

AI赋能项目化学习重构高中数学高效课堂 ——以“二项式展开的几何证明”为例

熊佳欣¹, 钟世萍¹, 喻 扬², 谭艺蓉³, 周端美¹

¹赣南师范大学数学与计算机科学学院, 江西 赣州

²江西省湖口中学, 江西 九江

³茶陵县第一中学, 湖南 株洲

收稿日期: 2026年6月12日; 录用日期: 2026年7月13日; 发布日期: 2026年7月20日

摘 要

本文基于项目化学习理念, 以二项式展开的几何证明为例, 探讨重构数学高效课堂的实施路径。聚焦于 $(a-b)^n$ 展开式的几何探究, 融合AI技术动态演示三维立方体的分割过程与容斥原理应用, 帮助学生直观理解 $(a-b)^3$ 的展开本质, 并引导其将三维空间的分割逻辑推广至 n 维情形, 突破高维符号变化的想象瓶颈。项目化学习的融入有效激发了学生的学习动机, 推动其从被动接受转向主动建构, 促进了深度学习和核心素养的全面发展。

关键词

AI辅助教学, 项目化学习, 二项式定理, 几何教学

Reconstructing Efficient Senior High School Mathematics Classrooms via AI-Enabled Project-Based Learning

—Taking the “Geometric Proof of Binomial Expansion” as an Example

Jiaxin Xiong¹, Shiping Zhong¹, Yang Yu², Yirong Tan³, Duanmei Zhou¹

¹School of Mathematics and Computer Sciences, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi

²Hukou Middle School of Jiangxi Province, Jiujiang Jiangxi

³Chaling No. 1 Middle School, Zhuzhou Hunan

Received: June 12, 2026; accepted: July 13, 2026; published: July 20, 2026

Abstract

This paper explores ways to build efficient math classrooms via project-based learning, using geometric proofs of binomial expansion as an example. Focusing on the geometric inquiry of the expansion of $(a-b)^n$, it integrates AI technology to dynamically demonstrate the segmentation process of three-dimensional cubes and the application of the inclusion-exclusion principle, helping students intuitively understand the essential nature of the expansion of $(a-b)^3$. It guides students to extend 3D segmentation logic to n -dimensional cases, overcoming high-dimensional imagination bottlenecks. Project-based learning integration boosts learning motivation, drives the shift from passive reception to active construction, and advances deep learning and core competency development.

Keywords

AI-Assisted Instruction, Project-Based Learning, Binomial Theorem, Geometry Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在当前高中数学教学中,《普通高中数学课程标准(2017年版2025年修订)》明确将提升学生的数学核心素养作为重要目标[1]。然而,对于如二项式定理这类涉及高维空间想象与抽象代数运算的内容,学生在理解上普遍存在困难。为此,本文以二项式展开的几何证明为例[2],探讨如何将项目化学习与人工智能辅助策略融入高效课堂,帮助学生直观感知空间分割的数学过程,提升数学核心素养。

2. AI 辅助与项目化学习融入高效课堂

2.1. AI 辅助教学融合

在教学中引入AI技术,能打破传统教学的限制,助力构建“S-AI-T”(Student-Artificial Intelligence-Teacher)互动模式[3](如图1)。S-AI-T模式本质上是一种具体化的人机协同教学形态,其核心在于发挥教师智慧与机器智能各自的优势,实现教学决策与实施的合理分工。而人机协同教学模式的构建通常需要考虑教师的专业智慧、机器的智能处理能力、两者之间的协同机制以及学生的认知发展四个基本要素。本研究所采用的S-AI-T模式正是对这一四要素框架的具体化:学生、AI、教师三方对等互动,协同教学具象化为“学生自主探究→AI实时反馈→教师适时介入”的三阶循环[4]。

实践中,AI可将数学公式的纯理论证明转化为几何图形的直观动态演示。在二项式展开的几何证明中,学生可借鉴《九章算术》“析理以辞,解体用图”的思想方法,理解立方体分割的基本思路,进而结合容斥原理把握 $(a-b)^3$ 的展开过程,并借助类比与容斥原理推导 $(a-b)^n$ 的展开式。这一过程可借助Geogebra或Manim软件,制作 $(a-b)^3$ 展开式的动态演示过程。

在课堂探究中各小组可借助DeepSeek工具进行人机对话,验证自己的思路。该方式能够对学生在自主学习过程中产生的问题给予实时反馈与支持,从而有效培养其发现问题与解决问题的能力[5]。

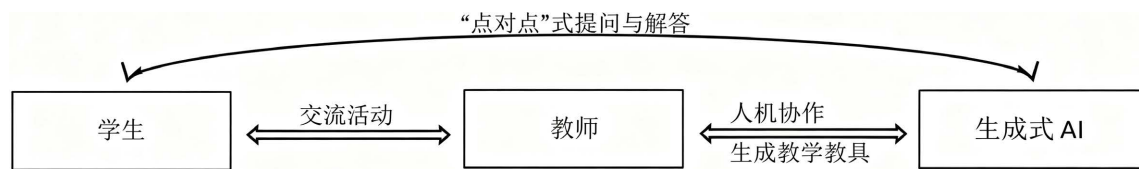


Figure 1. “S-AI-T” interactive mode
图 1. “S-AI-T” 互动模式

2.2. 项目化学习与高效课堂

项目化学习是一种以学生为中心的教学方法，强调通过实践项目来学习和应用知识，从而激发学生主动探究与解决实际问题的能力。高效课堂则指以提高教学效率、优化教学过程为核心，追求教学效果最优化的教学模式[6]。

将项目化学习融入高效课堂，有助于增强学生学习动机，并推动其实现深度学习。项目化学习要求学生围绕真实问题进行深入探究，开展批判性思考与创造性解决，从而超越对知识的表层记忆，达成对概念与原理的深层次理解。在这一过程中，学生不仅掌握知识，更培养了可迁移思维与实践能力。

本文将以二项式展开的几何证明为例，把项目化学习与 AI 辅助策略融入高效课堂，展开教学设计相关论述，旨在帮助学生直观理解空间分割过程，优化教学过程、提高教学效率，并借助生成式 AI 为不同学生提供个性化支持，满足学生的差异化学习需求。

2.3. 几何教学的困境与 PBL + AI 应对策略

传统模式下的高中数学几何教学存在两个突出问题。一是代数与几何脱节：学生面对的展开式，往往只记忆符号而缺乏对系数组合意义的空间感知。二是探究路径固化：学生按教师预设步骤完成推导，缺少自主选择方法、验证结论和呈现成果的机会。

针对上述问题，本研究将项目化学习理念与 AI 辅助工具相融合。通过设置开放性的驱动性问题、赋予学生验证方法与成果形式的自主选择权，并结合动态可视化工具与生成式 AI 的协同支持，构建突破传统几何教学局限的实施路径[7]。

2.4. 智能辅助工具在项目化学习中的协同应用与教学应用策略

需要说明的是，GeoGebra、Manim 等动态可视化工具并非严格意义上的生成式 AI，而是基于程序脚本的数学动画引擎。但在本研究的“S-AI-T”教学模式下，我们将这类能够智能化呈现数学结构的工具纳入广义的 AI 辅助教学工具范畴，以便与生成式 AI 形成对比，讨论其协同应用策略。

2.4.1. 两类工具的分工与协同：动态可视化与生成式对话

Table 1. Comparison of two types of tools
表 1. 两类工具的比较

工具类型	代表软件	核心功能	教学场景	优势	局限
动态可视化	Geogebra Manim	生成几何动画、三维模型、精确图形	空间分割演示、公式几何意义展示	直观，易理解	无法解答学生困惑
生成式对话	Deepeek 豆包	自然语言问答、思路验证、步骤解释、拓展推理	小组探究验证、个性化辅导、高维类比引导	适应个体差异、多轮对话	学生对回答可能产生误解或无法直观理解

动态可视化工具与生成式对话工具在核心功能、教学场景、优势与局限等方面存在显著差异，其比

较结果如表 1 所示。动态可视化工具长于空间结构的直观呈现，生成式对话工具则擅长逻辑验证与个性化引导，二者协同互补，构成完整的认知闭环。

协同方式：二者并非孤立使用，而是形成“几何直觉→逻辑校验→回代验证”的螺旋上升闭环。学生通过可视化工具获得空间直观经验后，带着具体问题与生成式 AI 对话，验证推理步骤；AI 的逻辑澄清反哺可视化观察，帮助学生精准定位空间对应关系；在向高维推广时，依托可视化工具内化形成的思维图式，由 AI 辅助转化为符号推理，再回归低维完成验证，以此实现从具体经验到抽象形式的完整认知建构。

2.4.2. 生成式 AI 教学应用策略与风险规避

在本教学设计的人机对话环节中，学生将借助 DeepSeek 验证从三维到 n 维的类比推理过程。为提升应用实效并防范潜在风险，本研究从“对话前 - 对话中 - 对话后”三个环节构建策略与规避机制。

对话前：分层任务与思维替代风险规避。依据学生认知水平，教师应将 AI 角色分层：针对于基础薄弱者，生成式 AI 作为“解释器”，中等水平者作为“验证器”，学有余力者作为“挑战者”。针对学生可能跳过自主思考、直接复制 AI 答案的“思维替代”风险，设定“先自主思考 3 分钟，再与 AI 对话”的硬性规则，并要求学生在对话前写下自己的初步猜想或困惑，从源头保障思维参与。

对话中：教师引导与信息不准确风险规避生成式 AI 的开放性可能导致信息不准确、逻辑跳跃或概念混淆。为此，教师巡视小组对话，捕捉典型案例组织讨论；学生须对 AI 输出进行多源交叉验证：几何直观验证，借助 Geogebra/Manim 观察三维分割动画，确认单轴、双轴、三轴区域的个数与体积；代数展开验证，独立计算 $(a-b)^3$ ，与 AI 推导内容逐项比对系数与符号；组合数意义验证，检验 AI 给出的系数 C_n^k 是否对应“从 n 个坐标轴中选取 k 个限制为 $\leq b$ ”的组合解释；边界条件验证，代入 $b=0$ 或 $b=a$ 等极端情形，检查公式是否退化为 a^n 或 0。

对话后：复现归纳与过度依赖风险规避。学生须用自身语言复现 AI 帮助下的推导过程，标注 AI 回答中仍需质疑或补充的部分，禁止直接复制 AI 文本作为作业。教师总结“分割→计数→容斥”的普适框架，并鼓励学生将该方法迁移至多项式展开、组合恒等式证明等情境。这一机制确保 AI 始终作为“认知支架”而非“答案提供者”，有效防止学生对生成式 AI 的过度依赖。

这一“对话前 - 对话中 - 对话后”的时间线设计，将人机协同教学中的“感知 - 认知 - 行动”协同路径落实到具体环节：对话前侧重感知学生认知水平与设定规则，对话中侧重交叉验证与质疑引导，对话后侧重复现归纳与迁移拓展，使人机协同从抽象理念转化为可操作的教学行为[8]。

3. AI 辅助教学下的教学设计

3.1. 情景导入——选定项目

基础任务一：理解分割思想和容斥原理。

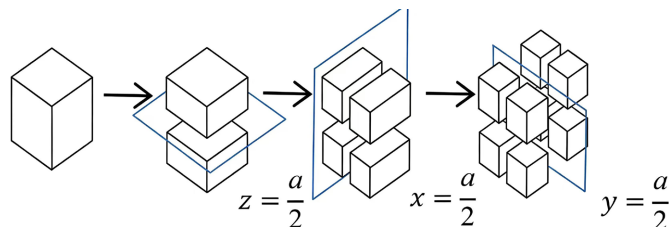


Figure 2. Division of cube
图 2. 立方体的分割

《九章算术》注中曾提及“析理以辞，解体用图”，即通过拆分图形来明晰数理逻辑。在立方体的研究中，分割思想同样是打开空间奥秘的钥匙。

一个边长为 a ($a \neq 0$) 的立方体沿着三个相互垂直的平面进行切割(如图 2)，会得到 8 个等同的小立方体。让学生通过观看 AI 动画直观地感受到了“整体等于部分之和”的数学原理。

容斥原理是指在计数时，将包含于某内容中的所有对象先计算出来，再排除重复计算的，使得计算的结果与原式相等。用集合的语言表述，若有两个有限集合 A 和 B ，那么它们并集的元素个数为：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

当有 n 个有限集合时：

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|,$$

其中“ $||$ ”表示的是集合中元素个数。

设计意图：本环节作为项目化学习的启动阶段，通过创设“立方体分割”这一真实可感的几何问题情境，引导学生明确项目核心任务——探究体积关系背后的代数规律。此举旨在高效课堂的起始环节激发学生的内在动机，为整个项目奠定“问题驱动”的基调。理解分割思想与容斥原理，是为学生后续自主探究提供的必备“工具包”与思维框架，符合高效课堂“目标明确、铺垫充分”的原则。

3.2. 教师引导——学生自主思考与推导

基础任务二：求 $(a-b)^3$ 展开式。

师：通过对立方体分割和容斥原理的学习，请大家思考第一个问题：除了直接展开，还有哪些方法可以求 $(a-b)^3$ 的展开式呢？

生：可以从原有数学模型中构造，利用现有边长为 a 的正方体，构造边长为 $(a-b)$ 的正方体，它的体积就是 $(a-b)^3$ 。

师：该如何通过分割边长为 a 的立方体，得到代表 $(a-b)^3$ 的正方体呢？

生：用 $x=b, y=b, z=b$ ($0 < b < a$) 分割。不属于 $(a-b)^3$ 部分的体积可以分为以下三类：

1) 单轴 $\leq b$ ： $x \leq b, y \leq b, z \leq b$ 各为一个长方体，体积均为 $a \times a \times b = a^2 b$ ，如图 3，共 3 个，体积和为 $3a^2 b$ 。

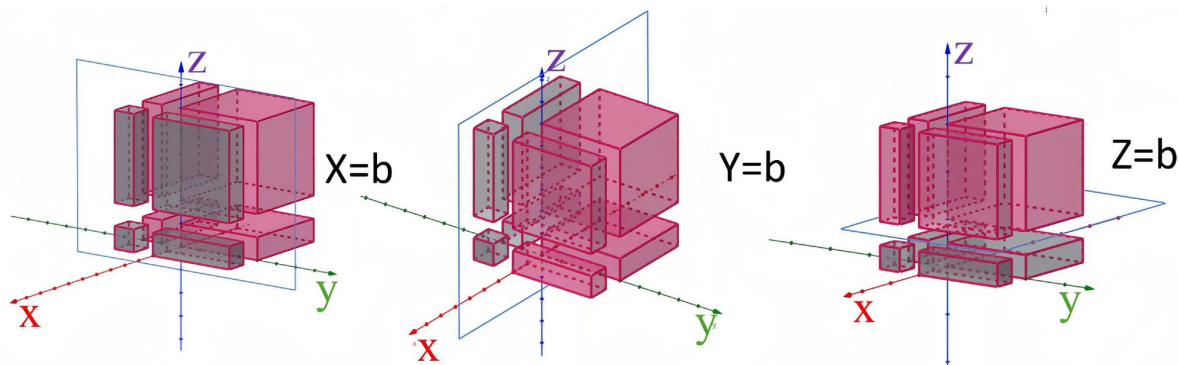


Figure 3. Dynamic display of cube segmentation: single-axis $\leq b$ region

图 3. 立方体分割动态展示之单轴 $\leq b$ 区域

2) 双轴 $\leq b$ ： $x \leq b$ 且 $y \leq b, x \leq b$ 且 $z \leq b, y \leq b$ 且 $z \leq b$ ，各为一个长方体，体积均为 $b \times b \times a = ab^2$ ，如

图 4, 共 3 个, 体积和为 $3ab^2$ 。

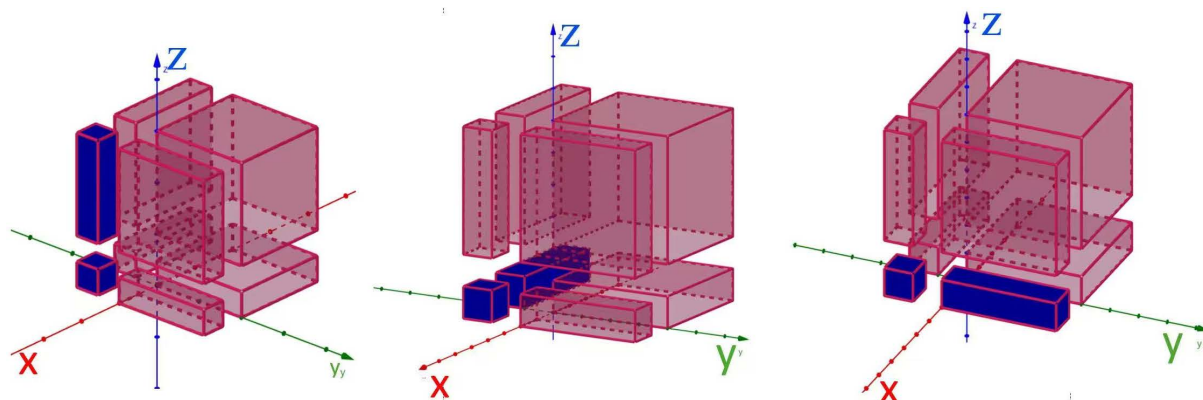


Figure 4. Dynamic display of cube segmentation: both axes $\leq b$ region

图 4. 立方体分割动态展示之双轴 $\leq b$ 区域

3) 三轴 $\leq b$: $x \leq b$ 且 $y \leq b$ 且 $z \leq b$, 为一个小正方体, 体积为 $b \times b \times b = b^3$, 如图 5, 共 1 个。

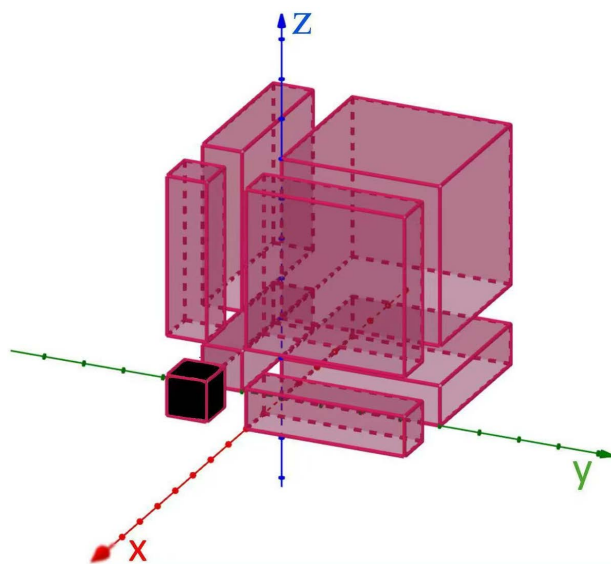


Figure 5. Dynamic display of cube segmentation: three-axis $\leq b$ region

图 5. 立方体分割动态展示之三轴 $\leq b$ 区域

师: 若想得到 $(a-b)^3$ 的体积, 是不是直接用 $a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$ 呢? 减去的体积之间是否有重叠部分?

生: 有重叠部分。

师: 该如何处理重叠部分?

生: 应用容斥原理。先用大正方体体积减去单轴 $\leq b$ 部分(图 3 阴影部分), 得 $a^3 - 3a^2b$ 。可以看出双轴 $\leq b$ 的部分被减去两次(图 4 阴影部分), 三轴 $\leq b$ (图 5 阴影部分)被减去三次。故再加回双轴 $\leq b$ 的部分, 得 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2$ 。因三轴 $\leq b$ 的部分先被减去了三次, 后又加回三次, 故需再减去一次三轴 $\leq b$ 的部分, 最终得:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

师：能总结一下展开式中系数的规律吗？

生：系数绝对值规律：3(单轴项系数)对应组合数 C_3^1 (从 3 个轴中选 1 个 “ $\leq b$ ” 的情况数)；3(双轴项系数)对应 C_3^2 (选 2 个轴 “ $\leq b$ ” 的情况数)；1(三轴项系数)对应 C_3^3 。符号规律：展开式首项为正，从首项开始正负交替。

设计意图：教师通过递进式的问题串，引导学生从三维立方体中自主构建模型、发现规律、并进行逻辑推导的全过程。这深刻体现项目化学习“以学生为中心”和“深度探究”理念。学生在建构知识过程中，不仅掌握了 $(a-b)^3$ 几何证明方法，并且培养了空间想象、逻辑推理等高阶思维能力，实现了高效课堂所追求的从知识传递到素养生成效能提升，完成了从被动接受到主动建构课堂样态转变。

为强化项目的真实性与挑战性，将核心任务进一步转化为开放性的驱动性问题：“如何用最直观的方式(如动画、实物模型)向尚未学习二项式定理的同学解释 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。”学生需以“面向外行讲解”为目标，深入理解几何分割与容斥原理的本质，将抽象数学知识转化为同伴可接受的直观形式，从而提升数学表达与沟通能力。

3.3. 互动合作——审定决策和实施项目

挑战任务三：仿照上述过程，请你推导 $(a-b)^4$ 的展开式。

生：根据基础任务二可得，求 $(a-b)^4$ 展开式应先找到以 $(a-b)$ 为棱长的四维超立方体。用 $x=b, y=b, z=b, t=b(0 < b < a)$ 分割棱长为 a 的四维超立方体。不属于 $(a-b)^4$ 部分的体积，可类比三维，分为以下四类：

单轴 $\leq b$ ：共 C_4^1 个，体积均为 $a \times a \times a \times b = a^3b$ ，体积和为 $4a^3b$ 。双轴 $\leq b$ ：共 C_4^2 个，体积均为 $a \times a \times b \times b = a^2b^2$ ，体积和为 $6a^2b^2$ 。三轴 $\leq b$ ：共 C_4^3 个，体积为 $a \times b \times b \times b = ab^3$ ，体积和为 $4ab^3$ 。四轴 $\leq b$ ：共 1 个，体积为 $b \times b \times b \times b = b^4$ 。

利用容斥原理，计算 $(a-b)^4$ ，如表 2。

Table 2. Derivation process of $(a-b)^4$

表 2. $(a-b)^4$ 推导过程

	算式	单轴	双轴	三轴	四轴
1	$a^4 - 4a^3b$	-1	-2	-3	-4
2	$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2$		-1	0	+2
3	$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3$			-1	-2
4	$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$				-1

注：表格内第 3 至 6 列是对应轴在每个算式中被加次数。

故： $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ 。

设计意图：学生以小组为单位，模仿已有研究范式，合作完成从三维到四维的迁移与推导。这一过程要求学生进行团队内部的思维碰撞、观点协商与方案审定，完美契合项目化学习对“协作解决问题”能力的要求。小组合作模式不仅加速了项目任务的完成，更通过生生互动实现了思维互补和效率倍增，显著优化了高效课堂的“任务实施效率”与“学生参与度”，使学习在合作探究中走向深入。

3.4. 实践应用——人机对话展示交流

拓展任务四：仿照上述过程，请你推导 $(a-b)^n$ 的展开式。

生：以 a 为边长的 n 维超立方体 C ，用 $x_j = b (1 \leq j \leq n)$ 分割该立方体 C ，找出不属于 $(a-b)^n$ 部分的体积，分为 n 类：单轴 $\leq b$ 、双轴 $\leq b$ 、……、 n 轴 $\leq b$ 。

类比于三维、四维的推导过程，用 C 的体积减去单轴 $\leq b$ 区域的体积，得 $a^n - C_n^1 a^{n-1} b$ 。双轴 $\leq b$ 区域被减两次，故加回一次，得 $a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2$ ，三轴 $\leq b$ 区域的体积先被减三次后又被加回三次，故需再减一次，得 $a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3$ 。以此类推，最终按 $(-1)^k$ 的符号规律交替修正，得到目标：

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b^k a^{n-k}.$$

为验证用几何法类推的可行性，在教师的引导下学生通过与AI的对话，整理出以下解题步骤：

1) 定义 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 为“第 i 个坐标轴方向上，坐标 $0 \leq x_i \leq b$ ，其余 $(n-1)$ 个维度 $\leq a$ 的区域”，需算这些区域的并集 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 的体积。

2) 应用如下容斥原理公式：

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|,$$

其中 $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \cdots \cap A_{i_k} (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$ 表示为 k 个维度 $\leq b$ ，其余 $(n-k)$ 个维度 $\leq a$ 的区域，体积为 $a^{n-k} b^k$ 。这样的交集共有 C_n^k 个。故： $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = C_n^1 a^{n-1} b - C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + (-1)^{n+1} C_n^n b^n$ 。

3) 目标体积为全集所代表区域体积减并集所代表区域体积，即：

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b^k a^{n-k},$$

此处的 k 代表的是 k 个维度 $\leq b$ 。

为赋予学生更多探究自主权，本研究允许学生自选探究起点(三维或四维)、自选验证方法(至少两种)以及自选成果形式。探究自主权与多样化成果：在验证环节，学生可自选验证方法——从几何直观验证Manim、代数展开验证、组合数意义验证、边界条件验证、数值抽样验证中任选至少两种，对AI推导结果进行交叉检验。各小组最终成果形式自选：可制作科普视频、设计可拆解的立方体教具、绘制“分割→计数→容斥”思维导图海报，或进行5分钟小组汇报。成果评价依据“直观性、准确性、创造性”三个维度开展小组互评。需要指出的是，AI对话时机的设定仍以“自主先行”为准则：学生须经历不少于3分钟的独立探究阶段方可与AI交互，从而确保思维的真实参与，防止技术依赖所致的思维替代。

设计意图：学生挑战从具体案例到一般规律的抽象概括，这是项目化学习追求“概念性理解”与“成果迁移”的典型体现。引入“人机对话”，利用AI作为个性化的认知工具，支持学生进行自主验证和深度探索，有效应对了学生高阶抽象思维中的个体差异。这不仅是对项目研究成果的巩固与提升，也体现了高效课堂利用技术手段实现“个性化支持”和“拓展性学习”的追求，确保了不同层次的学生都能在项目中获得发展。

3.5. 反馈评价——活动评价

师：回顾本节课的学习过程，请大家思考：几何法证明二项式定理的核心思路是什么？它与传统的代数归纳法相比，在思维方式上有哪些不同？

生：文中几何法依“分割－计数－容斥”逻辑，将抽象代数式转化为具体空间结构，助力直观理解系数组合意义；从三维推广至 n 维时，虽高维空间难想象，但组合计数规律一致，能让人切实体会数学思想在不同维度的普适性。

师：很好。大家是否注意到，在从三维到四维、再到 n 维的推广过程中，我们是如何借助几何直观与组合思想进行类比的？AI工具在哪些环节帮助你们突破了思维瓶颈？

生：在推导 n 维情形时，我们通过类比三维和四维的结构，理解了“ k 轴 $\leq b$ ”区域的体积计算方式。AI工具帮助我们验证了容斥原理在高维情况下的正确性，也提供了动态图像支持，使抽象的逻辑变得可感知。

教师点评与拓展：评价中应充分肯定学生在构建几何模型、进行逻辑推理以及团队协作方面的表现，尤其强调“分割－计数－容斥”这一思维路径的普适价值。同时，可进一步引导学生思考：这种思想方法是否可应用于其他数学内容，如多项式展开、组合恒等式的证明，甚至概率中的包含排斥问题？鼓励学生将本节课所学的思想方法迁移至更广阔的数学领域。

4. 教学启示

本文以“二项式展开的几何证明”为载体，融合项目化学习与AI辅助教学，构建了“三维直观－ n 维抽象”的教学路径。通过立方体分割与容斥原理的逐层推进，学生从具体空间感知过渡到高维逻辑推理，有效突破了符号理解的瓶颈。项目任务的设计不仅激发了学生的探究动机，也促进了合作学习与思维迁移。AI技术的动态演示与个性化反馈，进一步提升了课堂效率与学生的参与度。这一模式表明，以几何直观为起点、以技术为支撑的教学策略，能够有效促进学生对抽象数学概念的深度理解，为高效课堂的构建提供了可借鉴的实践路径。

基金项目

2025 年江西省大学生创新创业训练(S202510418027)；江西省学位与研究生教育教学改革研究项目(JXYJG-2023-169)；2025 年江西省普通本科高校教育教学研究改革课题(BKJG-2026-14-33)；第二届湖南省基础教育教学改革研究项目“高中数学跨学科教学和课程整合策略研究”(Y2024290)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] Marko, F. and Litvinov, S. (2024) A Geometric Proof of the Binomial Identity. *The Mathematical Gazette*, **108**, 430-436. <https://doi.org/10.1017/mag.2024.111>
- [3] 戴荣彬, 于一真, 刘波, 等. 人工智能赋能中学物理教学初探——以“匀变速直线运动的位移与时间的关系”教学为例[J]. 物理教学, 2025, 47(9): 9-12.
- [4] 高琼, 陆吉健, 王晓静, 商家慧, 周跃良. 人工智能时代人机协同课堂教学模式的构建及实践案例[J]. 远程教育杂志, 2021, 39(4): 24-33.
- [5] 徐海锋. “生成式 AI+数智资源”赋能高中数学课堂教学的探索[J]. 教育传播与技术, 2024(6): 62-67+73.
- [6] 谭艺蓉, 钟世萍. 数学思想视域下项目化学习重构数学高效课堂——以新人教 A 版“球的体积和表面积探究”为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2025(6): 16-18.
- [7] 王秋红. 项目化学习在初中数学几何教学中的应用研究[J]. 中学课程辅导, 2026(16): 39-41.
- [8] 马志强, 崔鑫. 交互主体性视角下的人机协同教学模式: 理论框架与实践形态[J]. 电化教育研究, 2026, 47(3): 14-21.

附录 A：生成式 AI 工具使用指南(适用于 3.4 节)

本指南适用于 3.4 节“实践应用——人机对话展示交流”环节。学生在掌握二项式定理的三维(3.2 节)与四维(3.3 节)展开的基础上，尝试推广至 n 维。指南涵盖提问前准备、典型提问示例、交叉验证及常见错误应对等完整操作流程。

1. 独立探究阶段

在与 AI 对话前，学生须完成不少于 3 分钟的自主思考，并形成以下三份书面记录：

- 1) 猜想表述：基于三维与四维的推导结果，写出对 n 维展开式形式的初步猜想。
- 2) 已知步骤梳理：列出三维与四维中已经完成的逻辑链条(分割定义→区域分类→体积计算→容斥层次→符号规律)。
- 3) 困惑界定：用一至两个具体问题指出推广至 n 维时的不确定之处(例如交集体积公式、组合数来源、符号转换等)。

上述记录须在对话前提交给教师或保留在作业中，以保障思维的真实参与。

2. 典型提问示例

以下示例针对 n 维推广中的三个关键认知难点展开。每个示例均采用“自我陈述 + AI 验证”的验证型提问模式，避免“答案索取”型提问。

3. 交集体积公式验证的提问模型

设 n 维超立方体棱长为 a ，用超平面 $x_j = b(1 \leq j \leq n)$ 分割。定义 $A_i(1 \leq i \leq n)$ 为“第 i 个坐标轴方向上，坐标 $0 \leq x_i \leq b$ ，其余 $(n-1)$ 个维度 $\leq a$ 的区域”。对于任意 k 个不同下标 $i_1, i_2, \dots, i_k$ ，交集 $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \dots \cap A_{i_k}(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < n)$ 的体积，我认为应为 $b^k a^{n-k}$ 。理由：有 k 个维度的坐标被限制在 $[0, b]$ 内，每个该维度的长度为 b ；其余 $n-k$ 个维度的坐标限制在 $[0, a]$ 内，每个该维度的长度为 a 。因此该区域的体积等于 $b^k a^{n-k}$ 请判断该推理是否正确。

4. 展开式符号规律的推导验证

已知三维展开式为 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ，容斥原理计算并集体积的公式为：

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^n A_i|,$$

我推导 $(a-b)^n = a^n - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$ ，代入交集体积 $b^k a^{n-k}$ 和组合数 C_n^k 后得到 $(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b^k a^{n-k}$ ，请检查符号从 $(-1)^{k+1}$ 到 $(-1)^k$ 的转换是否严谨，以及是否有遗漏的项。

5. 对话中的追问策略

当 AI 的回答出现以下情况时，学生应主动追问(如附表 A1)。

Table A1. Questioning strategies during AI
表 A1. AI 中的追问策略

AI 回答特征	建议追问方式
直接给出结论而无推导	“请逐步展示从定义到结论的推理过程，不要跳步。”
使用了未定义或超纲术语	“请用本课已定义的概念(如单轴区域、容斥层次)重新解释。”
与三维或四维的已知规律矛盾	“但在三维中我观察到……，你的结论似乎与此不一致，请问矛盾如何解释？”
逻辑跳跃明显	“你从第 X 步直接到了第 Y 步，请补充中间的计算或推理。”

6. 交叉验证要求

对话结束后,学生须从以下方法中选择**至少两种**对 AI 给出的结论进行独立验证,并将验证过程记录在作业中:

1) 几何直观验证:借助 Manim/GeoGebra 动画观察三维分割情况,核对单轴、双轴、三轴区域的个数与体积。

2) 代数展开验证:手动计算 $(a-b)^3$ 或 $(a-b)^4$,与 AI 的 n 维公式取 $n=3$ 或 $n=4$ 时的结果逐项比对。

3) 组合意义验证:检验系数 C_n^k 是否确实对应“从 n 个坐标轴中选取 k 个限制为 $\leq b$ ”的组合计数。

4) 边界条件验证:代入 $b=0$,检验公式是否退化为 a^n ;代入 $b=a$ 检验公式是否等 $0(n \geq 1)$ 。

5) 数值抽样验证:取具体数值(如 $a=3, b=1, n=3$)计算左右两边是否相等。

6) 同伴互查:与另一位同学交换 AI 对话记录,相互审查推理链条的完整性与符号处理的正确性。

7. 注意事项与记录规范

对话前:必须完成独立探究阶段的书面记录,否则不得使用 AI。

对话中:保存完整的对话文本(复制即可),无需截图。

对话后:在作业中附上对话记录,并用不同颜色或符号标注:黑色用于 AI 原始回答,蓝色用于自己认同并验证无误的部分,红色用于自己存疑或经验证认为错误的部分(并注明理由)。

最终结论:须用自己的语言重新组织推导过程,不得直接复制 AI 回答作为作业答案。

异常处理:若 AI 反复给出不合理回答,应终止对话并向教师寻求帮助。