

关于对角占优矩阵的几点教学注记

曾玉平*, 杨振平

嘉应学院数学学院, 广东 梅州

收稿日期: 2026年6月15日; 录用日期: 2026年7月13日; 发布日期: 2026年7月20日

摘 要

本文针对对角占优矩阵的教学提出了一些注记。首先, 根据对角占优矩阵的可逆性和圆盘定理的证明过程的相似性, 我们提出了相应的教学注记。此外, 讨论了对角占优矩阵Jacobi和Gauss-Seidel迭代法的收敛性分析, 并基于定理的证明过程分析了该两类迭代法的异同性, 从而给出相关教学注记。

关键词

对角占优矩阵, 圆盘定理, Jacobi迭代法, Gauss-Seidel迭代法, 收敛性分析

Several Teaching Notes on Diagonally Dominant Matrices

Yuping Zeng*, Zhenping Yang

School of Mathematics, Jiaying University, Meizhou Guangdong

Received: June 15, 2026; accepted: July 13, 2026; published: July 20, 2026

Abstract

This paper puts forward some notes on the teaching of diagonally dominant matrices. First, employing the similarity of proof process for the invertibility of diagonally dominant matrices and the disk theorem, we provide the corresponding teaching notes. Additionally, the convergence analysis of Jacobi and Gauss-Seidel iterative methods on the diagonally dominant matrices is discussed. Based on the proof process of the theorems, the similarities and differences between these two types iterative methods are also analyzed; thereby the relevant teaching notes are given.

Keywords

Diagonally Dominant Matrices, Disk Theorem, Jacobi Iterative Method,

*通讯作者。

Gauss-Seidel Iterative Method, Convergence Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对角占优矩阵在数学理论上具有优美的性质, 且在数值算法中有非常重要的应用。在数学理论上, 主要用线性代数的工具进行分析, 而在应用上与数值分析中的迭代法密切相关, 下面我们就这些性质展开教学上的理解和讨论。

1.1. 对角占优矩阵的数学理论

我们首先回顾对角占优矩阵的定义[1]:

定义: 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$, 若其满足:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为严格对角占优矩阵。而若其满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

且上式中至少有一不等式严格成立, 则称 A 为弱对角占优矩阵。

1.2. 严格对角占优矩阵的数学性质

定理 1 [1]: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$ 为严格对角占优矩阵, 则 A 可逆。

证明: 反证法, 假设 A 不可逆, 即 $\det(A) = 0$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 从而 $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \neq 0$, 不妨设 $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \neq 0$, 考虑齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的第 k 行, 即有

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = 0 \Leftrightarrow a_{kk} x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j,$$

由三角不等式可得

$$|a_{kk} x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj} x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|,$$

进而成立

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|,$$

上式与 A 为严格对角矩阵矛盾, 定理得证。

教学注记 1: 定理 1 只讨论了严格对角占优矩阵, 对于弱对角占优情形, 相应的结论为: 设 A 为弱对角占优不可约矩阵, 则 A 可逆[2][3]。事实上, 在弱对角占优情形, 之所以需要引入不可约性才能保证矩阵可逆, 这是因为不可约性可以把至少一行的严格对角占优性和其他行的弱对角占优性联系起来, 其相应的证明会亦显得复杂一些, 因此在教学上可先讲严格对角占优矩阵(即定理 1)的证明, 弱对角占优不可约矩阵的可逆性证明可作为选讲内容或课后思考题。

1.3. 圆盘定理

定理 2: [3][4] (Geršgorin 圆盘定理) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$, 则 A 的每一个特征值必属于如下某个圆盘中,

$$G_k = \left\{ z \in C : |z - a_{kk}| \leq r_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

即说明 A 的特征值属于复平面上 n 个圆盘的并集 $G(A) = \bigcup_{k=1}^n G_k$ 。

证明: 设 λ 为 A 的特征值, 对应特征向量为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq 0$, 取 $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \neq 0$,

考虑 $Ax = \lambda x$ 第 k 行, 即

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \lambda x_k \Leftrightarrow (\lambda - a_{kk}) x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j,$$

从而

$$|\lambda - a_{kk}| |x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj} x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|,$$

于是成立

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| = r_k,$$

即证得定理结论。

教学注记 2: 上面两个定理研究的内容初看是不一样的, 定理 1 讨论矩阵的可逆性, 定理 2 讨论矩阵的特征值位于何处。然而仔细观察后我们会发现定理 1 和定理 2 的证明思想非常类似, 这在数学上也是可以解释的, 因为矩阵的可逆性和特征值紧密相连。事实上, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 A 的 n 个特征值, 从而定理 2 可以推出定理 1, 这是因为当 A 为严格对角占优矩阵, 由定理 2 可知 A 的所有特征值都是非零的, 因此 $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$, 从而可得定理 1 中的可逆性。此外, 在教学上, 可通过类比思想让学生深刻体会定理 1 和定理 2 的证明过程。

教学注记 3: 正如教记 2 指出, 圆盘定理是线性代数中非常重要的结论, 其理由是它给出了特征值的大致分布情况。由于矩阵特征值的计算在理论上不容易精确计算(在数学上等价于解 n 次多项式方程, 然而 $n \geq 5$ 并没有一般的求根公式), 因此设计算法求解矩阵特征值是计算数学的主流分支。圆盘定理虽然不能精确计算矩阵特征值, 但是它指出了特征值大概位于何处, 这已经为我们提供了很有效的信息。因此, 在线性代数的教学中应该把该定理列为重点学习内容, 这在教学上也是可行的, 因为其定理证明的技术手段并不复杂。

教学注记 4: 由教记 2 指出, 定理 2 可以推出定理 1, 但是笔者认为定理 1 应和定理 2 放在一起讲授, 首先它们证明过程类似, 利用对比的证明方式进行授课可加深数学证明思想和技术手段的理解。事实上, 在定理 1 的证明过程中, 用到了不可逆矩阵对应的齐次线性方程组有非零解这一结论, 该结论从特征值的观点来看即为不可逆矩阵有零特征值和非零特征向量。定理 2 的证明直接利用特征值估计来证明, 而特征值对应的特征方程有非零特征向量本质上就是不可逆矩阵齐次线性方程组有非零解。综上所述, 定理 1 和定理 2 的证明紧密相连, 相辅相成。

教学注记 5: 定理 2 只是给出了圆盘定理的基本结论, 该结论还可以进一步拓展, 叙述如下: 如果矩阵 A 有 m 个圆盘组成一联通并集 $G_m(A)$, 且该并集与剩下的 $n-m$ 个圆盘是分离的, 则 $G_m(A)$ 内恰好包含 A 的 m 个特征值[1][3]。此外, 圆盘定理对于复矩阵也是成立的。将圆盘定理应用到 A 的转置矩阵 A^T , 进一步可得结论: A 的特征值包含在 $G(A) \cap G(A^T)$ 中。结合此结果, 还可得[3]

$$\rho(A) \leq \min \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

用矩阵范数的观点来看, 该结果即为 $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ 且 $\rho(A) \leq \|A\|_1$, 这是数值分析中的基本理论, 圆盘定理从几何直观上推导了该结论, 可看成是圆盘定理的一个应用, 该观察在数学上是非常优美的。此外, 为了进一步估计 A 的特征值, 可引入可逆阵 J , 构造新矩阵 $J^{-1}AJ$, 根据相似矩阵具有相同的特征值, 从而可把圆盘定理应用于新矩阵 $J^{-1}AJ$, 进而给出 A 的特征值的新估计。在实际应用中, 往往把 J 取为对角元素均为正的对角矩阵来进行处理[3]。

2. 基于对角占优矩阵的迭代法

本节主要研究线性方程组 $Ax=b$, 其中 $A \in R^{n \times n}$ 可逆, $b \in R^n$ 为已知向量, $x \in R^n$ 为所求变量。由数值分析教材可知, 简单迭代法具有如下形式[1]:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

若选取 M 为 A 的对角元素所生成的矩阵, 上述迭代法即为 Jacobi 迭代法; 若 M 选取为 A 的下三角元素(含对角元素)生成的矩阵, 则迭代法为 Gauss-Seidel 迭代法。下面讨论当 A 为对角占优矩阵时, 相应的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的数学性质。

2.1. 基于对角占优矩阵的 Jacobi 迭代法

首先把矩阵 A 分裂成如下三部分:

$$A = D - L - U,$$

其中 D 为 A 的对角元素所生成的矩阵, L 为 A 的严格下三角元素所生成的矩阵(相差 1 负号), U 为 A 的严格上三角元素所生成的矩阵(相差 1 负号)。适当整理后, Jacobi 迭代法具有如下形式:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $B_J = D^{-1}(L+U)$, $f_J = D^{-1}b$, 可证明该格式和式(1)取 $M = D$ 的形式是等价的。

定理 3: 设 A 为严格对角占优矩阵, 则求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛。

证法 1 [5]: 反证法, 假设 B_J 的谱半径 $\rho(B_J) \geq 1$, 则 B_J 存在特征值 $|\lambda| \geq 1$, 考虑

$$\det(\lambda I - B_J) = \det(\lambda I - D^{-1}(L+U)) = \det(D^{-1}) \det(\lambda D - L - U),$$

由于 A 为严格对角占优矩阵, 从而 $\det(D^{-1}) \neq 0$, 由上式知 B_J 的特征值即为 $\det(\lambda D - L - U) = 0$ 的根,

经过计算得

$$\lambda D - L - U = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

由于 $|\lambda| \geq 1$, 且 A 为严格对角占优矩阵, 从而有

$$|\lambda a_{ii}| > |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right) \geq \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

此式说明 $\lambda D - L - U$ 为严格对角占优矩阵, 由定理 1 知 $\det(\lambda D - L - U) \neq 0$, 即说明 $|\lambda| \geq 1$ 不可能是 B_J 的特征值, 定理得证。

证法 2 [6]: 由于 $B_J = D^{-1}(L + U)$, 经过详细计算后得:

$$\|B_J\|_{\infty} = \|D^{-1}(L + U)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1,$$

需指出的是: 最后一个不等式成立是因为 A 为严格对角占优矩阵。因此 B_J 的谱半径 $\rho(B_J) \leq \|B_J\|_{\infty} < 1$, 定理得证。

2.2. 基于对角占优矩阵的 Gauss-Seidel 迭代法

适当整理后, Gauss-Seidel 迭代法具有如下形式:

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + f_G, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $B_G = (D - L)^{-1}U$, $f_G = (D - L)^{-1}b$, 可证明该格式和式(1)中 $M = D - L$ 的形式是等价的。

定理 4 [1]: 设 A 为严格对角占优矩阵, 则求解 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法收敛。

证明: 反证法, 设 B_G 的谱半径 $\rho(B_G) \geq 1$, 则 B_G 存在特征值 $|\lambda| \geq 1$, 考虑

$$\det(\lambda I - B_G) = \det(\lambda I - (D - L)^{-1}U) = \det((D - L)^{-1}) \det(\lambda(D - L) - U),$$

因为 A 为严格对角占优矩阵, 从而 $\det((D - L)^{-1}) \neq 0$, 故 B_G 的特征值即为 $\det(\lambda(D - L) - U)$ 的根, 直接计算得

$$\lambda(D - L) - U = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

由于 $|\lambda| \geq 1$, 且 A 为严格对角占优矩阵, 从而有

$$|\lambda a_{ii}| > |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right) \geq \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

此式说明 $\lambda(D - L) - U$ 为严格对角占优矩阵, 由定理 1 知 $\det(\lambda(D - L) - U) \neq 0$, 即说明 $|\lambda| \geq 1$ 不可能是 B_G 的特征值, 定理得证。

教学注记 6: 从定理 3 和定理 4 可知: 若 A 为严格对角占优矩阵, 则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛, 该结果对于弱对角占优不可约矩阵也成立[5], 这在数学理论上可以说是非常优美的结论, 并且定理 3 的证法 1 和定理 4 的证明如出一辙, 这也体现了数学结论和证明过程的统一性。此外, 为了体现它们之间的差异性, 我们回顾了定理 3 的证法 2, 该证法利用迭代矩阵 B_J 的谱半径 $\rho(B_J)$ 被无穷范数 $\|B_J\|_\infty$ 可控制性, 通过证明 $\|B_J\|_\infty < 1$ 推出 $\rho(B_J) < 1$, 尽管证明过程是间接手段, 但是证明方法是非常巧妙和简洁的。事实上, 证法 2 不但证明了 Jacobi 迭代的收敛性, 还得到更深刻的结论即 $\|B_J\|_\infty < 1$ 。

教学注记 7: 由注记 4 可知: 当 A 为严格对角占优矩阵, 则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法都是收敛的。然而, 当 A 为对称正定矩阵时, 并没有如此完美的结论。相应的结论修改为[4][5]: 设 A 为对称正定矩阵, 则(1) Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件为 $2D - A$ 也是正定矩阵; (2) Gauss-Seidel 迭代法收敛。也就是说, A 为对称正定矩阵可以保证 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性, 而要使得 Jacobi 迭代法收敛还需加上 $2D - A$ 的正定性。这也从数学理论上体现了两类迭代法在对称正定矩阵上的差异性。

教学注记 8: 对于 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性研究在一般情形是比较复杂的, 可构造矩阵使得 Jacobi 迭代收敛但 Gauss-Seidel 迭代发散, 亦可构造矩阵使得 Gauss-Seidel 迭代收敛但 Jacobi 迭代发散。但是对于相容次序矩阵[5], 可系统研究两类迭代法对应迭代矩阵谱半径的联系。此外, Gauss-Seidel 迭代可推广至超松弛迭代法, 该迭代的收敛性研究也可覆盖到对角占优矩阵, 对称正定矩阵和相容次序的矩阵。超松弛迭代法还可通过调整超松弛因子 ω 来优化迭代法的收敛速度, 这在数值分析课程中称为超松弛(SOR)迭代法, 这也是数值计算中的有趣课题。SOR 方法同时由 D. M. Young 和 H. Frankel 给出, 两人的结果均发表于 1950 年[7]。将 SOR 方法应用于规则网格上有限差分的 Poisson 方程, 可理论上分析如何选取 SOR 方法的松弛因子来改进迭代法的收敛速度。而对于一般问题, 如何获得最优松弛因子在理论分析上是比较困难的, 实际计算中可动态进行调节。事实上, 当 SOR 方法中的松弛因子 $\omega = 1$ 时, 即为 Gauss-Seidel 迭代法, 对 SOR 方法与 Jacobi, Gauss-Seidel 迭代法相应的谱半径比较也是非常有趣的课题, 在教学中可作为学生课后探讨的课题。

3. 结语

对角占优矩阵无论在数学理论和迭代法的研究中均有优美的数学思想。本文首先讨论了对角占优矩阵的可逆性, 之后回顾了圆盘定理, 两者的证明过程非常类似, 根据这些相似性我们给出了教学注记 1~5。然后我们讨论了对角占优矩阵对应的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性, 特别地, 对 Jacobi 迭代法给出了两种证明, Jacobi 迭代收敛性的证法 1 和 Gauss-Seidel 迭代收敛性的证明的技术手段是类似的, 两者均采用反证法, 并利用定理 1 获得相应结论。Jacobi 迭代的证法 2 利用矩阵的无穷范数控制谱半径的思路来证, 证法非常巧妙和简洁。通过对比两类迭代法的证明, 我们给出了教学注记 6~8。

基金项目

2023 年度广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目“大数据背景下的数值分析课程的教学研究和实践”(粤教高函[2024]9 号); 2025 年度广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目“面向人工智能时代的数据科学人才培养模式改革与实践”(粤教高函[2026]4 号); 2024 年度嘉应学院校级一流本科课程“数值分析”(嘉院教[2024]9 号)。

参考文献

- [1] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [2] Bagnara, R. (1995) A Unified Proof for the Convergence of Jacobi and Gauss-Seidel Methods. *SIAM Review*, 37, 93-97. <https://doi.org/10.1137/1037008>

- [3] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2012) *Matrix Analysis*. 2nd Edition, Cambridge University Press.
- [4] 许以超. 线性代数与矩阵论[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [5] 高卫国, 魏轲, 柏兆俊. 数值线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2025.
- [6] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (2013) *Matrix Computations*. 4th Edition, The Johns Hopkins University Press.
- [7] Greenbaum, A. and Chartier, T.P. (2012) *Numerical Methods, Design, Analysis and Computer Implementation of Algorithms*, Princeton University Press.