

融合APOS理论和RMI原则的函数概念教学研究

——以“对数的概念”为例

孙嘉怡, 刘 熠*

内江师范学院数学与大数据学院, 四川 内江

收稿日期: 2026年7月2日; 录用日期: 2026年7月30日; 发布日期: 2026年8月6日

摘 要

对数的概念是高中数学的核心内容, 传统教学偏重定义记忆与技能训练, 学生难以经历概念的心理建构过程, 导致对对数是指数逆运算的本质理解不清。本研究以APOS理论和RMI原则为双重理论框架, 以对数的概念为例, 设计并实施了四个环节: 创设GDP情境, 试算感知认知冲突; 逆运算类比, 提炼对数本质内涵; 辨析定义性质, 固化符号运算对象; 强化概念迁移、构建完整运算体系。在此基础上, 探究了二者在概念教学中的协同机制。研究表明, APOS理论提供纵向认知建构路径, RMI原则提供横向问题转化工具, 二者融合能有效促进学生对对数概念的深度理解。该设计既落实数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养, 又自然融入课程思政, 为高中抽象概念教学提供了可操作的理论融合范式。

关键词

APOS理论, RMI原则, 对数概念, 概念教学, 教学设计

A Study on Teaching the Concept of Functions by Integrating APOS Theory and RMI Principles

—Taking the “Concept of Logarithm” as an Example

Jiayi Sun, Yi Liu*

School of Mathematics and Big Data, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan

Received: July 2, 2026; accepted: July 30, 2026; published: August 6, 2026

*通讯作者。

文章引用: 孙嘉怡, 刘熠. 融合 APOS 理论和 RMI 原则的函数概念教学研究[J]. 教育进展, 2026, 16(8): 220-232.
DOI: 10.12677/ae.2026.1681624

Abstract

The concept of logarithm is a core component of high school mathematics. Traditional teaching lays excessive emphasis on definition memorization and skill training, making it difficult for students to go through the psychological construction process of the concept, which results in their vague understanding of the essence that logarithm is the inverse operation of exponentiation. Taking the APOS theory and the RMI principle as the dual theoretical framework, this study designs a teaching case for the logarithm concept and constructs four teaching links: creating a GDP context to trigger cognitive conflict through trial calculation and perception; extracting the essential connotation of logarithm by analogy with inverse operations; discriminating definitions and properties to solidify symbolic operation objects; and strengthening concept transfer to build a complete operation system, so as to explore the collaborative mechanism of the two theories in concept teaching. The research shows that the APOS theory provides a vertical path for cognitive construction, while the RMI principle offers a horizontal tool for problem transformation. The integration of the two can effectively promote students' in-depth understanding of the logarithm concept. This design not only develops core mathematical competencies such as mathematical abstraction, logical reasoning and mathematical modeling, but also naturally integrates curriculum ideology and politics, providing an operable theoretical integration paradigm for the teaching of abstract concepts in senior high school.

Keywords

APOS Theory, RMI Principle, Logarithmic Concept, Concept Teaching, Instructional Design

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》[1](以下简称“课标”)将数学核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析六大核心素养作为育人目标的核心锚点,推动数学教学从知识本位向素养本位深度转型。数学概念是现实世界中物体的数量关系和空间形式本质属性的反映,它是数学知识的核心和数学思想方法的有效载体,正确理解和掌握数学概念是学生能力发展和提升的保证[2]。数学概念是构建数学知识体系的基石,是数学思维生成与发展的起点,概念教学则是夯实数学基础知识、发展数学思维、提升数学核心能力的关键前提,也是落实核心素养、实现立德树人根本任务的关键环节。

然而,在传统概念教学中,教师多侧重定义讲解与公式记忆,容易忽视概念的生成过程与现实应用,导致学生的认知停留在记忆层面,未能经历概念的心理建构过程。因此如何设计教学过程,使学生真正经历概念的生成、内化与对象化,是概念教学需要回应的重要问题。对数的概念作为高中数学重要的基本概念,与指数概念紧密联系,也是对数函数的学习基础,在函数中具有承上启下的关键地位。课标中明确要求学生能理解对数的概念及其运算性质,能够运用函数模型解决简单的实际问题,同时要培养学生数学抽象等核心素养。

基于此,本文以对数的概念教学为例,探索 APOS 理论与 RMI 原则在概念教学中的协同机制,通过国家发展情境创设认知冲突、借助逆运算类比建立映射观念、通过符号定义与等价转化完成对象化、回

归实际问题实现图式整合, 引导学生在完整的心理建构中理解对数的本质, 并掌握映射与反演的数学思想。本研究旨在丰富数学概念教学设计的理论融合研究, 同时为高中教学提供一份可操作的对数概念教学设计案例。

2. APOS 理论与 RMI 原则概述

2.1. APOS 理论概述

APOS 理论是杜宾斯基基于建构主义学习理论提出的数学认知学习理论, 杜宾斯基等人认为数学概念的学习需要经历操作、过程、对象、图式四个循序渐进的学习阶段, 学生在进行数学学习时思维需要通过一系列的活动, 不断形成过程, 构建学习对象, 通过它们的相互作用, 学生逐渐构建起内在的图示, 形成对数学概念的理解[3]。该理论精准贴合学生由浅入深、从具体到抽象的思维发展规律, 能够引导学生完成从外在行为感知到内在思维建构的完整认知蜕变, 为抽象数学概念的深度教学提供了科学的认知依据。

相较于传统重结论、轻过程的灌输式概念教学, APOS 理论强调学生的主动建构, 必须层层深入挖掘概念的内涵和外延, 最终实现从表层认知走向抽象本质的高阶建构, 达到图式架构的阶段, 这也是新课标中以学生为主体教学理念的集中体现[4]。APOS 理论的建构过程需经历以下 4 个阶段[5] [6]: 操作阶段以数学情境引入, 学习者通过实际动手或思维层面的初步尝试, 在直观体验中感知知识产生的背景, 积累充足的直观学习经验。进入过程阶段后, 学生不再局限于具体操作, 而是对探究过程进行归纳反思, 抓住概念的核心属性, 实现由感性经验向理性认识的跃升; 对象阶段则是将梳理得到的本质进行整合归纳, 赋予其定义符号, 使之成为一个独立、清晰的思维对象, 为后续学习提供可操作的对象; 图式阶段聚焦知识整合与迁移应用, 将新生成的概念对象与头脑中已有的其他概念、规则、图形等相互联结, 搭建完整的知识网络, 实现知识的灵活运用与迁移。

整体而言, APOS 理论构建了一套完整的数学概念认知进阶体系。如果引导学习者经历活动、过程和对象 3 个阶段后, 学习者一般就能在建构和反思的基础上形成图式, 从而理清问题情境, 获得数学概念[7]。这一循序渐进的建构逻辑, 尤其适配对数这类抽象性强、符号新颖、生成逻辑隐蔽的高中数学概念, 能够有效破解学生抽象理解薄弱、概念记忆碎片化、知识迁移困难等教学难点。

2.2. RMI 原则概述

RMI 原则即关系映射反演原则, 是数学领域极具实用性的核心转化思想方法, 该思维方法的核心逻辑, 是针对难以直接分析、直接运算的陌生数学问题与现实问题, 通过科学的数学转化手段完成问题迭代求解。徐利治[8]对 RMI 原则的基本内容进行了分析, 并对使用 RMI 原则给出了明确的步骤, 面对原问题域 R 中难以直接求解的原像 x , 先提炼出核心的数学关系, 找到一个映射, 将原问题域 R 转化为一个更容易处理的新问题域 R^* , 原像 x 被转化为映象 x^* , 在新问题域 R^* 中, 利用已有知识求解 x^* , 最后通过逆映射反演回原问题域 R , 最终得到原问题 x 的解, 见图 1。

基于 RMI 原则的观点, 若要解决生活情境中的问题, 就需要抽象出数量关系, 用数学的方法求解, 进而回归现实生活, 作出合理化的解释[9]。因此面对抽象的数学知识, RMI 原则能够有效打破学生的思维局限, 帮助学生建立化繁为简、化新为旧、化难为易的解题思维, 助力学生理解指数, 形成灵活的数学转化能力。

3. APOS 理论与 RMI 原则融合的理论基础与内在逻辑

3.1. 内在联系与结构同构

APOS 理论与 RMI 原则虽分属不同理论范畴, 却在概念教学的底层逻辑上呈现出深层的结构同构性,

这为二者的有机融合提供了学理依据。

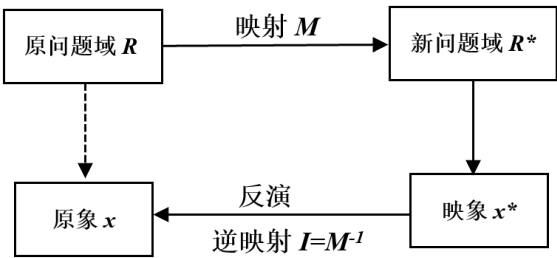


Figure 1. Framework of the RMI principle
图 1. RMI 原则框架

APOS 理论聚焦学生的认知发展规律，通过操作、过程、对象、图式四阶段，引导学生完成对数概念从具象体验到抽象建构的全过程，契合高一学生从具象思维向抽象思维过渡的认知特点，有效规避直接灌输定义、机械记忆符号的传统弊端；RMI 原则聚焦问题解决的思维路径，以化新为旧、化难为易的转化思想，精准破解对数作为指数逆运算的理解困境。二者构成“一纵一横”的互补格局：APOS 理论为对数教学提供纵向的认知进阶支架，保障概念生成的完整性与科学性；RMI 原则为探究过程提供横向的思维转化工具，确保认知推进有清晰的方法论指引。

APOS 理论四个阶段的认知进阶，为 RMI 原则的关系识别、映射建立、模型求解、反演回归的思维流程提供了对应的心理载体；反之，RMI 原则的转化逻辑也为 APOS 各阶段提供了明确的方法导向，使学生的认知建构有清晰的思维路径可循。然而，两套理论在引导认知时的侧重点存在显著差异。APOS 理论关注学生从外部操作到内部心理表征的转化过程，侧重如何建构，强调认知的纵向深化；RMI 原则关注问题从困难形态到可解形态的横向迁移，侧重如何转化，强调思维的横向联通。这一差异并非融合的障碍，而是融合的价值所在，二者从不同维度切入同一教学目标，恰可形成互补互促的动态张力，为后续教学设计提供丰富的操作空间。

3.2. 潜在适配冲突与认知负荷

APOS 理论与 RMI 原则融合模型在实际教学中可能面临双重矛盾。一方面在探究体验与思维效率方面，APOS 理论强调学生充分经历操作的试误与过程的反思，这需要充足的教学时间；而 RMI 原则强调思维效率，追求通过恰当的映射快速实现问题转化。若过度追求 RMI 的高效转化，可能压缩 APOS 理论所要求的探究空间，使学生知其然不知其所以然；若过度强调 APOS 的建构过程，又可能淡化 RMI 的方法论主线，使课堂缺乏思维聚焦。另一方面在认知负荷方面，APOS 理论要求学生同时关注概念的生成过程与心理表征的建构，RMI 原则要求学生关注问题域之间的映射关系，二者融合可能超出部分学生的认知承受能力，尤其对于基础薄弱的学生而言，既要在情境中建构概念，又要把握映射转化的思维框架。

3.3. 课堂动态平衡策略

新知生成阶段以 APOS 认知逻辑为主线，保障学生充分经历概念的发生过程，同时以 RMI 思维暗线引导探究方向，避免探究泛化。例如在 GDP 情境试算环节，教师可提前出示预设的逐年测算结果，引导学生快速聚焦已知底数和幂无法精确求指数的核心矛盾，既保留了认知冲突的感知体验，又快速推进到关系识别的思维环节。知识巩固与应用阶段以 RMI 思维方法为主线，强化映射反演的闭环训练，同时以 APOS 理论的建构逻辑完善认知体系。例如在指数式与对数式互化练习中，不仅要求学生完成形式转化，

更要引导学生总结转化的本质是同一数量关系的两种表达, 将零散的运算训练固化为稳定的认知对象, 最终纳入已有的运算体系图式中。

4. APOS 理论与 RMI 原则融合的可行性分析

4.1. 理论的互补性

APOS 理论聚焦学生的认知发展规律, 侧重解决学生如何理解抽象概念的问题, 通过操作、过程、对象、图式四阶段, 引导学生主动完成对数概念从具象体验到抽象建构的全过程, 规避传统教学直接灌输定义、机械记忆符号的弊端, 贴合高一学生从具象思维向抽象思维过渡的认知特点。RMI 原则属于数学方法论范畴, 聚焦问题解决的思维路径, 侧重解决如何化解新知难点的问题, 以化新为旧、化难为易的转化思想, 破解对数作为指数逆运算的理解困境。简言之, APOS 理论为对数概念教学提供纵向的认知进阶支架, 保障概念生成的完整性与科学性; RMI 原则为对数探究过程提供横向的思维转化工具, 通过认知递进与思维转化完成理解, 二者相辅相成, 为融合教学奠定核心理论基础。

4.2. 流程适配性

在 APOS 操作阶段, 学生依托真实情境列式试算, 感知指数方程无法直接求解的矛盾, 对应 RMI 原则的关系识别, 精准提炼出已知底数、幂求指数的核心数学关系; 在 APOS 过程阶段, 学生通过类比各类互逆运算规律归纳新知本质, 对应 RMI 原则的映射转化, 将陌生的指数求解问题转化为对数新运算模型; 在 APOS 对象阶段, 学生固化对数定义、符号与性质, 完成概念的对象化建构, 对应 RMI 原则的模型求解, 在全新的对数问题域中完成规则梳理与运算辨析; 在 APOS 图式阶段, 学生整合新旧知识、回归实际问题求解验证, 对应 RMI 原则的反演回归, 实现数学模型与现实情境的双向闭环。将二者融合应用于对数教学, 既能依托 APOS 理论让学生亲身经历对数概念的完整生成与建构过程, 解决概念理解不透彻的问题, 又能依托 RMI 原则让学生清晰体会指数与对数的映射转化关系, 解决学生思维僵化、不会迁移的问题。二者流程高度匹配, 使对数概念的生成过程既有认知层次, 又有思维逻辑。

4.3. 实践可行性

对数概念具有符号新颖、逻辑抽象、逆运算关系难理解的特点, 是高中数学概念教学的难点。单一依托 APOS 理论教学, 虽能还原概念生成过程, 让学生获得充足的探究体验, 但缺乏明确的数学思维主线, 易出现重过程、轻方法问题, 学生仅能感知概念, 却无法理解对数引入的数学本质; 单一依托 RMI 原则教学, 虽能渗透转化思想、突破解题难点, 但跳过了学生循序渐进的认知过程, 容易造成思维断层, 不符合高中生的认知发展规律。将二者融合应用于对数教学, 既能依托 APOS 理论让学生亲身经历对数概念的完整生成与建构过程, 解决概念理解不透彻的问题, 又能依托 RMI 原则让学生清晰体会指数与对数的映射转化关系, 解决学生思维僵化、不会迁移的问题。

4.4. 育人契合性

课标[1]强调数学概念教学需立足学生核心素养发展, 同时兼顾知识传授、思维培养与能力提升, APOS 与 RMI 的融合符合新课标对对数概念教学的素养要求。在对数概念教学中, APOS 理论的分层建构过程, 能够有效培育学生数学抽象、知识建构与体系整合的核心素养; RMI 原则的映射反演思维, 能够重点锻炼学生逻辑推理、数学建模与转化化归的思维能力。理论融合能够将概念建构与思维渗透贯穿全程, 让学生不仅掌握对数的知识结论, 更能理解对数产生的数学逻辑与应用价值, 真正实现从记忆知识到理解本质、活用方法的深度学习转变, 具备充分的教学可行性与育人必要性。

5. 融合 APOS 理论与 RMI 原则的教学设计

5.1. 教材分析

对数的概念选自高中数学必修第一册的内容, 是高中阶段函数模块的关键内容, 蕴含完整的数学逻辑生长脉络, 立足课标[1]培养要求, 对数的概念教学不应简单直接灌输。因此, 本课时的教学更应引导学生经历概念的发生、发展与形成过程, 感悟数学概念建构的内在逻辑。

本节课以实际问题引入, 抽象出指数方程, 类比已有逆运算体系引入新运算, 并通过符号化定义形成独立数学对象, 最后通过例题和练习巩固概念, 这一过程能够帮助学生建立更加完整的运算体系, 体会数学知识产生与发展的内在规律, 也为解决复杂数学问题提供了核心工具, 是培养学生数学抽象、逻辑推理和数学建模等核心素养的优质载体。教材的编排遵循了从具体到抽象、从特殊到一般的认知规律, 为本节课的教学设计提供了清晰的逻辑线索, 也为融合 APOS 理论与 RMI 原则进行教学提供了内在依据。

5.2. 学情分析

在知识基础方面, 高一学生已系统学习了实数指数幂的运算及其运算性质, 掌握了指数函数的概念、图像与性质, 能够熟练进行指数式的变形与计算。同时, 学生在初中阶段已经接触过加法与减法、乘法与除法、乘方与开方等互逆运算, 对已知结果与部分元素求另一元素的逆运算思想有一定经验。这些知识储备为本节课类比引入对数概念提供了必要的认知基础。

在认知特点方面, 高一年级学生正处于从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的关键时期, 具备一定的归纳概括能力和类比迁移能力, 乐于参与探究活动, 愿意尝试解决具有挑战性的问题。但抽象思维能力尚未完全成熟, 对于全新的符号容易产生距离感和畏难情绪, 需要借助熟悉的情境和类比来降低认知负荷。

在实际教学中, 面对对数这一较为抽象的数学概念, 学生容易停留在表面记忆层面, 难以深入理解对数的本质内涵, 无法真正把握对数与指数之间的等价关系; 同时, 尽管学生熟悉加法与减法、乘法与除法等互逆运算关系, 但将这种逆运算思想迁移到指数运算中仍存在障碍。因此教师可以结合实际生活和层层类比探究, 引导学生突破重难点。

5.3. 基于 APOS 理论与 RMI 原则的教学思路

在对数概念的教学中, APOS 理论与 RMI 原则并非独立存在, 而是相辅相成的有机整体, 共同支撑学生完成抽象概念的深度学习与思维建构。二者协同配合, 既尊重了学生的认知发展规律, 又有效培养了学生的核心素养, 全面提升课堂教学的逻辑性与实效性, 见图 2。

5.4. 教学评价设计

教学评价是检验学生概念认知建构效果、优化课堂教学的核心依据。作为连接学习目标与教学活动的桥梁, 评价任务一方面可以用来考量学习目标是否可评价, 另一方面需要嵌入教学活动之中[10]。本文立足研究核心, 构建 APOS 理论与 RMI 原则双维度融合的评价体系, 既评价学生知识建构的认知层级, 又评价学生解决问题的思维素养, 全方位诊断本课双理论融合教学的实际成效。

1) 操作阶段的评价

本阶段的评价对应 APOS 理论的操作阶段与 RMI 原则的关系识别环节, 以感知认知冲突, 理解对数产生的必要性为评价目标, 主要通过课堂观察、提问反馈, 检测学生能否从真实国情情境中提炼数学问题、准确列出指数方程, 能否通过自主试算感知旧运算体系的局限性, 有效产生认知冲突, 从而产生需

要一种新运算的心理需求, 重点培养学生的情境感知能力、问题发现能力与初步建模素养。

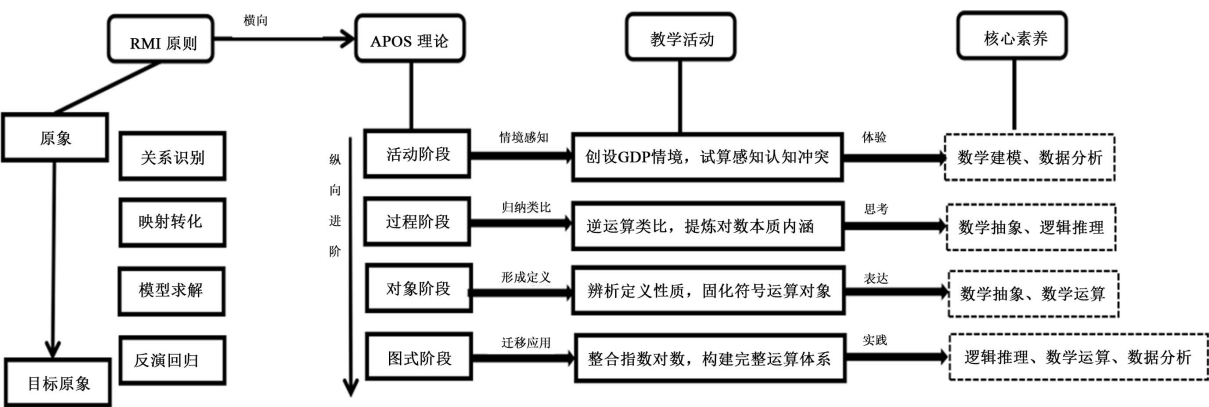


Figure 2. Teaching approach based on APOS theory and the RMI principle
图 2. 基于 APOS 理论与 RMI 原则的教学思路

2) 过程阶段的评价

本阶段对应 APOS 理论的过程阶段与 RMI 原则的映射建立环节。以课堂提问和小组讨论汇报为主, 通过逆运算类比梳理、指数运算逆运算推导等活动, 评价学生能否将外部操作内化为思维过程, 明确对数为指数运算的逆运算, 其作用就是求指数, 完成 APOS 过程阶段的认知内化, 并能初步建立指数问题到对数形式的映射思路, 落实 RMI 映射转化的思维要求, 培养学生逻辑推理、类比迁移与数学抽象素养。

3) 对象阶段的评价

通过掌握对数符号书写、理解指数式与对数式互化、探究对数底数与真数的约束条件、自主推导对数性质等活动, 评价学生能否将对数内涵固化为独立数学对象, 完成 APOS 对象阶段的概念建构, 并能运用对数模型进行基本判断与运算, 落实 RMI 模型求解的思维应用, 培养学生符号意识、严谨推理与规范表达的数学素养。

4) 图式阶段的评价

本阶段采用习题练习、课堂总结的评价方式, 通过指数式与对数式互化及求值的基础练习题、实际问题回归求解、思维导图构建等活动, 评价学生能否将对数概念纳入已有知识体系, 完成 APOS 图式阶段的知识整合, 并能运用映射、反演闭环解决实际问题, 落实 RMI 反演回归的完整思维链, 培养学生知识迁移、数学应用与系统建构的综合素养。

6. 教学过程

6.1. 操作阶段：创设 GDP 情境，激发认知冲突

问题 1：2020 年我国人均 GDP 为 1.05 万美元。国家政策明确提出到 2035 年实现人均 GDP 比 2020 年翻一番的发展目标, 思考人均 GDP 翻一番是多少?

师生活动：学生思考后回答, 翻一番就是变为原来的 2 倍, 1.05 万美元翻一番就是 2.1 万美元。教师指出达到 2.1 万美元, 我国将迈入中等发达国家行列, 到那时大家的生活水平将实现质的飞跃, 这一目标的实现将标志着我国进入中等发达国家行列, 与学生们的未来发展密切相关。

追问 1：若按每年 5% 的增长率保持平稳增长, 设 x 后人均 GDP 为 y 万美元, 请写出 y 关于 x 的函数解析式。

师生活动：学生结合指数函数知识, 独立列出指数函数模型 $y = 1.05 \times (1 + 5\%)^x = 1.05 \times 1.05^x$,

追问 2: 经过多少年能达到 2.1 万美元?

师生活动: 代入目标值 $y = 2.1$, 化简后得 $2 = 1.5^x$, 发现要解决需要多少年实现这一目标, 需要把 x 精确表示出来。教师进一步引导学生利用逐年试算方法, 学生进行试算, 通过计算发现 x 的值在 14 到 15 之间, 但无法通过试算得到精确值。

追问 3: 大家能不能用我们已经学过的加法、减法、乘法、除法、乘方、开方运算, 直接求出 x 的准确值?

师生活动: 学生动手尝试用各种运算求解, 发现无法直接表示 x 的值, 普遍产生怎么表示这个指数 x 的困惑, 意识到这是现有运算体系无法解决的新问题, 需要引入一种新的运算。

设计意图: 本环节对应 APOS 理论的操作阶段, 以国家人均 GDP 翻一番的真实情境为载体, 引导学生将实际问题数学化, 列出指数方程, 并通过逐年试算发现无法精确求解指数, 初步感知已知底数和幂求指数的问题结构, 产生了强烈的认知冲突, 凸显引入对数运算的必要性, 为概念生成奠定思维基础。此环节对应 RMI 中的关系识别: 原问题域 R 为指数方程, 原象 x 为未知指数。在这一过程中, 学生识别出原问题中的指数关系, 并感知到需要一种映射将问题转化到新的表达系统中, 唤醒了映射需求。同时通过国家发展情境的融入, 让学生感受到数学与国家发展的紧密联系与数学的实用价值, 激发学习的主动性与社会责任感, 着力培养学生数学建模、数据分析等核心素养。

6.2. 过程阶段: 类比逆运算, 提炼对数本质内涵

问题 2: 观察 $2 = 1.5^x$, 它具有怎样的结构特征? 与我们之前学过的方程有何不同?

师生活动: 学生观察发现, 未知数 x 在指数位置, 已知底数为 1.05 和幂为 2。教师引导学生式子特征用符号一般化表示出来, 转化为 $a^x = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 明确要求 x 本质上已知底数和幂, 求指数的问题。

追问 1: 这类已知底数和幂求指数的问题, 我们该如何求解? 为了解决这一问题, 先来回顾一下数学运算的发展规律。

师生活动: 学生回顾并梳理加法与减法、乘法与除法、乘方与开方的关系, 在加法运算里, 如果已知和与一个加数, 想要表示另一个加数, 引入了加法的逆运算减法; 在乘法运算中, 已知积与一个因数, 想要表示另一个因数, 引入了乘法的逆运算除法; 在乘方运算里, 如果已知指数和幂, 想要求底数 x , 引入了乘方的逆运算开方。初步感知学生初步感知每种运算都有对应的逆运算, 用于解决特定的未知量求解问题这一内在逻辑。教师引导学生总结: 每一种运算都有对应的逆运算, 逆运算的本质是通过已知结果和部分元素, 反演出未知元素。

追问 2: 回到指数式中, 已知 a 与 N , 要求指数 x , 结合运算发展规律, 我们应该如何解决?

师生活动: 学生通过数的发展类比推理, 应当引入指数运算的逆运算, 教师顺势提出这种逆运算的本质是已知底数和幂求指数, 我们将其称为对数。

设计意图: 本环节呈现多个相同形式的指数方程, 引导学生观察并概括其共同结构特征, 从而一般化抽象出一般的数学形式, 这一过程帮助学生将具体操作内化为可重复的心理过程, 实现了从特殊到一般的思维跃迁。通过回顾加法与减法、乘法与除法、乘方与开方等逆运算关系, 类比推理出: 指数运算也应有逆运算来求指数, 明确本质即已知底数和幂求指数, 完成了从外部操作到内部心理过程的转化, 培养了学生的逻辑推理与数学抽象素养。此环节是 RMI 映射建立的关键节点, 学生通过类比发现, 指数运算的逆运算即为对数, 从而将已知底数和幂求指数这一原问题, 映射到对数这一新运算模型中, 完成了从旧问题域到新问题域的思维跨越。

6.3. 对象阶段：辨析定义性质，固化符号运算对象

1) 对数的定义与符号

问题 3：明确了对数的本质，为了规范表述和方便应用，我们需要给出对数规范的符号和严格的数学定义。对数的符号是什么？又该如何定义呢？

师生活动：教师给出对数的严格定义：若 $a^x = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x = \log_a N$ ，其中 a 为底数， N 为真数， $\log$ 是一个整体运算符号，意义是表示 a 的多少次幂是 N 。用四线三格示范对数符号的规范书写，强调 $\log$ 是一个整体运算符号，带领学生规范朗读以 a 为底 N 的对数，区分底数、真数的位置的含意。学生在草稿本上练习书写符号，同桌互相检查纠正，初步掌握符号的规范表达。

2) 指数式与对数式的等价关系

追问 1：思考指数式和对数式中 a 、 x 、 N 具有什么对应关系？指数式和对数式具有什么关系？

师生活动：小组合作讨论，总结得出：指数式的底数对应数式的底数，指数对应数式的对数，幂对应数式的真数，两个式子中的三个变量分别描述的是完全相同的数量关系。教师引导学生由三个变量的对应关系得出 $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$ ，两者是等价关系，可以相互转化。

3) 对数的约束条件与性质

追问 2：类比除法中 0 不能做除数，开方中要求被开方数为非负数，结合指数式的性质，对数的底数和真数有什么约束条件？为什么？

师生活动：学生结合指数函数的定义域、值域，分组讨论得到 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $N > 0$ ，教师总结：负数和零没有对数的重要结论。

追问 3：为什么 $\log_a 1 = 0$ ， $\log_a a = 1$ ？

师生活动：教师引导学生结合 $a^0 = 1$ 和 $a^1 = a$ ，自主推导对数的两个重要结论： $\log_a 1 = 0$ ， $\log_a a = 1$ ，并举例验证。

4) 两类特殊对数

追问 4：在实际应用中，有两类对数使用频率极高，它们有专门的名称和简化记法，大家想了解吗？

师生活动：教师结合实际应用场景，补充两类使用频率较高的特殊对数：第一种是以 10 为底的对数，叫常用对数，简记为 $\lg N$ ，补充常用对数在物理、地理、化学等领域的广泛应用；第二种是以无理数 e 为底的对数，叫自然对数，简记为 $\ln N$ ，推荐《漫画 e 》《不可思 e 》两本揭示自然对数奥秘的趣味读物，帮助学生课后拓展了解自然对数的奥秘。学生认真倾听，识记常用对数、自然对数的符号和表达式，结合教师补充的内容，初步了解其应用场景。

设计意图：通过类比逆运算的过程，引导学生抽象对数的概念、规范符号书写，帮助学生建立符号意识，培养学生的逻辑推理与数学抽象素养，同时通过建立指数与对数的等价关系，学生完成 RMI 原则中的映射，将指数问题映射为对数形式，又可以从对数形式反演回指数问题。在自主推导对数的取值范围与重要结论过程中，引导学生有据可依、有理可推，培养严谨的数学思维。

6.4. 图式阶段：强化概念迁移，构建完整运算体系

问题 4：基础巩固练习

例 1：将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式

(1) $2^3 = 8$ (2) $10^{-2} = 0.01$ (3) $\lg 0.01 = -2$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

例 2：求下列各式中未知数的值

$$(1) \lg 100 = x \quad (2) \log_x 64 = 6 \quad (3) \ln \sqrt{e} = -x$$

问题 5: 回归开篇实际问题, 用对数知识验证 2035 年我国能否实现人均 GDP 翻一番的目标。

师生活动: 根据本节课所学知识将指数式转化为 $x = \log_{1.05} 2$ 。在教师指导下, 通过计算器计算 $\log_{1.05} 2 \approx 14.2$, 学生结合情境分析得出: 大约 14.2 年后, 也就是 2034 年左右, 我国就能实现人均 GDP 翻一番的目标, 感受到数学的工具价值。教师升华总结: 国家以年均 5% 的平稳增长率, 一步一个脚印就能实现宏伟目标, 希望同学们能像国家发展一样, 脚踏实地, 日积月累, 用数学知识提升自己, 为祖国的发展贡献自己的一份力量。同时请大家思考, 对数运算将复杂的乘除运算转化为简单的加减运算, 这种化繁为简、以退为进的转化智慧, 不仅是数学中的重要思想方法, 也是我们面对复杂问题时应当采取的思维策略, 把大问题分解为小问题, 把陌生情境转化为熟悉模型, 这正是映射与反演思想在人生中的迁移应用。

问题 6: 梳理本节课所学内容, 谈谈收获与感悟

师生活动: 教师引导学生从知识、方法、素养、育人四个层面总结并构建思维导图, 见图 3。

1) 知识层面: 理解对数的定义、符号; 明确底数与真数的范围; 掌握对数的基本性质、常用对数与自然对数。

2) 方法层面: 理解识别关系、建立对数映射、通过反演求解的方法; 体会指数式与对数式的等价转化是映射与反演的具体体现。

3) 素养层面: 通过将实际问题转化为指数方程, 培养学生数学建模等素养、通过类比逆运算, 提升学生逻辑推理等素养; 通过学习对数的定义与符号, 体会数学抽象等数学核心素养。

4) 育人层面: 将国家发展目标与个人成长的关联, 培养脚踏实地、日积月累的精神; 将对数化乘除为加减的运算特性与转化、化归的思想方法相结合, 引导学生理解数学中化繁为简、以退为进的思维智慧。

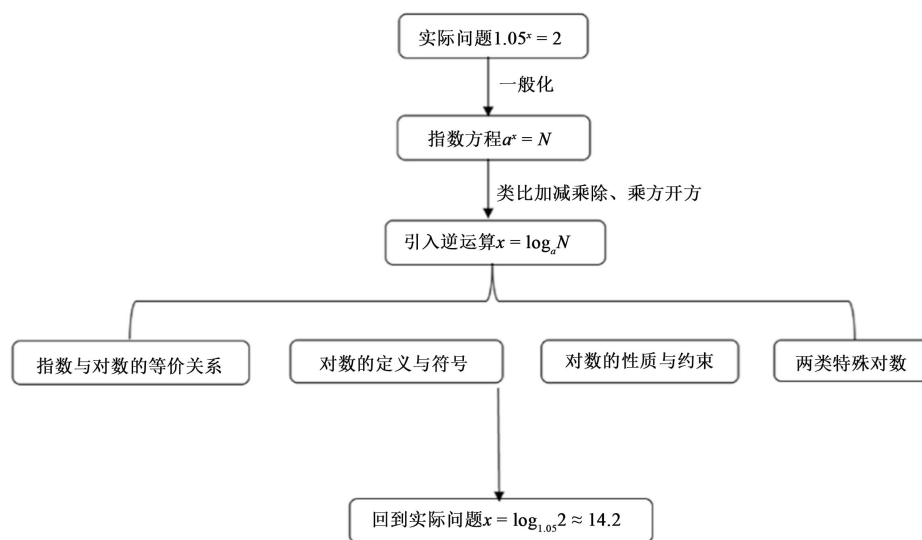


Figure 3. Conceptual thinking framework for logarithms

图 3. 对数的概念思维框架

设计意图: 通过基础练习, 学生巩固对数符号的使用和指数式与对数式的互化。回归开篇实际问题, 这一过程学生亲身体验从实际问题中识别指数关系, 建立对数映射, 通过反演得到答案并解释原问题的

完整闭环, 感受对数的应用价值, 增强成就感与自信心, 将知识学习与品格塑造有机结合, 落实立德树人根本任务。最后, 通过思维导图从知识、方法、素养、育人四个层面进行总结, 借助思维导图将对数与指数运算、方程求解、实际问题等已有知识整合, 形成完整的认知图式, 提升知识迁移能力。

7. 教学实施建议与教学反思

7.1. 教学实施潜在难点

结合 APOS 理论与 RMI 原则的融合教学逻辑以及高一学生实际认知水平, 本节课在落地实施过程中存在两处教学卡点。其一, 在操作阶段的试算探究环节, 学生自主逐年试算、估算指数取值区间的过程繁琐、耗时较长, 容易导致课堂节奏拖沓, 部分计算能力薄弱的学生容易产生倦怠心理, 难以聚焦核心数学矛盾, 弱化认知冲突的生成效果。其二, 对数符号作为全新的抽象运算符号, 学生易与原有运算符号混淆, 对指数与对数的等价映射关系理解不透彻, 导致 RMI 转化思维无法灵活运用, 难以完整完成映射—反演的闭环思维建构, 阻碍对数概念的深度对象化与体系化建构。此外, APOS 与 RMI 双理论框架的同时呈现, 学生既要关注概念的生成过程, 又要把握映射转化的思维框架, 二者叠加可能超出部分学生的认知承受能力, 对部分学生造成认知负荷过重的问题。

7.2. 教学实施策略

针对操作阶段学生自主试算耗时过长、课堂节奏易拖沓的难点, 教师可以通过梯度设问引导学生快速明确未知数的取值区间, 不仅有效保留了自主探究的思维过程, 也压缩了无效计算时间, 使操作阶段聚焦旧运算无法精确求解指数的核心数学矛盾, 强化认知冲突, 凸显对数引入的必要性。同时实施分层任务设计, 基础薄弱学生完成基础试算感知问题, 能力较强学生深度思考问题本质, 兼顾不同层次学生的学习节奏, 保障课堂高效推进。

针对学生对数符号认知模糊、指数与对数等价映射关系理解不透彻的难点, 教师在教学初期可以通过规范板书、对比辨析, 明确对数符号的整体性与特殊性, 区分对数运算与已学运算符号的差异, 破除学生符号认知误区。同时依托 RMI 映射反演核心思想, 设计指数式与对数式双向互化例题, 强化指数原问题域与对数新问题域的映射转化关系, 让学生在持续转化训练中吃透二者等价本质。

针对双理论框架可能带来的认知负荷问题, 教师可采用分阶段策略, 在过程阶段重点呈现 APOS 的建构逻辑, 帮助学生完成概念的心理内化; 在对象阶段再着重引入 RMI 的映射术语与思维框架, 避免同时以显性方式呈现造成认知超载。

7.3. 整体教学反思

本次基于 APOS 与 RMI 双理论融合的教学设计, 完整遵循学生认知规律, 重构了对数概念的生成课堂, 有效解决了传统教学重结论、轻过程的弊端。但在实际教学中, 仍需平衡学生自主探究与教师引导把控的关系, 避免探究环节耗时失衡。同时, 本节课侧重概念生成与思维渗透, 后续教学可增加更多生活化、跨学科实例, 进一步强化 RMI 化归思想的迁移应用。

8. 总结

本研究以高中数学对数的概念为例, 探索了 APOS 理论与 RMI 原则的融合模型在概念教学应用, 设计了一个贯穿操作、过程、对象、图式四个阶段、以关系、映射、反演为方法主线的教学案例。理论与教学深度融合, 既落实了数学核心素养, 又融入了课程思政。

8.1. APOS 理论与 RMI 原则具有互补性与协同性

APOS 理论为概念学习提供了纵向的认知发展路径, 明确了学生从具体操作到心理内化、从符号对象到图式整合的建构过程, 这一路径揭示了概念理解的心理本质, 即学生不是被动接受定义, 而是通过主动建构逐步形成对概念的深层把握。RMI 原则从横向维度揭示了问题转化的思维本质, 通过识别关系、建立映射、反演求解来重构认知对象, 为学生在面对陌生问题时提供了可操作的思维策略。两者融合有效促进了对数概念的深层理解, 使学生在掌握知识的同时习得了可迁移的思想方法。

8.2. 本设计在操作层面体现了理论融合的可行性与实效性

在教学实施上, 本设计以国家人均 GDP 翻一番为真实情境, 制造认知冲突, 激发学习需求; 在过程阶段, 回顾加法与减法、乘法与除法、乘方与开方等逆运算关系, 引导学生归纳出每种运算都有逆运算的规律, 进而类比建立对数是指数逆运算的映射观念; 借助符号定义与等价转化完成了心理过程向独立数学对象的跃升, 并明确了反演路径; 最终回归实际问题用对数求解, 并借助思维导图整合知识网络, 实现图式整合。教学流程层层递进, 思政元素的自然融入, 既落实了数学核心素养, 又彰显了学科育人价值。

8.3. APOS 理论与 RMI 原则结合模式具有一定的可迁移性

虽然本研究聚焦于对数的概念, 但 APOS 与 RMI 的结合模式同样适用于其他高中数学概念。以认知冲突激发需求, 以逆运算或对应关系类比建立映射, 以符号定义完成对象化, 以实际问题实现图式整合。后续研究可进一步拓展应用领域, 并通过教学实验检验其实际效果, 完善相应的评价工具与实施策略, 推动该模式在更广泛的数学概念教学中落地。

8.4. APOS 理论与 RMI 原则融合模式的边界性

APOS 理论与 RMI 原则的融合框架并非普适于所有数学概念的教学。APOS 理论与 RMI 原则融合的核心在于具有明确逆运算关系, 新旧知识可通过映射建立等价关联的抽象代数概念。从理论上来看, 该框架更适用于具有以下结构特征的数学概念: 1) 蕴含明确的逆运算或对应关系, 如对数与指数、反函数与原函数等; 2) 涉及从已知领域到未知领域的转化, 需要借助映射思维实现认知跨越; 3) 概念的生成具有明显的过程性与建构性, 适合分阶段推进。对于此类概念, APOS 理论提供认知建构的路径保障, RMI 原则提供问题转化的思维工具, 二者协同能够产生事半功倍的教学效果。

综上所述, 基于 APOS 理论与 RMI 原则结合的高中概念教学设计, 为数学概念教学提供了新的理论视角与实践路径。未来可以持续优化理论融合的落地路径, 收集学生学习过程数据, 深入分析该模式对不同层次学生的影响, 让 APOS 理论与 RMI 原则服务于高中数学课堂, 不断提升抽象概念教学的深度与实效性。同时, 教师在借鉴该融合模型时, 需首先判断所教概念是否具备逆运算关系或可转化结构这一前提条件, 不宜盲目套用。未来研究可进一步探索该框架在不同类型数学概念中的适用性差异, 并通过实证研究检验其边界条件。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 李克民. 关注概念本质在操作体验中发展数学概念——以《周长的认识》教学为例[J]. 基础教育课程, 2019(14): 38-43.
- [3] 胡龙雨, 房元霞. APOS 理论视域下概念教学的学习进阶构建——以“幂函数”概念教学为例[J]. 高中数学教与学, 2025(2): 50-53.

- [4] 李璜. “APOS”指导下的数学归纳法概念教学[J]. 教学月刊·中学版(教学参考), 2014(5): 43-45.
- [5] 张文, 兰佳雯. APOS 理论视域下小学数学教科书中概念呈现的比较研究——以两版教科书中三角形概念呈现为例[J]. 教育理论与实践, 2025, 45(20): 48-53.
- [6] 张中发. APOS 理论下的数列教学研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2008.
- [7] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996) Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, **15**, 167-192.
[https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(96\)90015-2](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(96)90015-2)
- [8] 徐利治. 数学方法论选讲[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000: 28-29.
- [9] 傅海伦, 陈传林. 基于 RMI 原则的不等关系认知转化机制及实证分析[J]. 中国数学教育, 2025(3): 14-18.
- [10] 张菊荣. 明明白白上好课: 教学评一致性的探索与深化[J]. 中小学管理, 2025(5): 58-60.