

从拉格朗日乘数法到KKT条件的高等数学约束优化思想教学改革研究

谢玉荣*, 陈 诚, 赵 俊, 师白娟

西安邮电大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2026年6月20日; 录用日期: 2026年7月17日; 发布日期: 2026年7月24日

摘 要

传统高等数学中拉格朗日乘数法教学常止步于等式约束求解, 造成约束优化思想的认知断裂。本文以构建拉格朗日乘数法到KKT条件的衔接逻辑为主线, 提出贯通式教学设计: 通过逐层拓展的案例揭示从等式约束到不等式约束下梯度共线与互补松弛的几何本质, 并借助AI工具承担复杂计算与可视化, 将认知重心从计算操作转向优化思想的内化。该教学设计旨在帮助学生建立起条件极值→最优性条件→约束优化的认知脉络, 为机器学习等前沿课程提供思维接口, 探索AI时代高等数学深度教学的一条可复用路径。

关键词

高等数学, 拉格朗日乘数法, KKT条件, 约束优化思想, 贯通式教学

Research on Teaching Reform of Constrained Optimization Thinking in Advanced Mathematics: From the Lagrange Multiplier Method to the KKT Conditions

Yurong Xie*, Cheng Chen, Jun Zhao, Baijuan Shi

School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an Shaanxi

Received: June 20, 2026; accepted: July 17, 2026; published: July 24, 2026

Abstract

Traditional teaching of the Lagrange multiplier method in advanced mathematics often ends with

*通讯作者。

文章引用: 谢玉荣, 陈诚, 赵俊, 师白娟. 从拉格朗日乘数法到 KKT 条件的高等数学约束优化思想教学改革研究[J]. 教育进展, 2026, 16(7): 1431-1437. DOI: 10.12677/ae.2026.1671517

solving equality-constrained optimization problems, which results in a fragmented understanding of constrained optimization. Taking the logical transition from the Lagrange multiplier method to the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions as the main thread, this paper proposes an integrated teaching design. Through a sequence of progressively extended cases, the design reveals how gradient parallelism and complementary slackness extend their geometric interpretation from equality constraints to inequality constraints. AI-based tools are employed to handle complex computations and visualization, shifting the cognitive focus of students from mechanical calculations to the internalization of optimization concepts. The proposed design helps students establish a coherent cognitive framework linking conditional extrema, optimality conditions and constrained optimization. It further provides a cognitive bridge to advanced courses such as machine learning and explores a replicable model for deep teaching in advanced mathematics in the AI era.

Keywords

Advanced Mathematics, Lagrange Multiplier Method, KKT Conditions, Constrained Optimization Thinking, Integrated Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高等数学是工科及理科专业的核心基础课程，其教学质量直接影响学生的数学素养与后续专业课程的学习能力。在多元函数微分学中，拉格朗日乘数法是约束极值问题的重要求解工具，也是学生首次系统接触约束优化思想的认知节点。从无约束优化到约束优化的过渡，不仅涉及求解方法的变化，更涉及对最优性条件及约束作用的理解。

当前高等数学教学中拉格朗日乘数法的处理普遍存在两方面局限。其一，重计算、轻几何。课堂教学主要集中于拉格朗日函数构造与方程组求解，学生对核心条件 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 的理解多停留于符号操作层面，未能建立等高线与约束曲线相切的几何直觉。这一缺失直接阻碍了从等式约束向不等式约束的认知延伸[1][2]。其二，重等式、轻拓展。教学通常止步于等式约束极值求解，不等式约束及 KKT 条件鲜有涉及。二者在教学处理中被分割为孤立的知识片段，学生难以形成从条件极值到一般约束优化的完整认知结构[3][4]。这种割裂式学习状态不仅影响了优化思想的系统理解，也削弱了在工程优化与数据分析中的迁移能力。这一教学困境并非国内独有，国际数学教育研究同样关注此类问题。Arcavi 指出，可视化表征在数学概念学习中具有不可替代的作用，几何直观的缺失会使理解滞留于操作层面[5]。

针对上述问题，国内教学改革研究逐渐强调知识结构的系统性，主张以知识链条化和思想贯通化替代孤立知识点讲授[6][7]。在国际数学教育研究中，Niss 提出的数学能力框架强调数学学习应体现结构性思维与迁移能力的发展，而不仅是程序性技能的积累[8]。Simon 的“关键发展性理解”理论与此呼应，指出关键概念节点的断裂将阻碍后续知识建构[9]。Landgärds-Tarvold 与 Göller 进一步从优化教学角度提出，拉格朗日乘数法教学应强化其几何意义与约束结构之间的联系，推动学生从算法执行转向思想理解[10]。上述研究共同表明：约束优化教学的关键不在于求解方法本身，而在于如何建立等式约束与不等式约束之间的连续认知结构。拉格朗日乘数法与 KKT 条件正是这一连续性在不同约束形态下的具体体现。前者以梯度共线条件处理等式约束，后者通过互补松弛条件与乘数符号限制将其推广至不等式约束，二者共同构成约束优化理论的基础框架[11][12]。因此，在高等数学教学中构建二者之间的逻辑衔接，并非

增加超纲内容，而是还原知识体系的内在连续性。

AI 工具为这一教学重构提供了支持。不等式约束问题的方程组求解因变量增多而趋于繁琐，几何关系的呈现也受限于静态板书。借助计算工具与可视化技术承担符号求解和图形生成，可将认知资源从操作负担中释放，聚焦于优化思想的理解与内化[13][14]。这一支持并非替代数学思维，而是为思维深化创造条件。

基于上述分析，本文以拉格朗日乘数法到 KKT 条件的衔接逻辑为主线，构建约束优化思想贯通式教学模式。通过案例递进与几何分析结合，将等式约束、变量边界约束与一般不等式约束纳入统一分析框架，引导学生形成“条件极值→最优性条件→约束优化”的认知结构。区别于侧重单一知识点改进的既有研究，本文聚焦等式约束与不等式约束之间的教学衔接，强调约束优化知识结构的连续呈现，为高等数学优化内容教学提供可操作的设计路径。

2. 教学问题分析

当前高等数学中拉格朗日乘数法的教学，在知识传授与思维培养之间存在三方面断裂。

首先，几何表征弱化。理论上，拉格朗日乘数法的本质在于目标函数等值线与约束曲线在最优点处相切，对应梯度共线这一核心几何关系。但在课堂教学中，内容通常以拉格朗日函数构造与方程求解为主，强调代数推导的规范性，而对几何结构与直观解释关注不足。这种代数主导的教学方式削弱了学生对约束极值几何机制的理解。

其次，知识结构割裂。拉格朗日乘数法主要用于等式约束问题，而 KKT 条件将其推广至不等式约束情形，二者本质上是同一优化思想在不同约束条件下的递进表达。然而在现行课程体系中，两者往往被分置于不同教学阶段处理，使学生难以把握其理论连续性，容易将其误解为独立方法体系，从而导致约束优化知识结构碎片化。

再次，优化思想内化不足。学生通常能够按照既定步骤完成标准题型求解，但对最优性条件的来源及其推广机制缺乏理解，也难以将方法迁移至非标准问题或实际应用场景。这种以程序性操作为主导的学习方式，使约束优化思想难以内化为稳定且可迁移的认知结构。

上述问题相互关联并形成叠加效应：几何直观的缺失削弱理论理解的直觉基础，知识结构的割裂强化了程序化学习倾向，而思想内化不足则是前两者共同作用的结果。因此，有必要在教学设计中重建约束优化的连续认知结构，将几何直观、逻辑推导与应用迁移整合为统一的学习路径。

3. 贯通式教学设计与实施

针对上述教学问题，本文以从拉格朗日乘数法到 KKT 条件的内在逻辑衔接为主线，构建约束优化思想贯通式教学设计，通过逐层递进的知识结构，实现从等式约束到不等式约束的自然过渡，从而形成统一的约束优化认知框架。

3.1. 等式约束下拉格朗日乘数法的几何重构

在等式约束条件下，考虑优化问题：

$$\max f(x), \text{ s.t. } g(x) = 0.$$

构造拉格朗日函数：

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x).$$

其一阶最优性条件为：

$$\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*), \quad g(x^*) = 0.$$

教学实施中，本节分三步展开。第一步，引导学生手动完成建模与一阶条件推导，确保其掌握构造

拉格朗日函数的核心技能。第二步，将非线性方程组求解交由 AI 完成，节省课堂时间。第三步，借助 AI 工具生成目标函数等值线与约束曲线的相切图，标出两函数梯度方向，引导学生观察并归纳：在最优点处，等值线与约束曲线相切，梯度方向满足共线关系。由此，使学生的理解从代数操作上升至几何层面，建立“最优性条件 = 几何结构约束”的基本认知。

3.2. 不等式约束扩展与 KKT 条件引入

在等式约束基础上，引入一般不等式约束优化问题：

$$\max f(x), \quad \text{s.t. } g_i(x) \leq 0, i=1,2,\cdots,m.$$

其 KKT 条件可表述为：

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0, \\ g_i(x^*) &\leq 0, \lambda_i \geq 0, \lambda_i g_i(x^*) = 0. \end{aligned}$$

教学中应重点强调互补松弛条件：

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0.$$

教学中重点阐释互补松弛条件 $\lambda_i g_i(x^*) = 0$ 的结构含义：当约束不起作用时， $g_i(x^*) < 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ ；当约束起作用时， $g_i(x^*) = 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0$ 。

为强化理解，将等式约束与不等式约束的最优性条件并列对比，引导学生发现：等式约束是 $g(x) = 0$ 恒成立的特例，此时互补松弛自动满足， λ 的符号限制随之解除。由此使学生理解，KKT 条件并非新增公式体系，而是拉格朗日乘数法在不等式约束下的自然推广，其本质仍是约束激活与最优性结构之间的统一关系。

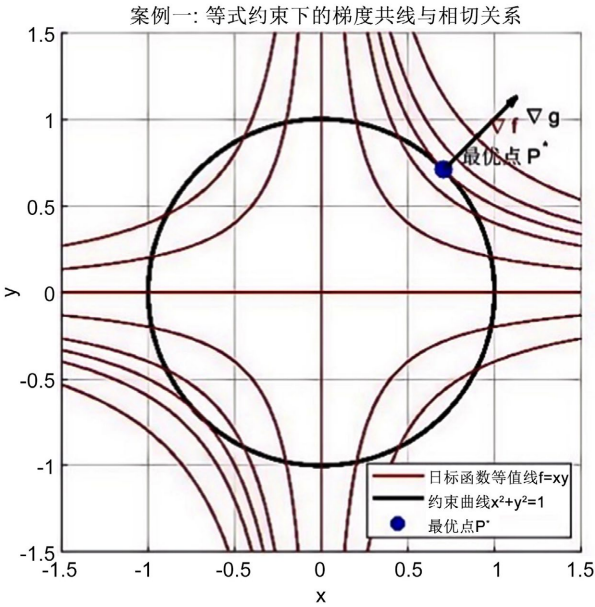


Figure 1. Gradient collinearity and tangency under equality constraints
图 1. 等式约束下的梯度共线与相切关系

3.3. 递进式案例驱动的知识贯通

为强化学生对优化思想的整体把握，构建由浅入深的三阶段案例链，各阶段共用同一问题背景，通

过逐步修改约束条件，展现方法演进的逻辑脉络。

案例一(等式约束): 求解 $\max f(x,y)$ ，约束为 $x^2 + y^2 = 1$ 。教学要点: 完整呈现建模与求解过程，AI 工具辅助求解方程组并生成等值线与单位圆约束的相切图(如图 1)，引导学生观察梯度共线关系，理解乘数 λ 度量约束松紧对最优值的影响。

案例二(变量边界约束): 在案例一基础上增加 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 的变量边界。教学要点:

- 引导学生分析可行域变化，是否最优解仍在内点还是移至边界?
- 若边界约束生效，乘数符号如何判定?
- AI 工具生成可行域阴影图与梯度方向标注，直观展示边界解与内部解的几何差异(如图 2)。

案例三(一般不等式约束): 求原点分别到区域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 内一点及区域外一点的距离最小值。教学要点: 两个子案例分别对应内部解(约束无效, $\lambda = 0$)与边界解(约束生效, $\lambda > 0$) (如图 3)。将三种情形的最优性条件归纳为统一表格，使学生理解 KKT 条件是拉格朗日乘数法的自然延伸，而非独立方法。

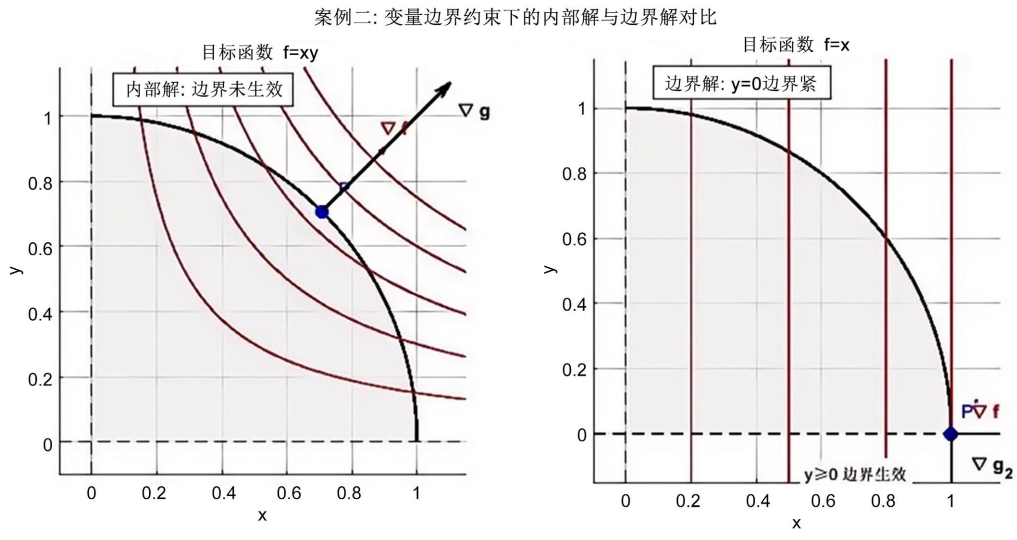


Figure 2. Comparison of interior and boundary solutions under variable bound constraints
图 2. 变量边界约束下的内部解与边界解对比

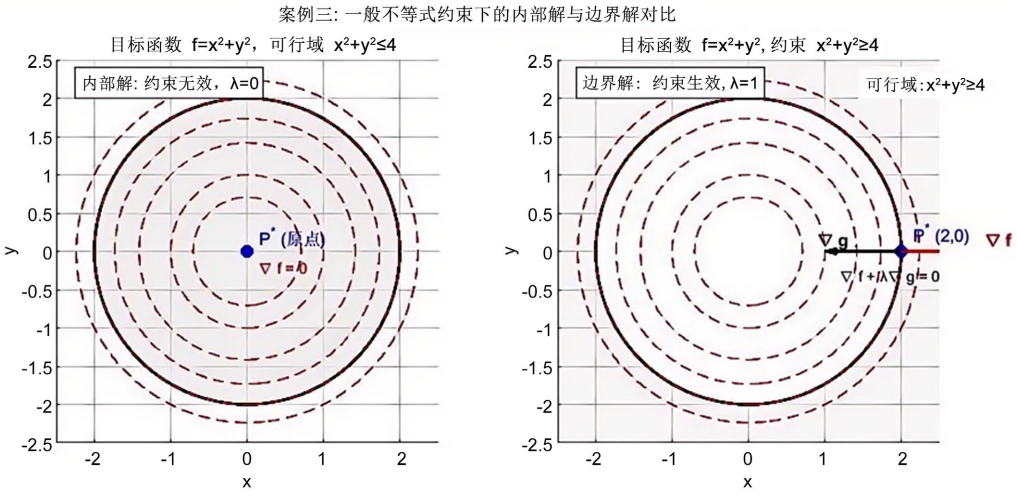


Figure 3. Comparison of interior and boundary solutions under general inequality constraints
图 3. 一般不等式约束下的内部解与边界解对比

3.4. 几何直观与计算过程的协同强化

在教学实施中,几何直观与代数推导相互配合,贯穿三个阶段。二维情形下,借助 AI 工具生成的等值线 $f(x,y)=c$ 与约束曲线 $g(x,y)=0$ 的动态变化图,使学生直观观察最优点处相切结构,理解 $\nabla f \parallel \nabla g$ 的几何本质。不等式约束阶段,通过可行域阴影图与梯度方向标注,帮助学生判断边界解与内部解的差异,为互补松弛条件的引入提供直觉支撑。

计算方面,明确 AI 工具的介入边界:建模过程与一阶条件的推导必须由学生手动完成,仅将非线性方程组求解与可视化图像生成交由 AI 处理。此举将课堂重心从繁琐计算转向优化思想的分析,使学生集中精力理解约束结构如何决定最优性条件。

通过上述四个层次的教学设计,实现了拉格朗日乘数法与 KKT 条件之间的逻辑贯通。学生在统一框架下逐步形成“条件极值→最优性条件→约束优化”的完整认知结构,从而提升其对优化思想的整体理解能力与知识迁移能力。

4. 贯通式教学改革的价值分析

贯通式教学改革将拉格朗日乘数法与 KKT 条件纳入统一分析框架,其教学价值体现在认知体系构建、优化思想内化、知识迁移能力培养与课程衔接四个层面。

第一,促进约束优化认知结构的整合。传统教学中,拉格朗日乘数法与 KKT 条件分别分布于不同课程模块,导致学生难以把握二者在最优性条件层面的统一性。贯通式设计以最优性条件的推广为主线,从等式约束下的 $\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)$ 逐步延伸至不等式约束下的 $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$ 及互补松弛条件,揭示梯度共线与互补松弛之间的内在联系,使学生形成对约束优化问题一致性的结构性认识,从而避免知识模块化割裂。

第二,深化最优性条件的几何与机制理解。传统教学将拉格朗日乘数法简化为函数构造与方程求解流程,学生对梯度共线的几何意义及最优性条件的生成机制均缺乏深入理解。贯通式教学通过可视化呈现等高线与约束曲线的相切关系,并结合约束结构对可行方向的限制分析,引导学生从几何直观与逻辑推导两个维度把握最优性条件的形成过程,使其从计算规则转化为结构结果。

第三,提升基于结构分析的迁移能力。当教学从固定解题模板转向约束结构分析后,学生能够基于可行域特征与约束类型识别问题本质,而非依赖既定算法步骤。这种从方法记忆到结构识别的转变,有助于学生在新型优化问题中自主建立求解路径,提高方法迁移的灵活性。

第四,强化课程体系的纵向衔接。拉格朗日乘数法位于高等数学多元函数部分,而 KKT 条件广泛应用于最优化方法、运筹学、机器学习等后续课程。贯通式教学在基础阶段引入其统一思想,有助于建立从条件极值到一般约束优化的过渡认知,使后续课程中的优化方法具有连续的知识基础,降低学习断层。

综上,贯通式教学改革通过统一约束优化的分析框架,实现了从方法掌握向结构理解的转变,为学生后续专业课程学习提供连续性的知识支撑。

5. 结论与展望

针对传统高等数学中拉格朗日乘数法教学存在的几何直观弱化、知识结构断裂和优化思想培养不足等问题,本文基于拉格朗日乘数法与 KKT 条件的内在联系,构建了约束优化思想贯通式教学设计。通过建立从等式约束到不等式约束的连续演化路径,将梯度共线与互补松弛纳入统一分析框架,使学生能够在同一理论框架下分析不同类型的约束优化问题。

该教学设计以最优性条件理解为核心,通过递进式案例组织与统一分析框架,使学生逐步形成对约束优化基本结构的整体认识,并提升基于约束结构分析问题的能力。同时,该设计增强了高等数学与后

续优化类课程(如最优化方法、运筹学及机器学习)之间的知识连续性,减少课程间的结构断层。从教学设计角度看,该研究对拉格朗日乘数法与 KKT 条件的教学内容进行了结构化整合,拓展了最优性条件在基础数学教学中的表达形式。其教学效果仍需通过课堂实践与学习评价进一步验证。未来研究可结合教学实验数据对学习成效进行量化分析,并进一步探讨该教学模式在高等数学其他知识模块中的适用性。

基金项目

西安邮电大学教学改革研究项目: AI 赋能基础课程教学的智能化支持体系建设与实践(项目编号: JGZX202506); “智”理基础,“类”育英才-AI 赋能数理基础课程分类教学改革与实践(项目编号: JGZX202501); “技术赋能·专业适配·能力向”三位一体高等数学育人范式创新实践研究(项目编号: JGZX202502); 双线三化四阶: 高等数学“思政化、交叉化、数字化”融合创新模式研究与实践(项目编号: JGA202523); 高等数学知识图谱课程建设项目; 高等数学校级基层教学组织建设项目。

参考文献

- [1] 杨丽娜. 拉格朗日乘子法几何意义的教学设计[J]. 高等数学研究, 2023, 26(2): 49-51, 60.
- [2] 姚红梅, 卜长江, 林锰, 等. 拉格朗日乘数法教学内容改革初探[J]. 教育教学论坛, 2020(36): 197-199.
- [3] 张本鑫, 王月娥. “工程优化方法”课程约束最优性条件教学探索[J]. 电气电子教学学报, 2024, 46(6): 147-149.
- [4] 赵莉莉, 王蕾. 拉格朗日乘数法及其推广[J]. 河南财政金融学院学报(自然科学版), 2024, 33(1): 50-54.
- [5] Arcavi, A. (2003) The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 215-241. <https://doi.org/10.1023/a:1024312321077>
- [6] 杜光映. 机器学习算法驱动下的高等数学教学改革思考[J]. 科技风, 2026(11): 68-70.
- [7] 何童丽, 甘建红, 青音. 培养学科思维促高等数学课程教学改革[J]. 内江科技, 2026, 47(5): 116-118.
- [8] Niss, M. (2003) Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, Athens, 3-5 January 2003, 115-124.
- [9] Simon, M.A. (2006) Key Developmental Understandings in Mathematics: A Direction for Investigating and Establishing Learning Goals. *Mathematical Thinking and Learning*, **8**, 359-371. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_1
- [10] Landgärds-Tarvoll, I. and Göller, D. (2024) Bridging Mathematical and Microeconomic Perspectives: A Praxeological Analysis of the Lagrange Multiplier Method. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, **43**, 315-338. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrae020>
- [11] 叶香蕊. 基于拉格朗日乘数法与 KKT 条件优化问题研究[J]. 内江科技, 2025, 46(8): 25-26, 117.
- [12] 贾迪媛, 常雪. 拉格朗日乘数法在几何及偏微分方程中的应用[J]. 黑龙江科学, 2021, 12(21): 11-13.
- [13] 陈婷, 王清波. 基于 GeoGebra 的高等数学可视化教学效果研究[J]. 科教文汇, 2026(2): 116-119.
- [14] 央金措姆, 达娃玉珍. 高等数学空间解析几何教学的实践研究[J]. 秦智, 2026(3): 129-131.