方结构自然地迁移到抽象的向量表示中, 初步感受向量的线性表示思想, 实现从跨学科现象到数学概念的转化, 破解定理抽象难懂的痛点。

活动设计:

“刚才我们用红、绿、蓝三种光调配出了各种颜色，就好像我们有一个特殊的色彩配方：目标颜色 $C \equiv r(R) + g(G) + b(B)$ 在这个配方中， C 是什么？ R 、 G 、 B 是什么？ r 、 g 、 b 又是什么？”

教师引导学生回答： C 是目标颜色， R 、 G 、 B 是三原色， r 、 g 、 b 是三原色的份量或比例。

教师强调：红、绿、蓝这三种基石是独立的它们不依赖于彼此，任意一种颜色都可以看作是这三种基本颜色的加权和。

(1) 引入向量概念——从平面到空间：

“我们之前学习平面向量基本定理时知道，平面内任意一个向量都能用两个不共线的向量来线性表示，这就像平面上的色彩配方只需要两种基石。现在我们把目光投向更广阔的三维空间，大家可以猜想一下，空间中的任意一个向量是不是也能像颜色一样用几个基本向量来表示呢？如果可以，那这些基本向量需要满足什么条件才能像三原色一样能独立地、完完整整地构成出空间中所有的向量？”

引导学生思考：不共线不足以撑起整个空间，需要不共面。

(2) 类比迁移——巧用色彩配方

教师引导：“现在如果我们把空间中的任意一个向量 p 类比为刚才调配的目标颜色 C 。那么，我们需要找到哪些基本向量才能像三原色 R 、 G 、 B 一样，可以调配出空间中任意一个向量 p 呢？”

引导学生思考：三个不共面的向量。

“没错！我们把这三个不共面的向量形象地称作空间向量的一组基底，空间中任意三个不共面的向量都可以是空间中的一组基底，我们可以取一组基底向量 a 、 b 、 c 。既然是调配，那也需要像色彩配方中的 r 、 g 、 b 这样的‘份量’来决定每个基底向量的贡献，这些‘份量’在向量世界里就是实数 x 、 y 、 z 。”

(3) 得出空间向量基本定理——水到渠成

“根据我们从色彩配方到空间向量配方的完美类比，类比颜色方程 $C \equiv r(R) + g(G) + b(B)$ 那么空间向量基本定理的表达式会是什么呢？”

学生尝试写出： $p = xa + yb + zc$

正式陈述定理：如果三个向量 a 、 b 、 c 不共面，那么对空间中的任意一个向量 p ，都存在唯一确定的有序实数组 (x, y, z) ，使得 $p = xa + yb + zc$ 。其中 $\{a, b, c\}$ 叫做空间向量的一组基底， a 、 b 、 c 都叫做基向量。

设计意图：通过色彩配方这一具象化模型，将抽象的线性组合和基底概念巧妙地植入学生脑海。类比过程环环相扣，使得从色彩世界到向量世界的过渡自然且富有逻辑，增强了知识的接受度和理解深度。

3.3. 深入理解：基底的唯一性与重要性

目标：理解基底选择的条件是不共面以及理解表示系数的唯一性，掌握如何用基底表示向量。

活动设计:

(1) 不共面条件的强调——为什么不能是“红、绿、黄”？

回顾我们的色彩实验，为什么三原色不能是红、绿、黄？因为黄色可以通过红色和绿色调配出来，如果把红、绿、黄作为基石来调色，它们相互不独立那么调出某种颜色的配方可能就不唯一了，会很混乱！

同理，如果空间基底向量 a 、 b 、 c 共面了，会与三原色一样它们相互不独立，其中一个可以被另外两个线性表示。这样就不能表示所有空间向量，或者表示同一个向量的方式就不唯一了。

总结：三个向量不共面是构成空间基底的关键条件，它保证了基底向量的独立性和表示的唯一性，就像色彩基石的纯粹性一样。

(2) 系数的唯一性——精准的“色彩配方”

思考：想要调出一种特定的颜色，它的三原色配比是唯一的不能随意改变。那么，我们用基底表示一个向量它的系数 (x, y, z) 也是唯一的吗？

反证法：假设其系数是不唯一的，那么会存在两套不同的系数 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 都能表示同一个向量 p 。则会有：

$$x_1a + y_1b + z_1c = x_2a + y_2b + z_2c$$

整理后得到：

$$(x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b + (z_1 - z_2)c = 0$$

由于 a, b, c 是基底向量其相互不共面是相互独立的，所以唯一的可能性就是每个系数都必须为 0。

$$\text{即 } x_1 - x_2 = 0; y_1 - y_2 = 0; z_1 - z_2 = 0$$

我们可以得到 $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ 所以系数是唯一的，这保证了我们色彩配方的精准性！

3.4. 拓展与迁移：生活中的基底思想——万物皆可分解

目标：引导学生将基底思想从数学和色彩领域迁移到其他领域，认识其普适性培养数学应用意识和跨学科思维。

活动设计：

(1) 讨论与思考——你身边的基底是什么？

“我们学会了用色彩基底调配颜色，用向量基底表示空间中的向量。那么，在我们的日常生活中在其他科学领域里，还有没有类似这种基本元素或基底的思想呢？哪些复杂的事物也可以被分解成几个相互独立的基本构成？”

(2) 示例引导——老师的基底清单

物理学中的“力”：当我们推一个物体时，力有方向有大小。任何一个复杂的力，也可以分解成三个互相垂直方向上的力，这三个方向的单位力向量，就是一组力的基底。

化学世界中的“元素”：我们身边万物都是由元素组成的，氢、氧、碳……它们就像化学世界的基底，不同的组合构成了不同的物质。

生物基因中的“DNA”：DNA 也是由 A、T、C、G 四种碱基组成的。这四种碱基就像生命的基底，排列组合决定了我们的性状。

语言文字中的“字母或笔画”：汉语的汉字可以由基本笔画横、竖、撇、捺、点构成而英语的单词由 26 个字母构成这些都是各自语言的基底。

(3) 总结与升华——基底无处不在

基底的思想不仅仅存在于数学课堂中，它渗透在物理、化学、生物、甚至日常生活的方方面面！它告诉我们，很多看似复杂的事物都可以被分解成几个相互独立的基本元素。这种从复杂到简单、从整体到部分、再从部分到整体的思维方式就是数学思维的强大魅力！

设计意图：拓宽学生的视野，让学生意识到基底思想的普适性，培养其抽象概括能力和跨学科思维。通过丰富的实例将数学知识与生活、科学紧密联系，让学生感受数学的实用价值和思想深度。

3.5. 辨析类比边界与数学证明的必要性

目标：让学生明确颜色混合与空间向量类比的优势与局限，厘清类比的适用边界，建立从直观猜想严格数学证明的思维过渡，凸显出数学证明的不可替代性。

活动设计：

(1) 回顾类比路径: 回顾 RGB 三原色光混合实验与颜色方程模型, 其对应空间向量基底、线性组合与系数唯一表示, 梳理从色彩世界到向量世界的类比脉络。

(2) 总结类比优势: 引导学生讨论, 颜色类比依托直观实验与格拉斯曼光混合定律, 兼具直观性与科学性。颜色方程与向量表达式结构高度同构, 能帮助快速理解基底、线性组合与唯一性的核心含义。

(3) 明确类比局限: 教师强调颜色混合中系数 r 、 g 、 b 仅表示光强, 取值是非负的, 空间向量系数 x 、 y 、 z 可取正、负、零, 负数表示向量反向, 无法用颜色混合直接类比。颜色混合是视觉等效, 向量线性组合是严格代数与几何运算, 二者本质不同。

(4) 过渡数学证明: 向学生强调类比仅用于辅助理解、提出猜想, 不能替代数学证明。空间向量基本定理的存在性与唯一性, 需借助共面向量定理、反证法严格推导。数学证明确保结论对全体实数系数成立、在全空间有效, 是直观类比无法实现的。

设计意图: 帮助学生理性看待类比方法, 清晰把握类比边界, 避免将直观经验等同于数学结论, 强化逻辑推理意识, 完成从直观感知到严谨论证的思维升华。

4. 结论与反思

本教学设计通过跨学科知识类比的方式, 成功地构建了一个从具体到抽象、从物理到数学的认知桥梁, 通过光混合实验的直观体验让学生亲身感受到了三原色构成所有颜色的过程, 从而自然过渡到底向量构成所有空间向量的思想。颜色方程中 $C \equiv r(R) + g(G) + b(B)$ 的形式, 与空间向量基本定理 $p = xa + yb + zc$ 的结构高度一致, 使得类比过程水到渠成有效破解了空间向量基本定理的抽象难点。

但结合课堂实践, 仍存在三点不足: 第一, 光混合实验在大班课堂中部分学生难以快速掌握亮度调节技巧导致实验效果不佳, 后续可优化实验可以分组增加小组指导教师等确保每位学生参与其中; 第二, 基底唯一性的说明过程较为简化, 部分基础薄弱学生难以理解唯一性的逻辑本质, 后续教学中可结合具体实例在适配高中生认知水平的基础上进一步推导论证。第三, 整个教学设计中练习设置存在欠缺, 缺乏练习设置难以检验学生在具体情境中对定理的理解程度, 后续课程可以增加分层练习题去检验学生掌握情况。同时, 本节课的跨学科融合仍以“数学教学”为核心, 未过度延伸物理知识, 贴合高中数学教学的核心需求, 可为一线教学提供参考。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2020年修订版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 陈春勇. 中小学跨学科教学的国际镜鉴与中国进路[J]. 教育研究, 2025, 46(12): 91-102.
- [3] 王锋轩, 李红娟. 类比迁移提升素养——以“空间向量基本定理”为例[J]. 中学数学教学参考, 2025(15): 38-40.
- [4] 姚爱亮, 尤为军. 指向数学思维能力提升的课堂教学研究——以“空间向量基本定理”教学为例[J]. 高中数学教与学, 2025(14): 31-34+47.
- [5] Grassmann, H. (1853) Zur Theorie der Farbenmischung. *Annalen der Physik*, **165**, 69-84. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.18531650505>
- [6] 程杰铭, 陈夏洁, 顾凯. 色彩学[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2007.