

六顶思考帽融入数学研讨课的教学设计与实践 ——以定积分的应用为例

鲁志波, 滕吉红, 贾瑞玲

信息工程大学基础部, 河南 郑州

收稿日期: 2026年6月17日; 录用日期: 2026年7月14日; 发布日期: 2026年7月21日

摘 要

在高等数学教学改革不断深化的背景下, 为进一步提升学员的协同思考与问题解决能力, 将六顶思考帽理论融入“定积分的应用”研讨课教学设计。首先解构六顶思考帽理论的核心内涵与高等数学课程的重要特质, 明确二者在思维训练、知识探究等方面的契合性; 进而从教学内容分析、教学目标设定、教学实施流程三个维度, 构建完整的教学设计方案; 最后通过教学反思审视实践成效与现存问题, 为高等数学课程教学改革提供新思路。实践表明, 该教学设计有助于打破传统教学局限, 优化研讨课结构, 提升研讨课的教学质量, 促进学员对定积分应用知识的深度理解与灵活运用, 促使学生从被动接受转向主动探究知识。

关键词

六顶思考帽, 高等数学, 研讨课, 教学设计, 定积分的应用, 波利亚解题理论

Six Thinking Hats Integrated into the Teaching Design and Practice of Mathematics Seminar

—Taking the Application of Definite Integral as an Example

Zhibo Lu, Jihong Teng, Ruiling Jia

Department of Basic Courses, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: June 17, 2026; accepted: July 14, 2026; published: July 21, 2026

Abstract

Against the backdrop of deepening reforms in advanced mathematics teaching, in order to further

文章引用: 鲁志波, 滕吉红, 贾瑞玲. 六顶思考帽融入数学研讨课的教学设计与实践[J]. 教育进展, 2026, 16(7): 1098-1105. DOI: 10.12677/ae.2026.1671474

enhance students' collaborative thinking and problem-solving abilities, the Six Thinking Hats theory is integrated into the teaching design of the seminar on "Application of Definite Integrals". Firstly, the core connotations of the Six Thinking Hats theory and the essential characteristics of advanced mathematics courses are deconstructed to clarify the compatibility between the two in terms of thinking training and knowledge exploration. Subsequently, a complete teaching design scheme is constructed from three dimensions: teaching content analysis, teaching objective setting, and teaching implementation process. Finally, the practical effectiveness and existing problems are examined through teaching reflection, providing new insights for the reform of advanced mathematics teaching. Practice has shown that this teaching design helps break the limitations of traditional teaching, optimize the structure of seminars, improve the teaching quality of seminars, promote students' in-depth understanding and flexible application of definite integral knowledge, and facilitate the shift from passive reception to active knowledge exploration.

Keywords

Six Thinking Hats, Advanced Mathematics, Seminar, Teaching Design, Application of Definite Integrals, Polya's Problem-Solving Theory

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

“高等数学”作为工科各专业的核心基础课程[1], 不仅承担着传递极限、微积分等核心知识的任务, 更肩负着培育学员逻辑推理、抽象思维与问题解决能力的使命。在学员在以高考为指挥棒的中学数学学习中, 习惯被动接受, 缺乏主导探究, 往往会陷入“重计算、轻思考”“重结论、轻过程”“重输入、轻输出”的认知误区。大学数学教学中, 针对特定内容会适度采取研讨式的教学模式, 这种教学模式虽然强调学员的主体地位, 但由于缺乏科学的思维引导工具, 常常出现讨论方向涣散、思维深度不足、观点碰撞流于表面等问题, 难以实现深度学习的教学目标。

随着高等教育教学改革的不深入, “思维能力提升”成为大学数学教学的核心诉求之一[2]。六项思考帽(Six Thinking Hats), 简称帽子思维, 作为一种实用的思维可视化工具, 由爱德华·德·波诺提出, 通过六种不同颜色帽子代表六个思维维度, 引导思考者有序切换思维视角, 实现全面、系统、深入的思考[3]。文献[4] [5]将这种思维工具应用于高中语文和商科课程教学中, 文献[6]对帽子思维在数学教学中的应用现状进行了分析。在传统的研讨课中, 人们往往会同时进行多种思考, 容易导致讨论陷入争吵或片面性[7]。将帽子思维引入高等数学研讨课, 可有效破解传统研讨课思维混乱、深度不足的难题, 为高等数学乃至其它数学课程教学模式改革提供新路径, 助力核心素养培养目标的落地。

论文聚焦高等数学研讨课这一特定教学场景, 结合课程高度抽象性、严密逻辑性的特点, 构建基于六项思考帽的研讨式教学模式, 进而针对高等数学中的核心难点内容进行具体教学设计, 细化教学流程与实施策略, 增强教学方案的可操作性与针对性, 最后通过教学反思, 总结帽子思维在高等数学研讨课中应用效果和存在问题, 为后续教学实践提供参考。

2. 深度解构: 六项思考帽理论与高等数学课程的契合性

(一) 六项思考帽理论的核心内涵

六顶思考帽是一种水平思维工具，通过六种颜色的帽子划分不同的思维功能，引导思考者摆脱单一思维模式的局限，实现全面、多维度的思考。六种颜色帽子对应的思维功能如表 1 所示。

Table 1. Framework of the six thinking hats theory
表 1. 六顶思考帽理论框架

思考帽颜色	思维功能	主要特点
白色	客观事实	聚焦数据、信息与已知事实，强调客观中立
红色	情感直觉	关注个人感受、直觉与判断，鼓励表达主观体验
黑色	批判质疑	从风险、缺陷、逻辑漏洞的角度进行批判性思考
黄色	积极肯定	聚焦优势、价值与积极影响，挖掘积极因素
绿色	创新发散	鼓励大胆想象、提出新观点、新方法与新路径
蓝色	统筹协调	负责规划思考过程，明确思考目标、流程与总结归纳

(二) 高等数学课程的重要特质

“高等数学”课程[2]具有三大重要特质：一是抽象性强，课程以严密的极限理论为核心思想，涉及的函数极限、定积分、级数等概念均具有高度的抽象性，需要学员具备较强的抽象思维能力；二是逻辑性严谨，课程知识体系环环相扣，从定义到定理、从推理到证明，每一个环节都要求逻辑严密，不容许有任何逻辑漏洞；三是应用性广，高等数学的理论与方法是解决物理、工程、经济等领域实际问题的重要工具，需要学员具备将实际问题转化为数学问题的能力。高等数学的这些特点决定了其研讨课教学必须引导学员既要精准把握客观的知识与逻辑，又要敢于质疑、勇于创新；既要深入理解理论内涵，又要关注理论的实际应用价值，这与六顶思考帽的多维度思考理念高度契合。

(三) 二者契合性的深度结构

知识建构与白色帽子的契合：高等数学的知识建构需要以客观的定义、公理、定理为基础，白色帽子强调客观事实与信息梳理，可引导学员在研讨前精准梳理相关知识要点，为研讨奠定坚实的知识基础。例如在研讨“定积分的定义”时，白色帽子可引导学员梳理定积分定义的产生背景、核心要素、表述形式等客观信息，避免因知识掌握不扎实导致研讨偏离主题。

逻辑推理与黑色帽子的契合：高等数学的定理证明、问题求解过程要求逻辑严密，黑色帽子的批判质疑思维可引导学员在研讨中主动发现推理过程中的逻辑漏洞、方法缺陷，提升思考的严谨性。例如在研讨“六个实数基本定理的等价性证明”时，黑色帽子可引导学员思考证明方法的合理性、适用条件的严谨性，以及是否存在其他更优的证明思路。

创新思维与绿色帽子的契合：高等数学的学习不仅需要掌握现有知识，更需要培养创新思维，绿色帽子鼓励发散思考、提出新观点，可引导学员在研讨中突破传统思维定式，探索新的解题方法、拓展知识的应用场景。例如在研讨“积分不等式的证明”时，绿色帽子可引导学员尝试不同的证明思路，如利用函数单调性、中值定理、泰勒公式等多种方法，培养创新思维能力。

价值挖掘与黄色帽子的契合：高等数学中的很多理论知识都兼具理论价值与应用价值，黄色帽子强调挖掘积极价值，可引导学员在研讨中深入思考知识的内涵价值、应用价值，提升对课程的认知与学习兴趣。例如在研讨“无穷级数”相关内容时，黄色帽子可引导学员思考级数在近似计算、信号处理等领域的应用价值，理解知识的实际意义。

情绪调节与红色帽子的契合：高等数学的抽象性与难度容易导致学员产生畏难情绪，红色帽子鼓励表达主观感受，可帮助教员及时掌握学员的学习情绪，调整教学策略，同时引导学员正视自身的情绪状

态，增强学习信心。

研讨组织与蓝色帽子的契合：研讨课的高效开展需要明确的目标与有序的流程，蓝色帽子负责统筹协调，可引导学员明确研讨目标、规划研讨流程、总结研讨成果，确保研讨有序、高效进行。

(四) 理论整合：六顶思考帽与数学问题解决框架的深度耦合

本文进一步将其与波利亚解题四步骤(理解题意→拟定方案→执行方案→回顾反思)及数学建模循环(现实问题→数学模型→数学求解→现实解释→模型修正)进行深度整合。

Table 2. Mapping relationship between the six thinking hats and the theory of mathematical problem solving
表 2. 六顶思考帽与数学问题解决理论的映射关系

思考帽颜色	波利亚解题四步骤	数学建模循环	核心认知功能
白色	理解题意	现实问题描述	提取客观信息，夯实建模起点
红色	理解题意(直觉激活)	假设提出	显性化直觉判断，为理性分析提供素材
黄色	拟定方案(价值评估)	模型构建	挖掘方案优势与积极价值
黑色	拟定方案(逻辑检验)	模型检验与修正	暴露逻辑漏洞与风险
绿色	回顾反思(推广迁移)	模型修正与拓展	突破当前方案，探索新路径
蓝色	全程贯穿(元认知监控)	全程管理	统筹目标、过程与总结，确保逻辑连贯

表 2 中各帽子对应的理论环节并非机械分割，而是各有侧重——白、黑二帽侧重于数学的严谨性维度，黄、绿二帽侧重于数学的创造性维度，蓝帽则负责二者的统筹协调。这种“严谨－创造－统筹”的三维结构，与高等数学课程“抽象性、逻辑性、应用性”三大特质形成深层次呼应，为六顶思考帽在数学研讨课中的嵌入提供了坚实的理论支点。

通过这一整合，六顶思考帽不再是孤立的讨论规则，而是与数学思维内生规律高度同构的认知工具；每一顶帽子的切换，恰对应数学问题解决中一个必要的认知操作节点，从理论根源上解释了其提升研讨深度的有效性。

3. 基于六顶思考帽的“定积分的应用”研讨课教学设计

(一) 教学内容分析

“定积分的应用”是“高等数学”课程中连接理论知识、思想方法和实际应用的重要载体，是学员理解“微元法”思想、提升数学应用能力的核心环节。这部分的重点是遵循定积分的核心思想，将实际问题转化为定积分问题进行求解，主要包括平面图形的面积、旋转体的体积、平面曲线的弧长、变力做功等具体应用场景。从教学难点来看，学员虽然已经掌握了定积分的定义与计算方法，但在将实际问题抽象为定积分模型、准确选取微元并确定积分上、下限时仍然存在较大困难。传统的研讨课中，学员往往因思维混乱、不知从何入手而导致研讨效率低下，为了破解这一教学困境引入“六顶思考帽”这种可视化思维工具，通过不同颜色帽子引导学员有序展开思维，可有效突破教学难点。

(二) 教学目标设定

根据核心素养培养要求，结合教学内容特点，设定以下教学目标：

知识目标：掌握微元法的核心思想，能够运用定积分解决平面图形面积、旋转体体积等实际问题；理解不同应用场景下定积分模型的构建逻辑。

能力目标：通过六顶思考帽的引导，提升逻辑推理能力、抽象建模能力、批判性思维能力与团队协作能力；培养多角度思考问题、创新解决问题的能力。

情感目标：感受高等数学与实际问题的紧密联系，提升学习数学的兴趣与主动性；正视学习过程中的困难，增强解决问题的信心。

(三) 教学实施流程

依托电子信息工程专业班的高等数学教学任务，将六项思考帽贯穿于研讨课的“预习梳理－分组研讨－成果展示－总结提升”四个环节，具体流程如下：

1) 课前预习：白色帽子主导，梳理基础信息

设计线上预习任务单，明确预习内容(定积分的定义、微元法的基本思想、常见的定积分应用场景)；制作帽子思维引导卡片(六种颜色帽子对应的思维要求与提问方向)；选取典型研讨案例(平面图形面积的计算、旋转体体积的计算)；准备多媒体教学课件、研讨记录表。教员通过线上教学平台发布预习任务单，引导学员以白色帽子思维为主，梳理以下基础信息：定积分的定义与核心思想；微元法的定义、微元法的步骤及适用条件；教材中关于定积分应用的例题与解题思路；自己在预习过程中遇到的疑问。学员完成预习任务单后，上传至线上平台，教员提前查看，了解学员的知识掌握情况与疑问点，调整研讨案例与引导策略。

2) 课中导入：蓝色帽子主导，明确研讨目标

教员以生活中的实际问题(如“如何计算不规则草坪的面积”“如何计算矿泉水瓶的体积”)导入，引发学员思考，引出本节课的研讨主题——“定积分的应用”。随后，由教员扮演蓝色帽子角色，明确本节课的研讨目标：掌握微元法构建定积分模型的方法；能够运用定积分解决平面图形面积、旋转体体积的计算问题；学会运用帽子思维进行多角度思考与高效研讨。同时，简要回顾帽子思维的六种维度，明确各小组在研讨过程中需有序切换帽子思维。

3) 分组研讨：六顶帽子协同，深度思考探究

将学员分为2个研讨小组，每组发放帽子思维引导卡片，每组选取一个研讨案例，分别为平面图形的面积和旋转体的体积，按照“白色帽子－红色帽子－黄色帽子－黑色帽子－绿色帽子－蓝色帽子”的顺序展开研讨，具体要求如下：

第一步：白色帽子环节，对应波利亚“理解题意”阶段，为建模循环提供初始信息输入。小组内梳理与案例相关的客观信息，如案例的已知条件、需要求解的问题、涉及的定积分知识、微元法的应用步骤等。记录员整理梳理结果，确保信息准确、全面。

第二步：红色帽子环节，激发建模循环中的“假设提出”，使前逻辑思维显性化。小组内成员表达对该案例的主观感受，如“这个案例的难点在哪里”“自己对哪个环节最困惑”“觉得微元法最难掌握的是哪一步”等，教员巡视各小组，及时关注学员的情绪状态，对有畏难情绪的学员进行引导。

第三步：黄色帽子环节，与黑色帽共同构成波利亚“拟定方案”中的价值评估维度。小组内讨论该案例的价值，如“掌握这个案例的解题方法有什么意义”“微元法在解决实际问题中有什么优势”“这个案例与生活中的哪些场景相关”等，提升学员对教学内容的价值认知。

第四步：黑色帽子环节，对应波利亚“拟定方案”中的逻辑检验，驱动建模循环中的模型修正。小组内对初步的解题思路进行批判质疑，如“这个微元的选取是否合理”“积分上下限的确定是否准确”“解题过程中存在哪些逻辑漏洞”“是否有遗漏的条件”等，通过批判质疑完善解题思路，提升逻辑严谨性。

第五步：绿色帽子环节，对应波利亚“回顾反思”阶段的推广迁移，实现建模循环的拓展。小组内围绕完善后的解题思路，进行发散思考，如“是否有其他的微元选取方式”“是否有更简便的计算方法”“这个解题思路能否推广到其他类似问题中”等，培养创新思维。

第六步：蓝色帽子环节，波利亚解题全程的元认知监控，确保建模循环各环节的连贯性。由小组内的蓝色帽子引导者总结研讨过程，梳理最终的解题思路与结论，明确研讨过程中存在的问题与改进方向，

填写研讨记录表。

教员在各小组研讨过程中,扮演观察者与引导者的角色,巡视各小组研讨情况,对研讨方向偏离、思维卡壳的小组进行针对性引导,如针对黑色帽子环节思维不足的小组,提出“如果微元选取过大,会对结果产生什么影响”等问题,激发批判性思考。

4) 成果展示:蓝色帽子主导,多元点评提升

每个小组进行成果展示,由小组内的蓝色帽子引导者汇报研讨过程、最终解题思路与结论。其它小组成员在倾听过程中,可结合黑色帽子、绿色帽子思维进行提问与补充。教员作为蓝色帽子的补充者,对各小组的成果进行点评,既要肯定各小组的优点(如思维全面、逻辑严谨、创新点突出等),也要指出存在的问题(如微元选取不合理、积分上下限确定错误、研讨流程不清晰等),并引导全体学员总结定积分应用的核心思路与微元法的关键步骤。

5) 总结提升:蓝色帽子主导,梳理知识体系

教员引导全体学员以蓝色帽子思维为主,总结本节课的核心内容:定积分应用的核心思想是微元法,其关键步骤是“分割-近似-求和-取极限”;运用六项思考帽可有序展开多角度思考,提升研讨效率与思维深度;解决定积分应用问题的关键是准确构建数学模型,选取合理的微元与积分上下限。同时,教员针对学员研讨过程中存在的共性问题,进行重点讲解与补充,梳理知识体系,强化知识记忆。

6) 课后拓展:六项帽子拓展,深化知识应用

教员通过线上平台发布拓展任务:一是选取生活中的一个实际问题(如变力做功、液体压力的计算),在六项思考帽的指导下进行小组研讨,撰写研讨报告;二是整理本节课的学习笔记与研讨心得,反思自己在研讨过程中的表现与收获,学员完成后上传至线上平台,教员进行批改与反馈。

4. 教学反思与问题审视

(一) 教学实践成效反思

通过课堂观察、学员访谈、作业分析等方式进行效果评估,取得了以下成效:

1) 学员研讨效率显著提升。学员在六项思考帽的引导下,研讨目标更明确、流程更有序,能够快速聚焦核心问题展开思考,避免了传统研讨课中“泛泛而谈”“偏离主题”的问题。

2) 学员思维能力明显增强。通过对学员作业与研讨报告的分析发现,学员在定积分应用问题的建模能力、逻辑推理能力上均有明显提升,能够从多个角度思考问题,提出的解题思路更具创新性与严谨性。访谈中学员表示,六项思考帽帮助自己学会了有序思考,能够更全面地分析问题。

3) 学员学习兴趣与主动性提升。学员能够主动地参与研讨过程,积极表达自己的观点与疑问,课后拓展任务的完成质量与提交率较高。学员普遍反映,六项思考帽让研讨课更有趣、更有挑战性,能够感受到自己的思维在不断提升。

4) 教员教学引导更精准。六项思考帽的结构化特点让教员能够更清晰地把握学员的思维过程,及时发现学员存在的问题,进行针对性引导,提升了教学的精准性与有效性。

(二) 教学实践中存在的问题

尽管教学设计取得了一定的成效,但在实践过程中仍存在以下问题:

1) 思维切换的认知负荷与形式化倾向。结合各小组的研讨情况,发现学员在思维切换时存在明显的“卡顿”现象,具体表现为:在从“白色帽”(客观信息)向“黑色帽”(批判质疑)过渡时,平均需要45~60秒的静默期,学员难以快速从“接收模式”切换至“质疑模式”。这导致部分小组的黑色帽子环节流于形式,学员提出的质疑多停留在“这个方法对吗”的浅层,而难以深入到“微元选取的近似误差如何传递到积分结果”等本质问题。绿色帽子环节同样存在“创新焦虑”,部分学员在访谈中表示“知道要创新,

但不知道如何入手”，导致该环节常陷入沉默或重复已有思路。

2) 角色固化与群体思维抑制。量化的小组互评数据显示，基础较好学员在研讨中占据主导地位，而其余成员多集中于“同意”或“补充细节”。蓝色帽子引导者的统筹能力差异显著：能力强的引导者能自然衔接各帽顺序并适时追问，能力弱的引导者则机械执行流程，当小组陷入思维僵局时(如在黑色帽环节找不到逻辑漏洞)，无法通过有效提问激活讨论，导致研讨效率断崖式下降。

3) 认知加工深度与课时容量的结构性矛盾。学员要高质量地完成六项帽子的完整思维循环，平均需要 35~40 分钟，而课堂仅能提供 25 分钟左右的分组研讨时间。时间压力迫使部分小组压缩“黑色帽”与“绿色帽”这两个高阶思维环节，以牺牲批判与创新为代价完成流程。课后作业分析也印证了这一点：被压缩的小组在解决变力做功等迁移性问题时，建模错误率更高一些，远高于完整完成思维循环的小组的错误率。

5. 结论与展望

将六项思考帽理论与方法引入“高等数学”研讨课教学，通过理论契合性分析与“定积分的应用”专题的具体教学设计，验证了六项思考帽在提升高等数学研讨课教学质量、培养学员思维能力方面的有效性。实践表明，基于六项思考帽理论的研讨课教学设计能够使研讨过程更有序、思维更全面、深度更足够，有助于提升学员的逻辑推理能力、抽象建模能力与团队协作能力，符合核心素养导向下高等数学教学改革的要求。

不过，实践中也发现帽子思维在应用过程中存在一些不足，针对不足，采取以下精准化干预策略：

1) 针对思维切换卡顿：设计课前 5 分钟微型训练，选取非数学情境(如“食堂排队问题”)进行“白→黑→绿”快速切换练习，降低认知惯性；同时开发“卡点”提示卡，在黑帽环节预设追问清单(如“近似误差取极限后是否消失？”“积分区间划分是否覆盖全部边界？”)，为批判性思考提供脚手架。

2) 针对角色固化：实施轮值蓝色帽制度，每次研讨更换引导者并提供话术模板(如“是否考虑了所有已知条件？”“有无相反视角？”)；同时设定发言配额，确保每位成员在每个帽子环节至少独立发言 1 次。

3) 针对时间矛盾：将白帽信息梳理前置为线上预习任务(提交思维导图)，课堂以蓝帽快速核查，将节省的 8~10 分钟重新分配给黑帽与绿帽环节；同时采用“精研一例，迁移一例”策略——首例完整走完六帽流程，次例仅进行“白→黑→绿→蓝”高阶循环，以保障思维深度。

上述干预策略旨在推动六项思考帽从“课堂规则”内化为学员的自主认知习惯，实现思维训练由形式嵌入向本质内化的跨越。后续可将该模式拓展至高等数学其他核心内容及更广泛的数学研讨课，进一步检验其普适性，持续赋能学员高阶思维能力发展。

基金项目

信息工程大学教育教学研究课题(项目编号 JXYJ2026C013)。

参考文献

- [1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 教育部高等学校数学类专业教学指导委员会. 高等学校数学类专业核心课程教学指南[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [3] 德·波诺. 六项思考帽[M]. 冯杨, 译. 北京: 中信出版社, 2018.
- [4] 王艳. 六项思考帽在高中语文研讨课中的应用研究[J]. 教育理论与实践, 2020, 40(26): 57-59.

-
- [5] 李丽. 基于六顶思考帽的商科课程小组研讨教学模式设计[J]. 高等财经教育研究, 2021, 24(3): 56-60.
 - [6] 张敏. 六顶思考帽在数学教学中的应用现状与展望[J]. 数学教育学报, 2022, 31(2): 89-94.
 - [7] 刘影. 核心素养导向下高等数学研讨课教学模式创新[J]. 大学数学, 2021, 37(4): 10-14.