

线性方程组迭代解法的教学改革研究

熊点华, 柳雪飞*, 李熙春

广西民族师范学院数学与计算机科学学院, 广西 崇左

收稿日期: 2026年6月18日; 录用日期: 2026年7月15日; 发布日期: 2026年7月22日

摘要

线性方程组的迭代解法是数值分析中的重点教学内容, 该部分知识点难度较高, 教学难度较大, 为了让本校学生在学习这部分内容时能更好地理解相关内容, 本文对教学过程中出现的问题进行剖析, 结合相关教学经验总结探讨了线性方程组迭代解法的迭代程序, 并从教师的教和学生的学两个方面给出了建议。

关键词

数值分析, 线性方程组, 教学改革, Matlab软件

Teaching Reform Research on Iterative Methods for Solving Linear Systems

Dianhua Xiong, Xuefei Liu*, Xichun Li

Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Minzu Normal University, Chongzuo Guangxi

Received: June 18, 2026; accepted: July 15, 2026; published: July 22, 2026

Abstract

Iterative methods for solving linear systems are a key topic in numerical analysis, and this subject area is both challenging in content and difficult to teach. To help students at our institution better understand this material, this paper analyzes common problems encountered during instruction, summarizes relevant teaching experiences, discusses the iterative algorithms used in solving linear systems, and provides recommendations from both the instructor's teaching perspective and the student's learning perspective.

*通讯作者。

文章引用: 熊点华, 柳雪飞, 李熙春. 线性方程组迭代解法的教学改革研究[J]. 教育进展, 2026, 16(7): 1229-1236.
DOI: 10.12677/ae.2026.1671491

Keywords

Numerical Analysis, Linear Systems of Equations, Teaching Reform, Matlab Software

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数值分析[1]不仅是数学专业的核心必修课程,也是工科类专业一门重要的基础学习课程,在数值计算与误差分析等方面有着广泛应用,数值分析教学质量的提升能更好地帮助学生理解相关教学内容,从而提高教学效率。线性方程组的常规解法较为简单[2],只需要学生具备一点线性代数基础知识,即可将线性方程组求解出来,但线性方程组的迭代解法这一知识点难度较高,而这种方法又恰恰是实现编写程序求解线性方程组的基础理论知识,因此对线性方程组迭代解法的教学进行探索是有必要的。

陈浩等[3]认为迭代解法能培养学生的创造性思维,在教学中应当引导学生探究不同迭代方法之间的关系,激发学生的思维活力,但并未给出具体的实施方案。雍龙泉[4]在 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的基础上进行补充,探讨了矩阵的构造方法,为教学提供了参考,对迭代法的收敛性的教学理念考虑不足。刘雄峰[5]结合教学与实例,展示了如何使用 MATLAB 软件来编程求解线性方程组,体现了理论与实践并重的教学理念,对迭代法的教学方法未进行深入探讨。朱艳[6]结合教学实践拓展教学内容,提高教学的广度和深度,未充分考虑学生的综合实际情况,同时没有展示教学效果。Valdés Santiago [7]基于数值分析课程的特点,对线性方程组的迭代解法设计教学方法,为数值分析提供了教学方法指导方案,该方案并未实施在教学中。Liang C [8]讨论了自伴且半正定系数算子情形下的 Gauss-Seidel 迭代法,推导了线性方程的收敛性结论,这是很有必要的,但面对复杂矩阵时,该收敛性的分析有待于被验证。Mei D 等[9]以成果导向教育理念为引领提出系统的教学改革方案,并提升了学生的科学计算素养与解决实际问题的能力,学生满意度和考试成绩均有明显改善,为数值分析课程的教学方法提供了有效的改革路径。

本文提出“数据诊断-问题归类-三维改革”的系统教学改进路径,为线性方程组的迭代解法提供了教学改革方案,适用于地方院校和学生基础差异较大的班级,在编程教学中强调理论建模与代码之间的联系。通过实证数据验证改革效果,2024 级不及格率从 28.72%降至 12.77%,为教学改革提供了数据支撑。本文主要创新点如下:

1. 数据驱动的教学诊断:通过两个年级、共 206 名学生的测试成绩对比,揭示了不及格率高与编程理解弱等实际问题,具有较强的实证基础;
2. 类比迁移教学策略:将函数不动点迭代法的思想横向迁移到线性方程组的迭代解法中,帮助学生建立新旧知识的联系,降低理解难度;
3. 编程教学的细致引导:提出引导学生自主完成矩阵的 D、L、U 矩阵分解,而非直接给出代码,强化了对迭代公式矩阵形式的理解;
4. 教学与学习的双向互动机制:强调学生反馈、小组合作、实验室开放等机制,形成“教-学-练-评”闭环,提升教学效果;
5. 教学模式的融合与灵活调整:“多媒体展示+板书推导+编程实践”三位一体,适应不同学生的学习风格,提升课堂参与度。

2. 基础理论

2.1. 迭代解法的基本概念[1] [3]

对线性方程组 $AX = b$ ，设 $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ 是一组迭代向量序列，当 $k \rightarrow \infty$ 时，迭代序列会逐渐逼近精确解 x^* 。若相邻的近似解之间满足固定的函数关系，则称这种方法为固定格式迭代法。类似于不动点迭代法，解线性方程组的固定格式迭代法一般具有下列形式：

$$x = Bx + f, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.1)$$

其中 B 为常数迭代矩阵， f 是常数迭代列向量， x 是迭代序列，初值可自行设定，给出初值后，通过公式(2.1)便可将线性方程组的解迭代出来。

2.2. 固定格式迭代法的收敛性[10]

定理 1.1 (固定迭代法基本定理)：设有一阶固定格式迭代法：

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

其中 $I - B$ 为非奇异矩阵，对任意初始向量迭代 $x^{(0)}$ 迭代法得到的解序列 $\{x^{(k)}\}$ 都收敛的虫咬条件是谱半径 $\rho(B) < 1$ ，并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ 就是方程 $x = Bx + f$ 的唯一解。该证明过程详见参考文献[11]，这里不再赘述，谱半径定义为： $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ ， $\lambda_i, (i = 1, 2, \dots)$ 是矩阵 B 的所有特征值。

3. 线性方程组的迭代解法

3.1. 雅克比迭代法[12]

线性方程组 $AX = b$ 的方程组表达方式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.1)$$

在式(3.1)中，主对角元素均不为零，即 $a_{ii} \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ ，可将上述方程组改写为下列等价形式：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ x_n = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}) + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \quad (3.2)$$

根据方程组(3.2)，将等号右边的未知数看成是上一步的迭代解，等号左边的看作下一步的迭代解，可以得出线性方程组得出迭代计算公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(0 + a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}) + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + 0 + \dots + a_{2n}x_n^{(k)}) + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\dots$$

$$x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}} \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + 0 \right) + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

得到的线性方程组的迭代解法就是雅克比(jacobi)迭代法, 称公式(3.3)为雅克比迭代法的方程组迭代式。根据线性方程组的矩阵表现形式, 可将公式(3.3)写成如下形式:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \quad (3.4)$$

其中, D, L, U 分别为对角矩阵、严格下三角和严格上三角矩阵, D, L, U 三个矩阵均与 A 矩阵有关, 并分别给出了这三个矩阵的表型形式。

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

在公式(3.3)中, 将 $D^{-1}(L+U)$ 看作矩阵 B , 将 $D^{-1}b$ 看作向量 f , 这是符合固定格式迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的。

3.2. 高斯 - 赛德尔迭代法[13]

通过对雅克比迭代法的观察, 发现从第二项起, 第 k 项前面的 $k-1$ 个分量都已通过迭代计算得出, 因此考虑将这些分量替代当前迭代式中的相应分量的上一步迭代结果, 变得到了高斯 - 赛德尔迭代法, 具体计算公式如下:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}} \left(0 + a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} \right) + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}} \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + 0 + \dots + a_{2n}x_n^{(k)} \right) + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}} \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + 0 \right) + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \quad (3.5)$$

通过对(3.5)式的整理, 得到其对应的矩阵表现形式为 $x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k+1)} + D^{-1}b$, 将含有 $x^{(k+1)}$ 的项整理后得出:

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b \quad (3.6)$$

例 1: 用雅克比迭代式与高斯 - 赛德尔迭代法求解方程组(3.7), 解分量的误差小于 0.001。

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -1x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} \quad (3.7)$$

【解】 对于方程组(3.7), 其对应的雅克比迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5} \left(0 + 2x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)} \right) + \frac{-12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4} \left(-x_1^{(k)} + 0 + 2x_3^{(k)} \right) + \frac{20}{4} \end{cases}$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{10}(2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 0) + \frac{3}{10}$$

使用公式(3.4)迭代, 经计算得出 $\lambda(D^{-1}(L+U)) = \begin{cases} -0.2147 + 0.0000i \\ 0.1074 + 0.4946i \\ 0.1074 - 0.4946i \end{cases}$, 显然其谱半径是小于 1 的,

使用迭代法时收敛。经过 5 次迭代后, 得到 $X = [-4.0087 \ 2.9851 \ 2.0086]^T$, 当经过 20 次迭代后, 迭代结果为 $X = [-4 \ 3 \ 2]^T$, 而方程组的精确解恰恰就是 $X = [-4 \ 3 \ 2]^T$ 。

方程组(2.8)对应的高斯-赛德尔迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}(0 + 2x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)}) + \frac{-12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)} + 0 + 2x_3^{(k)}) + \frac{20}{4} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{10}(2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} + 0) + \frac{3}{10} \end{cases}$$

同理, 得出迭代矩阵的谱半径为 0.2, 这也是小于 1 的, 经过 5 次迭代后, 得到 $X = [-4.0004 \ 3.0001 \ 2.0001]^T$, 当经过 8 次迭代后, 迭代结果为 $X = [-4 \ 3 \ 2]^T$, 这与方程组的解也是一致的, 并且比雅克比迭代法的收敛速度更快。

算法 2.1: 雅克比迭代法

输入 A, b, x,

生成 3 个零矩阵 D, L, U, 用矩阵 A 中的元素替换掉零矩阵中相应位置的元素。

for i = 1:N

if **max** (abs(b - A*X)) < 0.001;

break

else

$X = D^{-1}(L + U)X + D^{-1}b$

end

end

算法 2.2: 高斯-赛德尔迭代法

输入 A, b, x,

生成 3 个零矩阵 D, L, U, 用矩阵 A 中的元素替换掉零矩阵中相应位置的元素。

for i = 1:N

if **max** (abs(b - A*X)) < 0.001;

break

else

$X = (D - L)^{-1}U^*X + (D - L)^{-1}b$

end

end

使用传统计算方法也能求解出线性方程组, 但使用计算软件会大大减少手动计算时间, 节约大量时间成本。

4. 线性方程组的教学改革探索

4.1. 教学现状

线性方程组的迭代解法是数值分析及计算机软件课程中的重要环节之一，学生对于理论的理解很透彻，但部分同学对于代码编程也能很快熟悉，但部分同学对矩阵替换难以理解，对 matlab [14]编程语言的理
解较弱。这里选取某校数学专业 2023 级与 2024 级同学为例，2023 级有学生 18 人，2024 级有学生 188
人。在讲授完线性方程组迭代解法教学内容以后，对相应内容进行作业布置与课堂测验，抽查学生学习
线性方程组迭代解法后对相应知识的掌握情况，测试结果如下：

Table 1. Test results for solving linear systems using iterative methods

表 1. 线性方程组迭代法求解测试成绩表

分数区间	优秀(90 及以上)	良好(80~89)	中等(70~79)	及格(60~69)	不及格(59 及以下)
2023 级人数	15	23	47	49	54
所占比例	7.98	12.23	25.00	26.06	28.72
2024 级人数	29	62	50	23	24
所占比例	15.42%	32.98%	26.60%	12.23%	12.77%

从表 1 的测试成绩来看，两个年级学生的学习效果存在一定的差异性，接受知识的能力也有所不同，
其中 2024 级的成绩明显优于 2023 级的成绩。2023 级的不及格率最高，共有 54 人，占比 28.72%，良好
及以上仅 48 人，占比 20.21%，多数学生集中在中等与及格区间。2024 级的良好及以上 91 人，相较于
2023 级有显著提高，不及格率降至 12.77%，低分段人数明显减少。经过对学生的情况进行分析后，
了解到分数低的同学因为没有能熟练掌握相关概念，导致分数较低，还有部分同学的代码理解能力较弱，
在程序编写部分没有拿到分，少部分同学是因为过于自信导致分数不高。通过对学生的学习情况与测试
结果数据进行分析，总结出学生学习线性方程组迭代解法难度大的原因有以下几点：第一，基础薄弱，
高等代数相关知识的理解不够透彻，遗忘了特征值等关于矩阵的知识内容，进而无法深入理解线性方程
组的迭代解法；第二，在进行公式变形时不了解怎么迭代与初值设置，计算能力较弱；第三是学生代
码程序的理解不够透彻，对 matlab 代码的编程语言不熟练。针对以上学习问题与问题成因，对线性方程
组的迭代解法总结了三个教学经验。

4.2. 改革措施

4.2.1. 教学方法改革措施

在学习线性方程组之前，学生已经学习了函数的不动点以及不动点迭代法，因此对线性方程组的教
学可以使用类比迁移的教学方法。首先复习线性方程组的常规解法，在面对矩阵维度较高的矩阵时，矩
阵的常规变换计算量大，且计算容易出错。再回顾不动点迭代的概念，让学生回想起函数不动点的核
心定义，将不动点的理念横向迁移到线性方程组的迭代解法中，进而引出线性方程组迭代解法的核心概念。
在使用迭代法求解线性方程组时，只需要进行矩阵相乘与向量相加，不涉及矩阵的行变换，计算量大大
减少。

不愤不启，不悱不发，在教学过程中合理使用启发式教学能加深学生对相关知识的理解。在教学
过程中时刻留意学生的一举一动，注意与学生的交流与提问，在提问中引导学生理解核心难点积极引导
学生独立思考。同时鼓励学生自主解决学习过程中遇到的问题，在学生不能自行解决问题时，积极引导

学生查找相关资料与核心知识点。教学过程中引导学生将复杂的知识点进行简单化,将抽象的知识点具象化为可实际操作的显示具体公式与程序,把握教学节奏,根据学生的学习反馈情况,及时调整教学方法与引导学生。此外,随着教学方式多元化的兴起,教师可以改进教学模式与改进评价方法,合理使用多媒体+传统板书的教学模式。纯粹使用多媒体教学或板书教学已不能满足当前的教学,可将二者合理结合。在理论讲解时可使用多媒体将相应的知识点列举出来,把关键词语通过板书书写在黑板上,在进行公式推导与实例计算时,应在板书上将相应的推导过程与实例计算演示出来,便于学生对相关知识的理解。在课外,积极引用慕课、学习通等新兴教学软件或平台,在教学评价时,注重学生平时的课堂表现与作业完成度,适当降低期末试卷考核比重,有助于消除学生对期末考试的恐惧心理,并能加强学生平时对课堂的关注度。在代码编写的过程中,引导学生自行完成矩阵的分解,即如何将矩阵分解为前文中提到的D矩阵、L矩阵和U矩阵。

4.2.2. 学习方法改革措施

课堂教学不仅仅是教师的课堂,课堂的主体是学生,教学是一个学生学习与教师教学的双向过程。要是学生对知识难点的理解,光靠教师改进教学方法是行不通的,在这个过程中,学生的学习态度与方法起着关键的决定作用。在教学过程中,学生应该与教师有适当的互动,例如在教师进行问答时,学生可以先进行思考,然后相互讨论思考结果,最后给出问题的答案。教师不仅要主动去询问学生的学习情况,学生也应该及时反馈自己的学习情况,让教师的教与学生的学能得到及时的回应。受限于课堂时间的短暂,可将学生分成多个学习小组进行合作学习,对于学习过程中出现的问题先进行小组讨论,对于没有讨论结果的问题,集中汇总后再与教师讨论,直至问题得到解决。

4.2.3. 业余时间改革

作为大二学生,课堂任务相对减少,可由学生支配的时间较多。在空余时间,除了完成相应学科的作业外,可适当开放实验室,组织学生合理分批次的到实验室进行代码编写,巩固学习成果,进而提升学生对教学难点的理解。在练习代码的过程中,遇到代码出现错误的时候,先与周围同学讨论,不断将代码中的错误进行修改,加深对代码的理解,进一步加深学生对困难知识点的理解。

5. 总结

在数值分析及计算软件这门课程中,关于线性方程组的迭代解法理论知识较为抽象,学生学习过程中感觉知识学习与代码编写很困难。本文在实际教学经验中,总结归纳了学生在学习线性方程组的迭代解法经常出现的问题及原因,并给出未来相应的教学策略,希望能给教师探索教学改革的实践途径提供一些帮助和借鉴。

基金项目

2024年广西民族师范学院本科教学改革工程项目(No.JGYB202459),2025年崇左市科学研究与技术开发计划自筹项目(No.2024ZC087643)。

参考文献

- [1] 喻文健. 数值分析与算法[M]. 第3版. 北京: 清华大学大学出版社, 2020.
- [2] Ergenecosar, G.T. (2025) Determining the Type of a Solution to the Fully Pythagorean Fuzzy Linear Equations System: Exact, Restricted, or Relaxed Approximate Solution. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **71**, 4787-4813. <https://doi.org/10.1007/s12190-025-02409-z>
- [3] 陈浩, 王小丽. 线性方程组迭代解法的启发式教学实践[J]. 科技风, 2018(23): 79.
- [4] 雍龙泉. 对线性方程组迭代法的一些补充[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(7): 60-63.

-
- [5] 刘雄峰, 姚思远. 迭代法求解电路方程组的 Matlab 软件实现[J]. 电子测试, 2021(6): 46-48.
 - [6] 朱艳. 《计算方法》教学中一个案例分析[J]. 电脑知识与技术, 2018, 14(4): 107-108.
 - [7] Valdés Santiago, D. and Díaz Cordero, A. (2025) A Proposal for an Instructional Methodological Class on Iterative Numerical Methods for Systems of Linear Equations. *Gamification and Augmented Reality*, **3**, 221. <https://doi.org/10.56294/gr2025221>
 - [8] Liang, C., Sun, D.F. and Kim-Chuan, T. (2019) Some Problems on the Gauss-Seidel Iteration Method in Degenerate Cases. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, **40**, 98-103.
 - [9] Mei, D. and Liu, Q. (2020) Problem-Driven Teaching Reform of Numerical Analysis Course under the Background of Big Data. *Proceedings of the International Conference on Modern Educational Technology and Innovation and Entrepreneurship (ICMETIE 2020)*, Sanya, 10-12 January 2020, 266-270. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.200306.119>
 - [10] Almani, T. and Kumar, K. (2024) Convergence of Multirate Fixed Stress Split Iterative Schemes for a Fractured Biot Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **431**, Article 117253. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117253>
 - [11] 宋岱才, 姜凤利, 田秋菊. 某些迭代法的一个收敛性定理[J]. 山东大学学报(工学版), 2009, 39(2): 146-150.
 - [12] 郑欢, 孟丽岩, 张佳辉, 等. 基于结构谱半径的离线迭代混合试验稳定性与收敛性分析[J]. 黑龙江科技大学学报, 2025, 35(2): 262-267.
 - [13] 陈亮, 孙德锋, 卓金全. 退化情形下高斯-赛德尔迭代法的几个问题[J]. 数值计算与计算机应用, 2019, 40(2): 98-110.
 - [14] 田栋. MATLAB 基础应用与数学建模[M]. 北京: 电子工业出版社, 2025.