

微积分教学中严格证明与直观理解的平衡

——以两个教学实例为镜

何 臻

北京交通大学数学与统计学院, 北京

收稿日期: 2026年6月8日; 录用日期: 2026年7月9日; 发布日期: 2026年7月16日

摘 要

工科微积分教学中, 许多核心定理常以几何直观代替严格证明, 这虽有助于节省课时, 却可能使学生缺失对数学逻辑根基的理解。本文以闭区间上连续函数的可积性与最值定理、介值定理为教学实例, 首先回顾现行工科教材中这些定理的直观化处理方式及其潜在的逻辑缺口, 并简要介绍了它们的严密证明。在此基础上, 提出一套嵌入正常教学进度的平衡策略: 在不占用额外课时的前提下, 通过关键概念的点拨, 帮助学生从显然成立过渡到理解为何必然成立。该策略旨在实现避开证明, 但不绕过思想的教学理想, 为工科微积分课程中形式严格与直观理解的有机融合提供可操作的参考范式。

关键词

微积分教学, 连续函数, 数学严谨性

Balancing Rigorous Proof and Intuitive Understanding in Calculus Teaching

—Reflected in Two Teaching Examples

Zhen He

School of Mathematics and Statistics, Beijing Jiaotong University, Beijing

Received: June 8, 2026; accepted: July 9, 2026; published: July 16, 2026

Abstract

In engineering calculus instruction, many core theorems are often presented through geometric intuition rather than rigorous proofs. While this approach helps save class time, it may prevent students from grasping the logical foundations of mathematics. Taking the integrability of continuous

functions on a closed interval and the extreme value theorem and the intermediate value theorem as teaching examples, this paper first reviews the intuitive treatments of these theorems in current engineering textbooks and identifies their potential logical gaps, and then presents a concise outline of their rigorous proofs. On this basis, a balanced strategy embedded in the regular teaching schedule is proposed: without occupying extra class time, through key conceptual prompts, students are guided from obviously true to understanding why it must be true. This strategy aims to realize the pedagogical ideal of bypassing the full proof without circumventing the ideas, providing a practical reference for the organic integration of formal rigor and intuitive understanding in engineering calculus courses.

Keywords

Calculus Instruction, Continuous Functions, Mathematical Rigor

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

微积分是数学中的基础分支，以函数为研究对象，核心内容包括极限、微分学、积分学及其应用。微分与积分分别对应变化率计算与累积量求解，两者通过牛顿-莱布尼茨公式形成互逆关系，由此构成一套描述运动与变化的完整的数学语言。从古希腊阿基米德的穷竭法到中国刘徽的割圆术，积分思想的萌芽可追溯至两千余年前；而微积分作为一门系统学科，则于 17 世纪下半叶由牛顿与莱布尼茨各自独立地建立，将此前需要各种特殊技巧分别处理的难题统一为通行的计算方法。然而，牛顿与莱布尼茨的理论在“无穷小量”等基本概念上存在含糊之处，这一逻辑缺陷引发了越来越多的悖论，最终酿成数学史上著名的“第二次数学危机”[1]。此后近两百年间，柯西在 1821~1823 年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》中系统建立了分析学的严密体系，以极限理论重新定义了微积分的基本概念；魏尔斯特拉斯则进一步将分析学建立在实数系的基础上，并以“ $\varepsilon-\delta$ ”语言完成了极限理论的逻辑化表述，最终使数学分析脱离了知觉理解和几何直观[2]。正是这一系列严格化的工作，将微积分从直观的“无穷小分析”提升为逻辑自洽的形式科学。Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces 和 Törner 对微积分教学中“形式主义与直观之间的张力”做了深入分析[3]。

这一历史脉络蕴含着一个深刻的张力：微积分的起源是直观的——变化率、面积、体积这些概念直指人类的空间感知和运动经验；但微积分的成熟却走向了严密——极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义、一致连续性的刻画、实数完备性的建构，使这门学科得以建立在无懈可击的逻辑地基之上。数学作为研究客观世界数量关系和空间形式的科学，不仅在工程技术中发挥着基础性作用，还承载着培养理性思维和科学素养的教育功能。诚如华罗庚先生在 1959 年《人民日报》上发表的《大哉数学之为用》一文中所言，“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁”等方面，无处不有数学的重要贡献。微积分的理论和方法是研究客观世界中连续模型的数学基础，广泛应用于物理学、工程学及信息技术等领域。它是大学数学的核心课程，也是其他数学课程如概率论、复变函数的学习基础，是理工科专业课程的基本工具。在所有的理工科大学中，微积分被列为一门重要的基础理论课程[4]。

然而，工科微积分教学恰恰处于上述历史张力的延长线上。根据教育部《工科类本科数学基础课程

教学基本要求》¹的定位,工科院校开设微积分课程,旨在使学生获得基本的数学概念、理论和运算技能,为学习后继课程奠定必要的数学基础,同时培养学生进行抽象思维和逻辑推理的理性思维能力。这一目标决定了工科教学必须在有限课时内兼顾概念理解与运算熟练,无法像数学分析那样系统展开极限理论、实数完备性以及各类定理的严格证明。于是,一个普遍存在的现象随之出现:许多核心定理在教材中被“直观上显然”的几何解释所取代,或标注“证明从略”,留给学生的只是一串结论。这种做法固然保证了教学效率,却可能导致学生难以建立扎实的逻辑根基,在面对更复杂的工程问题时,往往止步于套用公式而缺乏迁移与创造的能力。正如有学者指出,高等数学作为一门培养学生科学思维能力、塑造学生逻辑素养的课程,对培养高质量人才具有极其重要的作用,但其教学中还存在理念创新不足、方法传统单一等问题,难以充分满足新时代人才培养的需求[4]。尤其值得注意的是,“工科生”与“数学专业学生”之间在知识储备上的差异是客观存在的,但这并不意味着工科学生理应被剥夺触及数学本质的机会。教育部教学指导委员会也明确指出,数学教育在培养高素质科学技术人才中具有其独特的、不可替代的重要作用。因此,如何在工科微积分教学中实现形式严格与直观理解的合理平衡,既不过度陷入分析细节而挤占课时,又不完全绕过关键逻辑环节而流于肤浅,是一个值得深入探讨的教学命题。

本文选取两个具有代表性的教学实例——“闭区间上连续函数的可积性”与“闭区间上连续函数的最值定理与介值定理”——来具体分析这一问题。这两个定理都根植于实数的完备性(即“实数轴没有空隙”这一深层结构),在工科教材中往往以直观说明代替严格论证,但其证明中涉及的“一致连续性”“确界原理”“区间套”等概念恰恰是沟通直观理解与逻辑论证的关键桥梁。笔者将通过分析这两个定理的教材处理现状、回顾其精确证明的核心脉络,继而提出一套在有限课时内兼顾直观与严谨的三段式教学策略,为同类教学情境提供一个可迁移的参考范式。

2. 两个定理在现行工科教材中的处理现状

2.1. 连续函数的可积性

教材通常表述:“若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。”[5]

解释方式:多数教材在定积分概念部分,通过“分割-近似-求和-取极限”的步骤定义黎曼积分,然后给出可积的充分条件,其中连续性是第一条。对于该条件的证明,或直接略去,或注明“证明超出本书范围”,或仅给出直观说明:因为连续函数在区间上变化平缓,当分割足够细时,每个小区间上的振幅很小,因而达布上和与达布下和趋于同一极限。

问题所在:学生接受了“连续 $\Rightarrow$ 可积”这一事实,却不知其背后的关键——闭区间上连续函数的一致连续性。没有一致连续性,仅凭点态连续无法保证当分割变细时所有小区间上的振幅能同时被控制。教材省略这一逻辑缺口,学生就缺少了一次理解“整体控制”与“点态性质”差异的机会。

2.2. 最值定理与介值定理

教材通常表述:

1. **最值定理:**闭区间上的连续函数一定取得最大值和最小值。

2. **介值定理:**闭区间上的连续函数能取到介于端点函数值之间的任何值[5]。

解释方式:配以几何图示(一条不间断的曲线被框在矩形内,必然有最高点和最低点;曲线从下方到上方必定穿过中间水平线),然后直接作为结论使用。证明常常标注“从略”,或利用实数完备性给出简要论证,但多数工科教材不展开确界原理与区间套定理。

¹<https://wap.cnki.net/touch/web/Journal/Article/GKSX200401028.html>

问题所在：学生容易形成一种错觉：这些性质是“连续”一词的自然推论，而不理解它们依赖于实数系中“没有空隙”这一深层事实。当后续学到有理数集上定义的连续函数(如 $f(x)=x^2$ 限制在有理数上，在 $\sqrt{2}$ 附近)不再具有介值性时，他们会感到困惑，根源就在于没有建立起“连续性 + 实数完备性 $\Rightarrow$ 介值性”的逻辑链条。

3. 精确证明的轮廓及其教学价值

如前所述，工科微积分教材对这两个定理通常只作直观解释或直接给出结论而省略证明。然而，这些定理的严格证明恰恰是沟通直观理解与逻辑论证的关键环节。尽管课堂上不宜完整展开分析学的论证，但教师心中必须清楚这些定理的真正证明路径，以便在关键时刻点出要害。以下呈现这两个定理的精确证明梗概，旨在为后续讨论“如何在课堂上呈现”提供参照文本。

3.1. 连续函数的可积性的精确证明梗概

1. 由闭区间上连续函数的一致连续性(康托尔定理)：对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使当 $|x-y| < \delta$ 时 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ 。

2. 取分割 Δ 使所有子区间长度 $< \delta$ ，则每个子区间上振幅 $\omega_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ 。

3. 达布上和与达布下和之差：

$$U(f, \Delta) - L(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

4. 根据达布定理，当分割加细时上积分等于下积分，从而黎曼可积。

关键洞察：证明的核心并非“连续函数在每一点附近变化小”，而是“能找到一个公共的 δ 适用于所有点”——即一致连续性。缺少这一步，只能证明每个小区间上振幅趋于 0，但不能同时控制所有区间。这一细节正是从直观到严格的跨越之处。关于闭区间上连续函数一致连续性及其可积性定理的完整证明，可参见[6][7]。

3.2. 最值定理与介值定理的精确证明梗概

最值定理(利用确界原理)：

1. 由连续函数的有界性(可用有限覆盖定理证明)，值域有上确界 M 。

2. 反设不存在 x_0 使 $f(x_0) = M$ ，则函数 $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续，从而有界，导致矛盾(因为 $M - f(x)$ 可以任意小)。

3. 故最大值可达。最小值同理。

介值定理(利用区间套定理)：

设 $f(a) < 0 < f(b)$ ，定义 $c_1 = \frac{a+b}{2}$ ，若 $f(c_1) = 0$ 得证；否则取函数值异号的一半区间继续二等分，得到闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ ，由区间套定理存在唯一 ξ 属于所有区间，且由连续性和端点函数值异号推出 $f(\xi) = 0$ 。介值定理作为零点定理的推论，通过辅助函数 $g(x) = f(x) - C$ 与零点定理即得。

关键洞察：这两个定理本质上是实数连续性的不同表现形式。确界原理、区间套定理、单调有界定理、柯西收敛准则、有限覆盖定理在实数系中彼此等价。因此，向学生揭示“连续函数在闭区间上的良好性质依赖于实数轴没有空隙”这一观念，比记忆证明细节更重要。

以上三个证明(可积性、最值定理、介值定理)均严格依赖于实数的完备性性质:可积性证明用到一致连续性(其证明依赖于有限覆盖定理),最值定理用到确界原理与致密性定理,介值定理用到区间套定理。这些等价形式共同刻画了实数系“没有空隙”的基本特征。最值定理与介值定理的严格证明细节,也可参考[6][7]。

4. 课堂有限时间下的平衡策略

4.1. 连续函数可积性的处理(融入定积分定义的教学)

在讲定积分定义时,教材通常先通过曲边梯形面积引出“分割-近似-求和-取极限”的步骤,然后给出黎曼可积的定义,最后列出可积的充分条件,其中第一条就是“若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 可积”。常规讲法至此便直接进入计算。我们可以在介绍完可积充分条件后,自然带出如下一段话(约 3 分钟):

“我们刚才说连续函数一定可积,这个结论背后的逻辑其实很有意思。大家看,当分割越来越细时,每个小区间上的内接矩形和外接矩形会越来越接近——但这里有一个隐藏的要求:我们需要保证所有小区间上的波动都能同时被控制。为什么连续函数能做到这一点?因为闭区间上的连续函数有一个更强的性质,叫做一致连续性。通俗地说,就是存在一个公共的‘步长’,使得只要两点距离小于这个步长,函数值的差就能任意小。像 $\sin \frac{1}{x}$ 在靠近 0 的地方,虽然每一点连续,但不存在这样的公共步长——你越靠近 0,曲线震荡越剧烈。正因为闭区间上的连续函数没有这种毛病,我们才能用内外矩形严格夹出唯一的面积。你们现在不需要记住‘一致连续’的证明,但知道这个名字和它解决的问题,以后学数学分析时会豁然开朗。”

这段话完全嵌套在定积分概念的正常教学流程中:在学生已经理解“分割-近似-求和-取极限”之后,趁热打铁点出“为什么连续性能保证极限存在”的深层原因。相比直接跳过证明,只多用了 3 分钟左右,却让学生对可积性条件的认识从“教材说它对”提升到“原来如此”的层次。

4.2. 最值定理与介值定理的处理(融入连续函数性质的教学中)

在讲闭区间上连续函数性质时,教材通常会先画一条连续曲线,直观说明有最大值、有最小值、能穿过中间值。常规讲法到此为止,然后直接让学生记住结论并用于解题。我们可以在几何直观展示之后,用约 5 分钟时间嵌入一段“为什么连续加闭区间这么重要”的引导:

“大家看到曲线在闭区间上一定有最高点和最低点,直觉上很对。但请思考:如果区间是开区间 $(0,1)$,函数 $f(x)=x$ 有没有最大值?没有,因为 1 取不到。所以‘闭’很关键。那为什么闭区间上的连续函数就一定能取到呢?这背后依赖的是**实数的完备性**——简单说,实数轴没有缝隙。为了让你感受这个道理,我们来看一个思想实验:假设你从负数走到正数,连续意味着不能跳着走,那么你必然要经过零点。怎么严格说明?不断取中点,总有一半区间保持两端异号,这样就得到一个越来越小的区间套,它们的端点分别保持负和正。因为实数没有空隙,这个区间会收缩到唯一的点,而这一点处的函数值既不能是负也不能是正,只能是零。这个论证就是**区间套定理**。类似地,确界原理保证了上确界一定能被达到。这些深刻的性质都根植于实数系的结构,以后你们学数学分析时会系统接触。”

这段话可以在教材原有“介值定理的几何解释”之后直接接续,将原本静止的结论讲授转化为一场思维探险。学生虽然不要求掌握区间套的严格书写,但能理解“为什么需要闭区间”“为什么需要连续”以及“实数完备性”这个根本原因。再加上“确界原理导致最值可达”的两句话,整个嵌入过程不超过 5 分钟。

4.3. 整体效果与课时评估

上述两个教学环节合计额外用时约 8 分钟，分布在两个不同的课时中：可积性处理在定积分概念课(约 3 分钟)，最值与介值处理在连续函数性质课(约 5 分钟)。相比于放弃这些内容，增加的时长微不足道；相比完整展开数学分析式的证明，又保持了课堂的紧凑性。学生获得的收益却是显著的：他们第一次接触“一致连续”“确界原理”“区间套”这些名字，知道它们对应着什么样的直观问题；更重要的是，他们开始理解“数学结论不是凭空正确，而是有逻辑根基的”。这种素养的提升，正是工科数学教育超越工具训练的深层价值所在。

5. 结论与展望

工科微积分教学不必也不应复刻数学分析的全套证明体系。但完全放弃逻辑论证，仅满足于直观结论，无异于将数学降格为“猜谜游戏”。理想的平衡在于：用几何直觉和具体例子点燃兴趣，用精心设计的关键过渡揭示逻辑缺环，帮助学生建立概念网络。本文所讨论的两个实例表明，只需在原有教学框架中嵌入少量精心组织的叙述(总计约 8 分钟)，就能让学生触及“一致连续”“确界原理”“区间套”等核心概念，而不打乱正常的教学进度。这种方法既保证了工科学生所需的运算熟练度，又为他们提供了理解数学严谨性的窗口，真正实现了“避开证明，但不绕过思想”的教学理想。

未来的教学改革可以沿着这一思路继续拓展：在更多章节中，采用类似的“直观解释 + 概念点拨”策略，让工科微积分课程在保持实用性的同时，成为培养学生理性思维和数学素养的重要载体。

参考文献

- [1] 克莱因(Kline, M.)著. 古今数学思想(第一册) [M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2014.
- [2] 李文林. 数学史概论[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [3] Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. and Törner, G. (2016) Teaching and Learning of Calculus. Springer.
- [4] 朱玉. 适应新工科的高等数学教学改革: 逻辑、困境、进路[J]. 安徽工业大学学报(社会科学版), 2024, 41(3): 67-69.
- [5] 同济大学数学科学学院. 高等数学(第八版)上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [6] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(第六版)上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [7] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程[M]. 第 3 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012.