

第一类换元积分法的学习难点、题型归类与教学策略研究

李英姿^{1*}, 孟召静²

¹河北师范大学数学科学学院, 河北 石家庄

²河北师范大学教师教育学院, 河北 石家庄

收稿日期: 2026年6月20日; 录用日期: 2026年7月17日; 发布日期: 2026年7月24日

摘要

第一类换元积分法是积分运算的基础方法。该方法通过引入中间变量, 将复杂积分转化为适配基本积分公式的标准形式, 以此简化积分运算。本文从第一类换元积分法的基本原理入手, 系统梳理其解题步骤, 深入剖析学生学习过程中的难点及其成因, 对典型题型进行分类归纳, 并补充完善基本积分公式表。基于上述研究内容, 本文结合学习难点与题型分类思路, 提出针对性教学策略。研究表明: 清晰的题型划分、针对学习难点的专项教学干预, 能够有效改善课堂教学效果, 帮助学生理解并掌握该方法蕴含的数学思想, 拓展数学思维, 提升解题能力。本文研究成果也可为高等数学课程教学相关研究提供理论依据与实践参考。

关键词

不定积分, 第一类换元积分法, 学习难点, 题型归类, 教学策略

Learning Difficulties, Problem Classification, and Teaching Strategies for the First Integration by Substitution

Yingzi Li^{1*}, Zhaojing Meng²

¹School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei

²School of Teacher Education, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei

Received: June 20, 2026; accepted: July 17, 2026; published: July 24, 2026

*通讯作者。

文章引用: 李英姿, 孟召静. 第一类换元积分法的学习难点、题型归类与教学策略研究[J]. 教育进展, 2026, 16(7): 1446-1457. DOI: 10.12677/ae.2026.1671519

Abstract

The first integration by substitution is a fundamental method in integral calculus. By introducing an intermediate variable, this method transforms complex integrals into forms consistent with basic integral formulas, thereby simplifying the integration process. This paper begins with the fundamental principle of the first integration by substitution, systematically outlines its solution steps, thoroughly analyzes the difficulties encountered by students in learning and their underlying causes, classifies typical problem types, and supplements the list of basic integral formulas accordingly. Based on the above analysis, the paper proposes targeted teaching strategies that integrate the identified learning difficulties with the classification of problem types. The findings indicate that clear classification of problem types and targeted instructional interventions addressing learning difficulties can effectively improve classroom teaching outcomes, help students understand the underlying mathematical ideas of the method, broaden their mathematical thinking, and enhance their problem-solving abilities. The results of this study may also serve as a theoretical foundation and practical reference for research on the teaching of advanced mathematics courses.

Keywords

Indefinite Integral, The First Integration by Substitution, Learning Difficulties, Problem Classification, Teaching Strategies

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《高等数学》是理工科、农医类、经管类等众多大学专业的公共必修课程,在现代科学技术体系中占据重要地位。该课程以初等数学为基础,以“极限”理论为纽带,主要内容依次包括函数与连续、一元函数的微积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数的微积分学和无穷级数等,具有逻辑性强、抽象度高、应用性广等特点[1]。在学习过程中,学生的思维会逐步完成从静态到动态、从有限到无限、从近似到精确的跨越,仅靠简单的复习和机械记忆远远不足以学好这门课程,而解题正是深化理解、实现思维跨越的关键途径。解题的意义不在于机械运算或题海战术,而在于通过对问题的深入分析,实现对基本概念、重要定理及严密逻辑推理的内化。解题不仅可以检验学生对知识的掌握程度,更有助于提升他们独立分析问题、解决问题和综合运用知识的能力,为其后续专业课程的学习以及未来继续深造或职业发展奠定良好的基础。

积分学是微积分的核心组成部分,熟练掌握积分的各种计算方法是学好《高等数学》的重要基石。其中第一类换元法又称“凑微分”法,是积分计算中最基础的方法之一,它可以看作是复合函数求导的逆运算。该方法的关键在于“凑微分”,即通过巧妙识别被积函数中的复合结构及其导数关系,设置合适的中间变量,将复杂积分转化为基本积分公式形式,从而实现积分的简化[2]。然而,教学实践表明,第一类换元法对初学积分运算的学生来说是难理解、易出错的一种方法,它要求学生具备较强的逆向思维能力和函数结构的敏感性。学生遇到的困难往往不在于积分计算本身,而是卡在“找不到凑微分对象”、“难以选定中间变量”或者“配凑完成忘记回代”等各种问题上[3]。因此,我们有必要对第一类换元法进行系统的学习难点分析与题型归类,帮助学生建立“模式识别-方法选择-运算执行”的解题思维链

条, 提高他们积分计算的灵活性与准确性。

本文首先系统阐述第一类换元积分法的基本原理与“五步法”解题步骤; 在此基础之上, 从预备知识、结构识别、符号操作与常数配凑、过程完整性、多重换元或嵌套结构及方法选择六个维度深入分析学生的学习难点及其成因。随后, 按被积函数的结构特征将常见的题型归纳为五大类, 并结合典型例题展示各类题型的解题技巧; 接着, 将新导出的常用积分公式补充到基本积分公式表中。基于上述学习难点与题型归类, 进一步提出切实可行的教学策略。最后, 总结研究结论。上述工作旨在为第一类换元法的教学研究提供理论支撑, 也为课堂教学提供可借鉴的实践方案。

说明: 定积分与不定积分的第一类换元法在变量替换的核心思路本质上相同, 故本文主要针对不定积分的相关教学问题展开分析。

2. 基本原理与解题步骤

第一类换元积分法是积分计算的基础方法之一, 其核心思想是通过变量替换, 将复杂的积分转化为基本积分公式表中的标准形式, 实现积分的简化。本章从复合函数求导法则出发, 证明第一类换元法的基本原理, 并给出标准化的解题步骤。

2.1. 基本原理

定理[4]: 设 $\int f(u)du = F(u) + C$ 且 $u = \varphi(x)$ 可微, 则 $F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数, 即有换元积分公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \stackrel{\text{令 } u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

证明: 由复合函数求导法则可得

$$\frac{d}{dx} F[\varphi(x)] = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

即 $F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数, 所以

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C.$$

从微分运算的角度来看, 第一类换元法本质上是利用了“微分形式的不变性”: 无论 u 是自变量还是中间变量, 函数 $f(u)$ 的微分均为 $f'(u)du$ 。因此, 在积分运算中, 可以将被积表达式中的某一部分“凑”成某个函数的微分形式, 从而直接积分。这一过程也称为“凑微分”法[5]。

2.2. 解题步骤

应用第一类换元法求解不定积分需要以下五个关键步骤[6], 简称“五步法”:

(1) **识别:** 准确地识别出被积函数中的复合函数部分 $f[\varphi(x)]$ 及导数因子 $\varphi'(x)$;

(2) **凑微分:** 将识别出的被积函数的导数因子 $\varphi'(x)$ 与 dx 结合, 凑成微分形式 $d\varphi(x)$, 这个过程需要熟练掌握微分运算;

(3) **换元:** 被积函数中剩余部分是 $\varphi(x)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$, 令 $u = \varphi(x)$, 将原积分转化为简单积分 $\int f(u)du$, 这一步理论上需要写出替换过程, 但随着熟练度的提升可逐步省略;

(4) **求积分:** 利用基本积分公式表中的积分形式直接求解, 得到原函数 $F(u) + C$;

(5) **回代:** 将 $u = \varphi(x)$ 回代, 得到最终结果 $F[\varphi(x)] + C$ 。

“凑微分”的过程中, 对于 $\varphi'(x)$ 我们可能会遇到显式和隐式两种情形, 处理策略是不同的。

显式情形: 被积函数明显包含复合函数 $f[\varphi(x)]$ 及导数 $\varphi'(x)$ 的乘积, 则将 $\varphi'(x)$ 直接移到 d 的后面

凑成 $d\varphi(x)$ 。如 $\int \cos(x^2) \cdot 2x dx$, 可以直接凑出 $d(x^2)$;

隐式情形: 被积函数中没有明显的 $\varphi'(x)$, 需要主动构造复合函数 $f[\varphi(x)]$ 及导数 $\varphi'(x)$ 的乘积, 再将 $\varphi'(x)$ 移到 d 的后面凑成 $d\varphi(x)$ 。如 $\int \cos(2x+1) dx$, 可以通过系数调整凑出 $\frac{1}{2}d(2x+1)$ 。

第一类换元法的本质是逆用复合函数求导法则, 即逆向使用求导公式。因此, 教学初始阶段可以多做一些填空练习, 如 $2x dx = d(\quad)$ 等, 强化逆向思维训练; 分类型讲解配凑技巧, 强调常数配凑口诀“差几倍, 补倒数; 外面乘, 里面除”; 并要求学生严格按照“五步法”书写解题步骤。

3. 学习难点分析

学习第一类换元积分法的过程中, 学生会遇到各种困难, 出现各种解题错误, 主要表现在以下几个方面[7]。

3.1. 预备知识层面的难点

表现: 学生不能熟练地将导数公式逆向使用。看到 $f(x)dx$ 不能快速识别“谁的导数是 $f(x)$ ”, 或者无法快速联想到“这是哪个函数的微分”。例如, 不能熟练地说出 $\cos x dx$ 对应 $d(\sin x)$, $\frac{1}{x} dx$ 对应 $d(\ln|x|)$ 。

成因: 习惯正向求导, 不习惯反向寻找原函数。求导训练远多于积分训练, 形成了“单向思维”; 对导数公式的“逆向”使用缺乏专项练习。

3.2. 复合函数结构识别层面的难点

表现: 学生看不出被积函数中的内层函数与外层函数的层次关系, 不知道该把谁看作 u 。

例如, 对于 $\int x \sin(x^2) dx$, 正确认知应该是中间变量 $u = x^2$, $du = 2x dx$ 。学生常犯的错误是内层选 x 或者 $\sin(x^2)$, 导致无法继续进行运算。

常见的误判有: 看到 e^{x^2} , 立刻想设中间变量 $u = x^2$, 却不检查是否有 $x dx$ 。看到 $\frac{1}{x^2+1}$, 想假设 $u = x^2+1$, 但分子没有 x 。

成因: 缺乏对复合函数结构的敏感度, 不能有效地进行“导数检验”。正确做法是先猜测 u , 再求 du , 看剩余部分是否匹配。

3.3. 符号操作与常数配凑层面的难点

表现: 不理解 dx 与 du 之间的转换逻辑。常犯的典型错误是直接写出 $\int f[g(x)] dx = \int f(u) du$, 而忽略 $du = g'(x) dx$, 即替换后不调整积分变量, 把 dx 和 du 混用。例如, $\int \cos(2x) dx = \int \cos u du$, 错误在于缺少 $du = 2 dx$ 的调整。与此相关, 遇到系数不匹配时, 如缺少 2 或 3, 学生往往不知所措, 或直接放弃配凑, 导致错误。例如 $\int x e^{x^2} dx$, 学生设 $u = x^2$ 后, 忘记将 $x dx$ 转化为 $\frac{1}{2} du$ 。

成因: 将微分形式不变性当作机械的“字母替换”而非结构变化, 缺乏“差常数倍可配”的意识, 不会主动乘除常数进行调整。

3.4. 过程完整性层面的难点

表现: 换元后“回代”的遗忘或混淆。求出关于 u 的积分 $F(u)+C$ 之后, 忘记将 u 换回 $g(x)$; 或者只回代部分 u , 留下混合表达式, 结果表达式同时含有 x 和 u , 特别是在多层换元时, 容易发生只回代最后一层而遗漏外层的现象。

例如, $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$, 令 $u=1+x^2$, 得 $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$, 如果遗漏回代, 即得错误答案。回代之后, 正确答案为, 原式 $= \ln(1+x^2) + C$ 。

成因: 注意力集中在积分运算上, 忽略了最终形式的要求; 缺乏步骤规范意识。

3.5. 多重换元或嵌套结构下的认知难点

表现: 学生遇到两层以上的复合函数, 如 $\int e^{\sin(x^2)} \cdot 2x \cdot \cos(x^2) dx$ 时, 解题思路中断, 不知道先从哪一层开始凑微分; 尝试多种 u 的取法, 反复失败后会产生焦虑, 不断重新计算却可能没有进展; 后续学习多种积分方法且遇到此种困难时, 还会产生放弃倾向, 认为“第一类换元法只适合简单题”, 转而盲目尝试第二类换元法或直接放弃。

成因: 学生难以快速识别复合函数多层嵌套的链式关系, 不擅长“由内向外”或“由外向内”逐层拆解分析; 大脑短时间承载信息的能力不足, 无法同步梳理多个变量, 且解题步骤书写不够规范; 仅将换元法理解为简单的“字母替换”, 未能认识到该方法可逐层拆分复合函数结构、简化运算。

3.6. 方法选择层面的难点

表现: 与其他积分方法的混淆。学生对第一类换元法与第二类换元法、分部积分法的适用范围界定模糊, 面对复杂的被积表达式时犹豫不决, 或者误用其他方法[8]。造成解题初期需要花费大量时间判断用哪种方法, 结果又因方法选择错误导致计算过程复杂或最终求解失败。

例如, $\int \sqrt{x+1} dx$, 本来用“凑微分”法很简单, 有人却直接令 $u=\sqrt{x+1}$, 开启了第二类换元法; 又如, $\int x\sqrt{x^2+1} dx$, 明明可以“凑微分”, 有人看到两个函数的积就想尝试分部积分法。

成因: 学生缺乏题型识别的系统性训练, 对各类积分方法的适用条件理解不够透彻。

注意: 两类换元法的区别: 第一类换元法直接设 $u=\varphi(x)$, 将原积分转化为关于 u 的积分; 而第二类换元法设 $x=\phi(t)$, 通过反函数关系进行替换[2]。教学实践中, 教师应引导学生根据被积函数的结构特征, 正确区分两类方法的适用情形。

综合以上分析可知, 学习难点产生的根本原因可归结为: 求导与积分训练的不对称性, 导致学生逆向思维的能力薄弱; 对微分形式的机械理解, 使得学生不具备灵活变形的能力; 由于缺乏系统的题型归类教学, 学生难以形成有效的模式识别。

4. 题型归类与解题技巧

不定积分中被积函数的复合函数结构形式千变万化, 在教学实践中, 通过具体分析我们逐渐总结出以下一些常见类型的被积函数, 它们适合利用第一类换元法进行求解, 求解过程中需要注意使用不同的解题技巧。为了方便学生识别与记忆, 我们将这些题型归纳为五大类, 共 12 种基本类型[9]-[11]。

4.1. 线性与多项式内层型

这类题型的特征是被积函数的内层为一次式 $ax+b$ 或幂函数 x^n , 外层函数形式较为简单; 我们可通过凑微分, 将积分直接转化为基本积分公式的标准形式。

【题型 1】 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) \quad (a \neq 0)$ 。

例 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$ 。

解: $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int (2x+3)^{-2} d(2x+3)$, 令 $u=2x+3$, 则原式 $= \frac{1}{2} \int u^{-2} du = -\frac{1}{2} u^{-1} + C$ 。

再将 $u = 2x + 3$ 代入上式, 即得 $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx = -\frac{1}{2(2x+3)} + C$ 。

【题型 2】 $\int x^{n-1} f(x^n) dx = \frac{1}{n} \int f(x^n) d(x^n)$ 。

例 2. 求不定积分 $\int 2xe^{x^2} dx$ 。

解: $\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2)$, 令 $u = x^2$, 则原式 $= \int e^u du = e^u + C$ 。再将 $u = x^2$ 代入上式, 即得 $\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$ 。

注: 当中间变量的代换过程比较熟悉之后, 只要在运算过程中注意把整个 $\varphi(x)$ 视为一个变元即可, 不必每次另行列出辅助的中间变量 $u = \varphi(x)$ 。

【题型 3】 $\int \frac{f(x^n)}{x} dx = \frac{1}{n} \int \frac{f(x^n)}{x^n} d(x^n)$ 。

例 3. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^7+2)}$ 。

解:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^7+2)} &= \int \frac{x^6}{x^7(x^7+2)} dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{x^7(x^7+2)} d(x^7) \\ &= \frac{1}{7} \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^7+2} \right) d(x^7) \\ &= \frac{1}{14} \left[\int \frac{1}{x^7} d(x^7) - \int \frac{1}{x^7+2} d(x^7+2) \right] \\ &= \frac{1}{14} (\ln|x^7| - \ln|x^7+2|) + C \\ &= \frac{1}{14} \ln \left| \frac{x^7}{x^7+2} \right| + C. \end{aligned}$$

4.2. 分式与根式基本公式型

这类题型的结果可以直接作为基本积分公式使用, 包括反正切、反正弦、对数等形式, 熟练掌握它们可以大幅加快解题速度。

【题型 4】 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$ 。

证明: $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ 。

例 4. 由上式, 易得 $\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$ 。

【题型 5】 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$ 。

证明: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\frac{x}{a} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ 。

例 5. 由上式, 易得 $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{3} + C$ 。

【题型 6】 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)。$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) \end{aligned}$$

证明:
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x-a} d(x-a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right] \\ &= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

例 6. 由上式, 易得 $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C。$

4.3. 指数对数型

这类题型涉及指数函数 e^x 或对数函数 $\ln x$, 其导数恰好出现在被积表达式中, 我们借助“凑微分”即可直接完成积分运算。

【题型 7】 $\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x)。$

例 7. 求不定积分 $\int \frac{1}{1+e^x} dx。$

解 I:
$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = x - \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x) = x - \ln(1+e^x) + C。$$

解 II:
$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx = -\int \frac{1}{e^{-x} + 1} d(e^{-x} + 1) = -\ln(e^{-x} + 1) + C = x - \ln(1+e^x) + C。$$

【题型 8】 $\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x)。$

例 8. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}。$

解:
$$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \ln|1+2\ln x| + C。$$

4.4. 三角函数幂次型

下面出现的积分类型中, 被积函数均含有三角函数。在计算这些积分的过程中往往要用到一些三角恒等式, 如

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

等。处理这类积分的关键是: 根据三角函数幂次的奇偶性, 选择恰当的凑微分变量 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\sec x$ 、 $\csc x$ 或者利用半角公式降幂(如表 1)。

下面通过三道典型例题, 分别展示上述方法的应用。

【题型 9】三角函数幂次积分。

例 9.1. 求不定积分 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx。$ (余弦奇次, 可做变换 $u = \sin x。$)

Table 1. Summary of basic methods

表 1. 基本方法总结

序号	被积函数形式($k, l, n \in N$)	推荐变换	依据
1	$\sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x$	$u = \cos x$	奇次正弦, 可拆出一个 $\sin x$ 凑成 $-d(\cos x)$
2	$\sin^n x \cdot \cos^{2k+1} x$	$u = \sin x$	奇次余弦, 可拆出一个 $\cos x$ 凑成 $d(\sin x)$
3	$\sin^{2k} x \cdot \cos^{2l} x$	半角公式降幂	化为倍角形式后再积分
4	$\tan^n x \cdot \sec^{2k} x$	$u = \tan x$	$\sec^2 x dx = d(\tan x)$
5	$\cot^n x \cdot \csc^{2k} x$	$u = \cot x$	$\csc^2 x dx = -d(\cot x)$
6	$\tan^{2k-1} x \cdot \sec^n x$	$u = \sec x$	$\sec x \cdot \tan x dx = d(\sec x)$
7	$\cot^{2k-1} x \cdot \csc^n x$	$u = \csc x$	$\csc x \cdot \cot x dx = -d(\csc x)$

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x) \\
 &= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\
 \text{解:} \quad &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.
 \end{aligned}$$

例 9.2. 求不定积分 $\int \sec^6 x dx$ 。(正切幂次, 可做变换 $u = \tan x$ 。)

$$\begin{aligned}
 \int \sec^6 x dx &= \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx \\
 &= \int (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) \\
 \text{解:} \quad &= \int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x) d(\tan x) \\
 &= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C.
 \end{aligned}$$

例 9.3. 求不定积分 $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$ 。(偶次正余弦, 半角公式降幂。)

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\
 \text{解:} \quad &= \frac{1}{8} \int (\cos 2x - \cos^3 2x) dx + \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) + \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx \\
 &= \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) + \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \int \cos 4x \cdot \frac{1}{4} d(4x) \\
 &= \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

注: 上述三例分别展示了“余弦奇次”、“正切幂次”、“偶次正余弦”三类三角函数幂次积分的典型处理方法, 其余情形均可按照类似计算过程得到相应的结果。

4.5. 积化和差与恒等变形型

这类题型需要主动进行代数或三角恒等变形, 才能凑出微分形式。它们往往是学生学习的难点, 需

要重点训练。

【题型 10】 $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$ 、 $\int \cos ax \cdot \sin bx dx$ 、 $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$ 或 $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$ 。这种题型需要用到积化和差公式。

如

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

等, 在此不一一列出了。

例 10. 求不定积分 $\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx$ 。

$$\begin{aligned} \int \cos 3x \cdot \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x)] dx \\ \text{解: } &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx = \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

【题型 11】 抽象复合凑微分型: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$, 其中 $u = g(x)$ 。

这类题型不限定具体函数形式, 解题的关键是识别出完整的“内层函数导数”, 这也是“凑微分”法的核心思想。

例 11.1. 求不定积分 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ 。

$$\text{解: } \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos \sqrt{x} d\sqrt{x} = 2 \int \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin \sqrt{x} + C。$$

例 11.2. 求不定积分 $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot \sin^3(\ln x) dx$ 。

解: 本题的被积函数是三层嵌套的复合函数。

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot \sin^3(\ln x) dx = \int \cos(\ln x) \cdot \sin^3(\ln x) d(\ln x) = \int \sin^3(\ln x) d[\sin(\ln x)] = \frac{1}{4} \sin^4(\ln x) + C。$$

【题型 12】 其他技巧型(恒等变形、拆项等)。

求解复杂凑微分题型时, 常需借助代数、三角恒等变形构造出导数形式 $g'(x)$, 无法直接观察得到; 常用变形方法包括拆项、增减常数、配方、分子分母同乘除同一常数或代数式等, 这也是学生解题最容易出错的环节。

例 12.1. 求不定积分 $\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{x}{x^2+2x+5} &= \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{x^2+2x+5}, \text{ 于是} \\ \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C。 \end{aligned}$$

注: 本题求解过程运用了拆项与配方两种恒等变形方法。

例 12.2. 求不定积分 $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{1}{1+\sin x} &= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x, \text{ 于是} \\ \int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \sec^2 x dx - \int \sec x \tan x dx = \tan x - \sec x + C。 \end{aligned}$$

注: 本题求解过程运用了分子分母同乘同一代数式、三角恒等变换这两种恒等变形方法。

上述 12 种题型基本涵盖了第一类换元法求解不定积分的各类常见情形。在教学中, 教师可根据学生的掌握情况, 从基本题型到综合题型逐步推进, 并引导学生总结每种题型的配凑技巧与适用条件。特别地, 题型 11 和题型 12 充分展现了“凑微分”法的核心思想与灵活变形技巧, 此类题目是突破学习难点的关键。

5. 基本积分公式补充

第一类换元法的最终目标是将被积表达式转化为基本积分公式表中的标准形式。基本积分公式表收录的公式越丰富, 我们能够处理的积分类型也就越多。学生在学习换元法后, 应当从典型例题中抽象出通用公式, 主动完善自己的积分公式储备。

《高等数学》在讲授第一类换元积分法之前, 借助“积分是微分的逆运算”已经推导出 13 个常用的积分公式, 构成基本积分公式表[1]。本文利用第一类换元法求解的各类积分与例题中, 存在一些高频次出现的积分, 这类积分可直接作为通用公式使用, 以此扩充基本积分公式表。其中包含前文已推导证明的题型 4~6 对应的三个积分公式, 依次编号为公式(14)~(16)。除此之外, 下文再给出四个形式简洁的三角函数积分公式(17)~(20)。

$$(14) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0), \text{ (与 } a^2 + x^2 \text{ 相关)}$$

$$(15) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0), \text{ (与 } \sqrt{a^2 - x^2} \text{ 相关)}$$

$$(16) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0), \text{ (与 } x^2 - a^2 \text{ 相关)}$$

$$(17) \int \tan x dx = \ln |\sec x| + C, \text{ (正切积分)}$$

$$(18) \int \cot x dx = -\ln |\csc x| + C, \text{ (余切积分)}$$

$$(19) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C, \text{ (正割积分)}$$

$$(20) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C. \text{ (余割积分)}$$

证明: 公式(17)~(20)均可利用第一类换元法完成证明。

$$(17) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C.$$

同理可得, (18) $\int \cot x dx = -\ln |\csc x| + C$ 。

$$(19) \int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

同理可得, (20) $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$ 。

6. 基于学习难点与题型归类的教学策略

6.1. 分阶段教学建议

- 第一阶段(基础): 选用基本匹配型、常数配凑型题型, 侧重于逆向思维训练, 要求学生规范地书写“五步法”解题步骤[12]。
- 第二阶段(进阶): 选用线性内层型、分式型、三角函数型题型, 重点讲解常数配凑技巧与各类恒等变

形方法, 要求学生能灵活运用。

- 第三阶段(综合): 选用抽象复合型、多层复合型、技巧型题型, 着重培养学生的模式识别与解题方法选择能力。
- 第四阶段(拓展): 得到更多常用的积分公式, 引导学生将新增公式补充到基本积分公式表中。

6.2. 针对各类学习难点的干预措施

- 针对预备知识难点: 设计微分“反向填空”的专项练习, 如 $2x dx = d(\quad)$ 等[13];
- 针对结构识别难点: 使用“结构标注法”标注内外层函数, 分析清楚函数的结构;
- 针对符号操作与常数配凑难点: 规范分步换元书写步骤, 安排对错例题对比纠错; 总结口诀“差几倍, 补倒数”, 安排专项训练, 重点练习 $\int x^n f(x^{n+1}) dx$ 型积分;
- 针对过程完整难点: 牢记“换元必回代”口诀, 规范书写回代步骤, 有意设置错题练习纠错[14];
- 针对多重换元或嵌套结构难点: 由浅入深练习多层嵌套的复合函数的积分, 按由外至内思路进行拆解, 再依托换元配凑路线分步换元;
- 针对方法选择难点: 区分两类换元法的根本差异, 理清两类换元法的适用情形, 设置一题多解辨析题对比解法优劣。

6.3. 题型归类在教学中的应用

教师可以将 12 种题型作为教学单元, 为每类题型配置典型例题与变式练习, 在教学过程中帮助学生逐步建立“题型 - 解题策略”之间的对应关系。同时可设计“题型识别卡”, 方便学生快速判断题型, 并匹配到对应的解题策略[5] [9]。

6.4. 课堂活动设计与练习编排建议

在课堂活动中, 设计“五步法”填空, 即由教师提供标准化解题框架, 引导学生自主完善解题步骤。练习题注意分层编排: 基础题可直接匹配到固定解题思路; 提高题需要利用常数配凑或简单恒等变形; 拓展题为多层复合题型, 侧重练习特殊解题技巧。教师应该倡导一题多解, 对比引入不同中间变量方案的优劣[15]。

6.5. 常见错误的预防与纠错策略

汇总积分的一些典型错解题目, 如计算 $\int \cos(2x) dx$ 时, 常错误地写为 $\sin(2x) + C$, 遗漏了系数 $\frac{1}{2}$; 将整理好的错题集用于课堂展示, 引导学生自主纠错。要求学生对每道题的积分结果求导验证, 养成自主检验的解题习惯。

7. 结论

第一类换元积分法是一元函数积分学的核心解题方法, 也是学生突破不定积分运算、掌握积分变形技巧的关键内容, 在微积分知识体系中占据重要地位。本文围绕第一类换元积分法, 从数学原理、学习难点、题型归类、积分公式扩展及教学策略五个方面开展系统分析, 得出以下结论: (1) 第一类换元法的本质是复合函数求导法则的逆向应用, 标准解题步骤可概括为“五步法”; (2) 学生学习中存在预备知识、结构识别、符号操作与常数配凑、过程完整性、多重换元或嵌套结构及方法选择六类典型难点, 根本成因在于逆向思维薄弱、题型识别训练不足; (3) 题型可划分为五大类, 分类教学有利于培养学生的题型模式识别能力; (4) 完成第一类换元法的学习之后, 教师应及时补充常用基本积分公式, 并重视公式推导过程的讲解; (5) 结合学习难点与题型分类设计的分阶段教学策略, 能够有效降低学生的解题错误率。

不定积分中被积函数的形式千变万化,题目的计算具有很强的灵活性。需要经过大量的练习,积累足够多的经验,才能熟练掌握各种计算方法和解题思路,并准确应用到不同的题目之上。除了本文讨论的第一类换元法之外,课程后续还安排有第二类换元法和分部积分法,以及形式复杂的有理函数积分,每一种方法都是对问题本质的一次深刻洞察和巧妙转化,很多题目更是多种积分方法的综合运用[9]。在现有研究的基础之上,未来我们还可以借助智能诊断、可视化工具优化课堂教学,通过大量教学样本进行实证分析、验证教学策略的有效性,并进一步梳理不同积分方法之间内在的认知联系,探讨人工智能背景下教学目标的调整与革新[16]。

通过多年的教学我们越来越深刻地认识到,学生分析数学问题需要运用逻辑思维,构建解题框架需要运用抽象思维,寻求简洁、高效的解题方法需要运用创新思维,而不定积分的学习过程可以全面提升学生的数学素养和思维能力,这不仅对数学学科本身至关重要,更将在学生未来的学习和工作中发挥不可替代的作用[17]。

基金项目

河北省高等教育教学改革研究与实践项目(2025GJJG134);河北师范大学教学改革研究项目(2020XJJG060);河北师范大学人文社会科学研究基金项目(S22Y011)。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(上册)[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 193-208.
- [2] 赵树嫒. 微积分[M]. 第5版. 北京: 中国人民大学出版社, 2021: 180-182.
- [3] 吴丽华. 浅谈不定积分教学中的几点思考[J]. 高教学刊, 2019(11): 131-133.
- [4] 姜作廉. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版, 2007: 128-132.
- [5] 张倩伟, 胡长英. 微积分学习指导[M]. 北京: 人民出版社, 2022: 174-175.
- [6] 范云晔. 一元函数不定积分凑微分法求解技巧的几点思考[J]. 数学学习与研究, 2016(17): 112, 114.
- [7] 周凤芹. 不定积分第一换元积分法教学探究[J]. 黑龙江科学, 2021, 12(1): 48-49.
- [8] 张艳桃. 不定积分第一类换元法的讲授与训练[J]. 湖北科技学院学报, 2013, 33(12): 25-26.
- [9] 杨鹏. 定积分与不定积分解题方法与策略研究[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 323-332.
- [10] 甘媛. 关于第一类换元积分法教学思路的探讨[J]. 数学学习与研究, 2020(18): 142-143.
- [11] 石德刚, 董春芳. 第一类换元积分法的解构和重构——兼简论一元积分学的改革[J]. 天津职业院校联合学报, 2018, 20(8): 88-96.
- [12] 刘雷. 利用第一类换元积分法求不定积分应注意的问题[J]. 成都教育学院学报, 2006(11): 98-99.
- [13] 李杰森, 郭雅欣, 张鑫清, 等. 微分思想在高等数学教学中的运用——不定积分教学设计[J]. 教育进展, 2022, 12(9): 3536-3542.
- [14] 刘丹, 李泽华, 方明亮. 基于变量代换的“凑微法”不定积分教学策略[J]. 数学学习与研究, 2020(3): 10-11.
- [15] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2021: 312-331.
- [16] 潘小明. 人工智能时代的数学教育: 为何? 何为? 如何? [J]. 数学通报, 2026, 65(3): 1-7, 38.
- [17] 李继成. 人工智能时代大学数学课程教学守正与创新的思考[J]. 大学数学, 2026, 42(2): 1-5.