

基尔霍夫定律的拓扑本质：桥接电路分析与拓扑物态的课程概念演化设计

池雨澄，刘峥嵘^{*}，陈 锐

湖北大学物理学院，湖北 武汉

收稿日期：2026年7月2日；录用日期：2026年7月30日；发布日期：2026年8月7日

摘 要

基尔霍夫定律在电路课程中被普遍视为列写方程的代数起点，但其背后深刻的图论与拓扑约束内涵在教学中几乎未能得到体现。与此同时，拓扑电路等前沿研究方向在数学上存在同一性：电路网络的拉普拉斯矩阵与紧束缚模型的哈密顿量具备结构上的等价关系。基于这一共性，我们可以搭建起基础电路分析到拓扑物态物理的教学桥梁。本文重新挖掘基尔霍夫定律的拓扑本质，提出一条贯穿电路课程的概念演化主线：从关联矩阵与图拉普拉斯的内在联系出发，到节点导纳矩阵的结构化理解，再借助一维Su-Schrieffer-Heeger (SSH)拓扑电路模型将教学启发延伸至拓扑边缘态及拓扑保护思想。文章给出了四阶渗透式教学设计，并以SSH电路为综合探究模块，从理论推导、仿真实验到论证型实验报告，形成完整的课堂实施方案。基于认知学习理论的分析表明，这一设计有望显著深化学生对基尔霍夫定律约束本质的理解，在培养工程直觉和激发科研好奇心方面具备潜在优势。

关键词

基尔霍夫定律，拓扑约束，图拉普拉斯矩阵，拓扑电路，SSH模型，概念演化，电路教学

The Topological Essence of Kirchhoff's Laws: A Conceptual Evolution Design for Bridging Circuit Analysis and Topological States

Yucheng Chi, Zhengrong Liu^{*}, Rui Chen

School of Physics, Hubei University, Wuhan Hubei

Received: July 2, 2026; accepted: July 30, 2026; published: August 7, 2026

^{*}通讯作者。

文章引用：池雨澄，刘峥嵘，陈锐. 基尔霍夫定律的拓扑本质：桥接电路分析与拓扑物态的课程概念演化设计[J]. 教育进展, 2026, 16(8): 289-298. DOI: 10.12677/ae.2026.1681632

Abstract

Kirchhoff's laws are generally regarded as the algebraic starting point for writing equations in circuit courses, but the profound graph theory and topological constraints behind them are almost never reflected in teaching. Meanwhile, cutting-edge research directions such as topological circuits share a mathematical commonality: the Laplace matrix of circuit networks and the Hamiltonian of tightly bound models have a structural equivalence. Based on this commonality, we can build a teaching bridge from basic circuit analysis to the physics of topological states. This paper re-examines the topological essence of Kirchhoff's laws and proposes a conceptual evolutionary thread running through the circuit course: Starting from the intrinsic connection between the incidence matrix and the graph Laplace, to a structured understanding of the nodal admittance matrix, and then extending the teaching inspiration to topological edge states and topological protection ideas with the help of the one-dimensional Su-Schrieffer-Heeger (SSH) topological circuit model. This article presents a four-stage pervasive teaching design, using the SSH circuit as a comprehensive inquiry module. It forms a complete classroom implementation plan, from theoretical derivation and simulation experiments to demonstrable experimental reports. Analysis based on cognitive learning theory indicates that this design has the potential to significantly deepen students' understanding of the essence of Kirchhoff's laws and constraints, and possesses potential advantages in cultivating engineering intuition and stimulating scientific curiosity.

Keywords

Kirchhoff's Laws, Topological Constraints, Graph Laplace Matrix, Topological Circuit, SSH Model, Conceptual Evolution, Circuit Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

电路课程的开篇,几乎无一例外地是从基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)讲起。经过一个学期的严格训练,学生能够熟练地为复杂的电阻网络、动态电路乃至含有受控源的网络列出方程、求解响应,并能在考试中取得不错的成绩。然而,若在课程结束后追问一句:“KCL 和 KVL 究竟规定了电路的什么性质?”常见的回答依然是“节点电流之和为零”和“回路电压之和为零”——这不过是定律的文字复述。继续追问:“这些规定与你所列方程中系数矩阵的结构有何关系?如果不涉及具体的电阻、电容数值,你能仅凭连接方式说出这个矩阵哪些位置非零吗?”多数学生便陷入沉默。

这种教学效果上的落差,根源并不在学生,而在我们处理这两个基本定律的方式。在 Hayt 等[1]和邱关源[2]的经典教材中,基尔霍夫定律被迅速转化为列写方程的代数操作规范:设定参考方向、标注节点电压或网孔电流、遵循正负号规则、代入元件伏安关系。在这一“解题驯化”过程中,定律本身所隐含的只依赖于连接关系的拓扑约束属性被完全遮蔽了。关联矩阵、降阶关联矩阵、图拉普拉斯矩阵这些强大的数学结构,即便在教材中出现,也只是作为矩阵分析法的技术工具被一带而过,从未被提升到“定义电路网络本质”的认知层次。

与基础教学中这一轻视形成鲜明对照的是,近十年来,凝聚态物理学与电子工程交叉领域兴起的拓扑电路研究正受到空前关注。从一维 Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模型的 LC 实现[3],到高阶拓扑绝缘体的

电路模拟[4]，再到非厄米趋肤效应[5]和 Floquet 拓扑相[6]的电路观测，研究者在实验室内用最普通的电感、电容和运算放大器，构建出了许多在天然量子材料中难以企及的拓扑物态。这些工作之所以能够成功，核心的数学依据正是一个极其朴素的事实：电路网络的基尔霍夫方程在频率空间能够自然地给出一个拉普拉斯矩阵，而这个矩阵在数学结构上与紧束缚模型的哈密顿量完全相同[3]。

换句话说，任何一位电路教师，当他拿起粉笔在黑板上写下第一个 KCL 方程时，他实际上已经在书写一个拓扑物态的数学起点。然而由于学科分野的壁垒，这一内在联系在长达数十年的电路教学中几乎完全被忽略了。电路课堂执著于将学生训练为“方程列写者”，拓扑物理课堂则往往从二次量子化语言直接出发，双方都不曾意识到，基尔霍夫定律本身就是一座架设在电路分析与现代物理学之间的桥梁。

本文的目标，正是要在电路课程内部重新打通这条被遗忘的认知通道。受 Felder 与 Brent [7]关于 STEM 课程整合设计思想的启发，我们提出一种“概念演化”的教学设计思路：在不改变电路课程主体骨架的基础上，于若干关键节点嵌入拓扑视角的轻量级提升，使学生沿着一条清晰的主线，从其入学第一周就熟悉的 KCL/KVL 出发，逐步认识到图拉普拉斯矩阵的深层结构，最终在一个具体的 SSH 拓扑电路案例中实际观测到拓扑边界态。本文以下几节将依次完成以下工作：第二节回到基尔霍夫定律的图论本质，阐明何谓“拓扑约束”；第三节建立从电路网络到紧束缚模型的数学对译，凸显拉普拉斯矩阵的桥梁作用；第四节给出四阶渗透式概念演化主线的详细设计；第五节以 SSH 拓扑电路模块为例展示课堂实施的具体方案；第六节基于认知理论对预期教学效果进行推演分析，并给出可供后续实证检验的评估框架；最后以结语收束，展望这一思路对基础课教学的启示。

2. 再探基尔霍夫定律：从代数方程回到拓扑约束

在国内外主流电路教材[1][2]中，基尔霍夫定律的呈现遵循大致相同的路径：定义节点、支路、回路等拓扑术语；给出 KCL 和 KVL 的文字表述与数学表达式；辅以若干单一节点的电流求和实例和单一回路的电压降落实例；随即转入支路电流法或节点电压法的完整解题流程。在此过程中，“拓扑”一词即使出现，也仅限于“网络拓扑图”“平面电路”“非平面电路”等浅层描述。学生所内化的，是一套将物理连接转化为正负号代数式的操作性程序，而从未被引导去思考：为什么任何遵守 KCL 的电流分布都自动满足某些全局约束？这些约束与元件的选择有无关系？

从认知心理学的角度看，这种教学处理的后果是学生形成了关于电路的“代数模型”而非“结构模型”。在代数模型下，电路是一个可由联立方程求解的“黑箱”，列方程是手段，求出数值是目的；而结构模型则要求学生意识到，网络连接本身已经决定了解空间的大范围性质，元件参数只在这个已经被拓扑刻画好的空间中标定某个具体的点。这一认知差异对后续学习影响深远。例如，在模拟电路课程中，面对寄生振荡、地弹噪声等现实困扰，缺乏结构视野的学生很难自发地从网络连接方式入手分析问题。

要真正理解 KCL 和 KVL 的拓扑本质，必须重新审视它们在数学图论中的表述。Balabanian 与 Bickart [8]在其经典论著中给出了严格的图论框架。对于一个包含 n 个节点、 b 条支路的连通电路，选定一个参考节点后，可以定义降阶关联矩阵 $\mathbf{A}$ ，其维数为 $(n-1) \times b$ 。矩阵的元素按如下规则确定：若支路 k 从节点 i 出发并指向节点 j (i, j 均非参考节点)，则在 i 行置+1，在 j 行置-1；若支路一端为参考节点，则仅在有连接的非参考节点行置+1 或-1。这一矩阵纯粹由电路的连接关系决定，而与支路上是电阻、电容、电感还是受控源毫无关系。

KCL 可以简洁地写为矩阵形式：

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

其中 $\mathbf{i}$ 是支路电流向量。从线性空间的角度看，这意味着任何物理上允许的支路电流向量，都必须落在 $\mathbf{A}$ 的零空间(模掉参考节点条件后)。KVL 则给出对偶的约束：

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是支路电压向量, $\mathbf{e}$ 是节点电压向量。这表示支路电压向量必定位于 $\mathbf{A}^T$ 的列空间中。

更加关键的一步在于, 当我们将 KCL 与支路本构关系结合以形成节点电压方程时, 会极为自然地遇到图拉普拉斯矩阵。例如, 对纯电阻网络, 设支路电导矩阵为对角阵 $\mathbf{G}$, 则支路电流为 $\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{A}^T \mathbf{e}$, 代入 KCL 得节点方程:

$$\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T \mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{i}_s$$

其中 $\mathbf{i}_s$ 指的是注入各节点的独立电流源向量, 矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T$ 是带权重的图拉普拉斯矩阵。即便电导矩阵不是对角的(存在受控源), 拉普拉斯算子的结构痕迹也清晰可见。换言之, 学生在求解每一道节点电压法习题时, 都在不自觉地与图拉普拉斯矩阵打交道, 只不过这个矩阵被元件数值淹没了, 从未被单独指认出来。

从上述图论视角衍生出的“拓扑约束”一词, 有着明确的教学涵义: KCL 和 KVL 首先施加给网络的是一套严格的连接规则, 这套规则只关心“谁与谁相连”, 以及由此形成的节点空间和回路空间之间的对偶关系; 至于连接的是什么性质的元件, 是在这套骨架已经成型之后才填入的“血肉”。

这一理解的建立并不需要学生预先掌握系统的图论知识。教师可以在讲授 KCL 方程时, 刻意停留一步, 让学生在尚未代入电阻值或伏安关系之前, 观察按联结关系写出的系数矩阵的非零元素分布, 并追问: “如果我现在把全电路的电阻都换成等值的电容, 这一系数矩阵的非零元素分布会发生变化吗?” 这种看似微小的时间停顿, 却能够暂缓元件数值的代入, 将学生的注意力从元件值拉回到网络结构本身。待到课程中后段, 当这一结构最终被认作拉普拉斯矩阵并用以揭示拓扑物态的本质时, 学生头脑中的认知准备就已经完成了。

3. 从电路网络到拓扑物态: 拉普拉斯矩阵作为认知桥梁

在正弦稳态分析阶段, 节点电压方程以导纳矩阵的形式再次登场。对于无源无耗的线性网络(仅含 L、C), 节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}(j\omega)$ 的元素由两项构成: 对角元 Y_{ii} 汇集了所有连接到节点 i 的支路导纳之和, 非对角元 Y_{ij} 则为连接节点 i 与 j 的支路导纳之和取负值。这一矩阵的稀疏模式——即哪些非对角元为零、哪些不为零——与第一节中关联矩阵所描绘的连接模式完全一致。

如果我们进一步考虑一个由纯 LC 构成的周期性梯形网络, 在频率远低于自谐振频率的区域做适当近似, 节点的导纳方程将呈现极为简洁的形式。例如, 对于每一个节点以相同电感 L 接地、相邻节点通过相同电容 C 耦合的均匀传输线模型, 在 $j\omega$ 域中, 节点方程经排列后可写为:

$$\left[\omega^2 \mathbf{I} - \frac{1}{LC} \mathbf{L}_{\text{net}} \right] \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

其中 $\mathbf{L}_{\text{net}}$ 是该耦合网络的图拉普拉斯矩阵, $\mathbf{I}$ 是单位矩阵, $\mathbf{V}$ 是节点电压相量向量, 即由各节点电压的相量(振幅与相位)排成的列向量。此方程与固体物理中单原子紧束缚链的薛定谔方程 $E\psi_n = \epsilon_0 \psi_n - t(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})$ 具有完全相同的代数结构: ω^2 扮演能量的角色, 拉普拉斯矩阵的非对角部分充当跃迁项。

上述方程的建立是整条认知主线的关键转折点。在此之前, 拉普拉斯矩阵只是隐藏在解题步骤中的数学影子; 在此之后, 它以一种可以被直接指认、被赋予物理意义的形态浮现出来, 成为沟通“电路网络”与“晶格模型”的桥梁。在教学中, 这一跨越学科语境的转化不宜抽象地以数学定理的方式给出, 而应通过一张显式的对译表来建立直觉。表 1 给出了我们在课堂上使用的对译关系, 其理论基础来自 Lee 等人[3]对拓补电路数学结构的系统阐述。

Table 1. Translation of terminology and equations between circuit networks and tight-bound lattice models
表 1. 电路网络与紧束缚晶格模型的术语及方程对译

电路网络	紧束缚晶格模型
节点	格点
节点电压振幅 V_i	波函数振幅 ψ_i
节点间耦合导纳(电容/电感)	跃迁幅值 t_{ij}
接地导纳项	格点在位能 ϵ_i
KCL 节点方程 $Y(\omega)V=0$	本征方程 $H\psi=E\psi$
边界节点缺失连接	开放边界条件
导纳矩阵的稀疏结构	紧束缚哈密顿量的非零元模式

需要特别强调，这种对译并非粗糙的比喻，而是建立在数学结构严格同一之上的等价关系。节点电压振幅在无源无耗网络中满足的齐次线性方程组，在指定频率下恰好是某个厄米矩阵的零本征值问题；而紧束缚模型的定态薛定谔方程恰恰也是厄米矩阵的本征值问题。这正是拓扑电路研究能够从电路平台成功“模拟”量子拓扑物态的根本逻辑保证[3]。

当学生在黑板上看到由自己亲手列出的节点导纳矩阵，被逐项翻译为一个一维原子链的哈密顿量时，他们所感受到的震撼，要远远大于任何纯语言的科普讲述。此刻，电路分析不再仅仅是电子工程的入门工具，而化身为物理学通用语言的一种具体的、可以触摸的“方言”。

一条如此显豁的认知桥梁，为何在长达数十年的电路教学中几乎无人搭建？分析起来，原因大致有三。其一，学科分野造成的知识断裂。电路课程的任课教师大多出身电气工程学科，其学术训练集中于电力系统、控制理论或电子技术，鲜少深入凝聚态物理的拓扑能带理论。相反，拓扑物理的研究者则多来自物理学背景，对工科电路课程的内部逻辑、学生已有的概念和教学约束不敏感。两个群体之间的对话不足，是这一认知鸿沟长期存在的重要原因。其二，课程顶层设计的惯性。现行电路课程的教学大纲[9]，其设计蓝图源于 20 世纪中叶为电子工程专业奠定的基础课体系，其核心目标是“为模拟电子线路、信号与系统等后续课程提供电路分析工具”。在这一工具理性导向下，任何不直接服务于后续课程的“旁支内涵”都天然地处于被剪裁的境地。即便有教师意识到 KCL/KVL 的拓扑深意，也往往会因“课时有限”“不考就不讲”的现实考量而选择沉默。其三，“拓扑”一词的神秘化。最近二十年，拓扑绝缘体、拓扑量子计算等概念经由科普媒体广泛传播，使得“拓扑”在师生心目中往往被蒙上一层高不可攀的面纱。基础课教师担心引入拓扑概念会让学生陷入群论、拓扑不变量等繁难数学，反而产生畏难情绪。本文恰恰要论证的是，拓扑在电路中的入口可以极端朴素——它就从基尔霍夫定律的关联矩阵开始，而拓扑保护的物理图像，可以借助元件值的鲁棒性直观地呈现出来，无须任何高深的代数拓扑知识。

4. “概念演化”的教学主线设计：四阶渗透式方案

基于上述分析，我们提出一种教学方案：在不额外增加学时的前提下，将“拓扑约束 - 拓扑物态”这条认知线索融入现有的电路课程。相较于生硬地植入电路课程知识体系之外的全新概念，我们更关注如何顺着原有的概念自然演化，将原本隐含在 KCL/KVL 和节点分析中的拓扑结构，分四个教学阶段逐层拆解、循序渐进，搭建出学生能够拾级而上的认知阶梯。

第一阶段：在 KCL/KVL 教学时播下“结构先于元件”的种子。在电路课程第一周讲完 KCL 和 KVL 的基本内容、即将转入支路电流法之前，选取一个包含四到五个节点、六到八条支路的电阻网络，引导学生列出 KCL 方程后，先不代入具体的电阻数值和伏安关系，而是让学生观察此时方程左边系数矩阵的

非零元分布情况。教师随即发问：“如果我们把所有的电阻都拆除，原地换上电容甚至电感，这个非零元的分布情况会变化吗？”通过简短讨论，学生能迅速得出否定答案，从而第一次在认知中将“由连接关系决定的骨架”与“由元件类型决定的填充”剥离开来。此时教师可简要指出，这个只取决于连接方式的系数矩阵在数学上称为关联矩阵，它将在后续课程中以更高级的形式反复出现——由此，我们便为后续的思考埋下了伏笔。

第二阶段：在回路与网孔分析中注入“对偶空间”意识。在网孔电流法或回路分析法教学时段，对比节点电压法与网孔电流法时，教师不再仅从变量个数多少的技术角度比较两者优劣，而是引导学生注意一个深层的数学事实：节点空间和网孔空间是同一物理网络在两种对偶的代数描述下的投影——KCL约束的是节点上的“流”，KVL约束的是回路中的“势”，两者通过关联矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^T$ 形成精确的对偶关系。这种对一个网络可以同时存在互为对偶的代数表述的体认，是日后理解“体-边界对应”等拓扑思想的必要感性基础：边界态之所以存在，恰恰是因为在开边界条件下，体哈密顿量的某种拓扑不变量强制了边界上出现一个局域模式，这是一种跨越不同空间维度的必然对应。

第三阶段：在正弦稳态分析中揭秘“紧束缚类比”。正弦稳态分析完成、学生已熟练掌握相量法和网络函数之后，教师给出一个由电感和电容构成的简单周期性梯形网络(例如均匀 LC 低通滤波器链)，带领学生写出其节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}(j\omega)$ 。随后指出，在谐振频率附近做适当变量替换后，该方程将变为形如 $[\omega^2 \mathbf{I} - (1/LC) \mathbf{L}_{\text{net}}] \mathbf{V} = 0$ 的本征方程。紧接着，教师将这个方程与固体物理导论中一维单原子链的动力学方程并排写在黑板上，逐项指出其对应关系，此时表 1 中的对译关系正式登场。这一步通常会在课堂上制造出短暂的安静——学生忽然意识到，自己写了半个学期的电路方程原来与物理学家笔下的原子振动方程或电子紧束缚方程是同一种数学语言。这种顿悟对于打破“电路只是工程工具”的思维定式极为有效。

第四阶段：专题模块——“从 LC 谐振链到 SSH 拓扑绝缘体”。这一模块是整个概念演化主线的闭环终点，建议安排在正弦稳态分析结束后，作为一次综合性探究课(2 学时理论 + 2 学时实验)，也可作为课程设计题目。核心任务是利用前三个阶段积累的矩阵语言和结构直觉，在二聚化 LC 链(SSH 模型的电路实现)上从头推导体色散、观测开边界条件下的边界态，并验证其频率对元件扰动的鲁棒性。这一模块的详细教学设计见第五节。

5. 教学实践案例：SSH 拓扑电路模块的嵌入与课堂实施

SSH 拓扑电路模块定位为“综合探究型教学环节”，它既是正弦稳态分析法在高阶应用场景下的展示，也是将前三个阶段积累的拓扑直觉转化为可视化、可测量的物理实例的关键一步。建议学时分配如下：理论推导与仿真 1.5~2 学时，面包板实验 2 学时，课后撰写论证型实验报告。

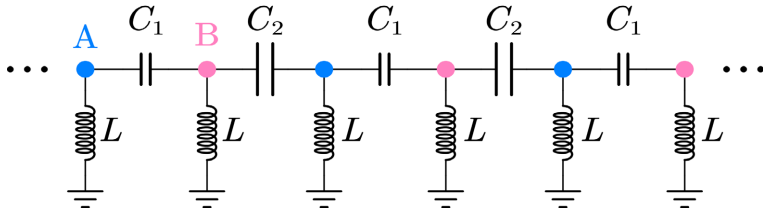


Figure 1. One-Dimensional SSH circuit. A and B are two nodes within a primitive cell. The nodes are grounded through inductor L . Nodes A and B within the primitive cell are connected by capacitor C_1 , and nodes between adjacent primitive cells are connected by capacitor C_2 , where $C_1 \neq C_2$.

图 1. 一维 SSH 电路。A、B 为原胞内的两个节点。节点通过电感 L 接地。原胞内 A、B 节点之间通过电容 C_1 连接，相邻原胞之间的节点通过电容 C_2 连接，且 $C_1 \neq C_2$ 。

本节构建的 SSH 电路模型，其拓扑性质的理论基础由 Lee 等人[3]在电感-电容网络框架中严格证明。图 1 给出了无限长一维 SSH 电路的单元结构。每一个原胞含 A、B 两个节点。每个节点均以电感 L 接地，构成谐振单元。原胞内部 A、B 节点之间通过耦合电容 C_1 连接，相邻原胞之间的节点通过耦合电容 C_2 连接，其中 $C_1 \neq C_2$ ，形成二聚化。

设第 n 个原胞中 A、B 节点的电压相量分别为 $V_{A,n}$ 和 $V_{B,n}$ 。在频率 ω 下，每个节点对地的导纳为 $Y_g(\omega) = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C_g$ ，为简化分析，我们仅考虑节点对地接电感 L ，忽略对地寄生电容，或将对地电容归入归一化处理——在理论分析中，这只会平移共振频率中心，不改变拓扑性质。在此采用典型的电路方案：每个节点只通过一个电感 L 接地，节点间通过纯电容耦合。此时对地导纳为 $\frac{1}{j\omega L}$ ，耦合支路导纳为 $j\omega C$ 。

对节点 $V_{A,n}$ 列写 KCL：从该节点流向地的电流是 $V_{A,n}/j\omega L$ ，流向节点 $V_{B,n}$ 的电流为 $j\omega C_1(V_{A,n} - V_{B,n})$ ，流向左侧原胞节点 $V_{B,n-1}$ 的电流为 $j\omega C_2(V_{A,n} - V_{B,n-1})$ 。诸电流之和为零：

$$\frac{V_{A,n}}{j\omega L} + j\omega C_1(V_{A,n} - V_{B,n}) + j\omega C_2(V_{A,n} - V_{B,n-1}) = 0$$

同样，对节点 $V_{B,n}$ ：

$$\frac{V_{B,n}}{j\omega L} + j\omega C_1(V_{B,n} - V_{A,n}) + j\omega C_2(V_{B,n} - V_{A,n+1}) = 0$$

将方程两边乘以 $j\omega$ ，并移项整理，得到紧凑形式：

$$\left(\frac{1}{L} - \omega^2(C_1 + C_2)\right)V_{A,n} + \omega^2 C_1 V_{B,n} + \omega^2 C_2 V_{B,n-1} = 0$$

$$\left(\frac{1}{L} - \omega^2(C_1 + C_2)\right)V_{B,n} + \omega^2 C_1 V_{A,n} + \omega^2 C_2 V_{A,n+1} = 0$$

定义无量纲频率参数，令 $\Omega = \omega^2 LC$ ，其中 C 为参考电容值，则方程可以改写为标准的 SSH 形式。更直接地，将该方程组视为 $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{V} = \frac{1}{\omega^2 L}\mathbf{V}$ ，其中矩阵 $\mathbf{H}$ 的非对角元由耦合电容给出。引入布洛赫定理，设 $V_{A,n} = V_A e^{jkna}$ ， $V_{B,n} = V_B e^{jkna}$ (a 为原胞长度)，代入得到体色散方程。在教学处理中，我们可引导学生直接写出体哈密顿量：

$$\mathbf{H}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 C_1 + \omega^2 C_2 e^{-jka} \\ \omega^2 C_1 + \omega^2 C_2 e^{jka} & 0 \end{pmatrix}$$

对角项已吸收到频率条件中。体色散关系为：

$$\frac{1}{L} - \omega^2(C_1 + C_2) = \pm \omega^2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(ka)}$$

对于给定的 ω ，需要在色散曲线上寻找解，这可以通过图形法或数值求解展示。然而，对学生而言，更直观的方式是使用 LTspice 对有限链进行交流扫描仿真，直接观测不同频率下节点电压的分布。

关键观察：当 $C_1 < C_2$ (或 $C_1 > C_2$) 且链两端为开放边界时，在体带隙中间会出现一个孤立的谐振峰，其电压分布强烈局域在链的一端或两端，这就是拓扑边界态。当 $C_1 = C_2$ (无二聚化) 时，边界态消失。通过这一对比，学生不仅复现了科研文献[3][4]中的核心现象，而且全部推导都使用他们已在电路课程中熟练掌握的 KCL 和相量法，无需引入狄拉克方程或拓扑不变量。

仿真：在 LTspice 中构建 16 个谐振单元(8 个原胞)的 SSH 链，使用交流电源在链端注入信号，以.ac 分析扫描频率，测量另一端节点的电压幅频特性。学生会清晰地频谱上识别出两个通带和一个带隙，并在带隙内看到边界态的尖峰。要求学生改变 C_1/C_2 比值，观察边界态频率的移动，以及当 $C_1 = C_2$ 时边界态的消失。

实验：在面包板上用贴片电感和电容搭建同样的 8 原胞链，使用网络分析仪或带扫频功能的信号源加示波器/频谱分析仪测量 S_{21} 传输特性。故意将某一原胞内的电容值偏离设计值 20%，观察边界态谐振频率的变化——理论上它几乎不作漂移，而体模则显著移动。这一“制造缺陷——观察保护”的步骤，是让拓扑保护概念从抽象术语转化为触觉经验的灵魂环节。学生会亲手写下实验现象：“电容值即使偏差 20%，边界态频率移动仍小于 1%”——这远比任何教科书上的描述都具有说服力。这种鲁棒性正是拓扑非平庸相的根本特征[3]。

为了将实验从“操作记录”升级为“科学探究”，我们为此模块特别设计了论证型实验报告支架，要求必须包含以下四个部分：

- 1) 预判：基于理论计算，写出你认为边界态应出现的频率位置，并解释为何该状态存在于体带隙中。
- 2) 执行与偏差日记：如实记录仿真和实验过程中的所有异常波形、意外噪声、幅值偏差等，哪怕你暂时不理解其原因。
- 3) 基于原理的偏差归因：选择至少一个显著偏差，从电路原理和拓扑两个角度提出两种可能的解释，并设计额外测量来排除或证实。
- 4) 修正后的结论与边界说明：总结边界态的存在条件及其对扰动的鲁棒性，并明确指出该实验结论的适用范围。

这一报告范式的变革，将学生从“数据记录员”角色转变为“微型课题研究者”，使电路实验真正承载起培养研究性思维的功能。这正是 Felder 与 Brent [7]所倡导的以学生为中心的探究式教学理念在电路实验教学中的具体落实。

6. 预期教学效果与评估框架

本方案可以从认知理论、教学逻辑和已有相关研究的旁证出发，对其预期效果进行合理的推演分析，同时为后续的实证研究搭建可操作的评估框架。本方案的核心设计特征——“延迟元件赋值”与“结构视角的持续强化”——在认知心理学中有明确的理论支撑。Chi 提出的概念转变理论指出，学生要从一种“朴素本体论”跃迁到更成熟的科学本体论，关键在于教师有意识地在多个情境中持续激活目标范畴[10]。传统电路教学始终将 KCL/KVL 限定在“代数运算”范畴内处理，而本方案通过四个阶段的逐步渗透，反复将其拉入“图论结构”和“紧束缚物理”两个新范畴，实质上是在为学生搭建跨本体的概念转变支架。

我们预期：经过一学期的结构化干预，实验班学生在回答“KCL/KVL 到底规定了电路的什么性质”的问题时，能够从“连接关系”“网络的骨架”“矩阵的非零模式”等结构层面描述的学生比例，将显著高于仅接受传统教学的学生。此外，在节点导纳矩阵结构填空题中，能够仅凭网络拓扑勾画稀疏模式的学生比例亦应有明显提升。以上假设可以通过前后测准实验设计加以检验。

认知迁移研究中的“类比编码”理论表明，当学习者在多个不同领域中反复提取同一深层结构时，该结构的心理表征会得到强化，从而提升其在新情境中的自动激活概率。本方案从关联矩阵到图拉普拉斯再到紧束缚哈密顿量，本质上是让同一数学结构在“电路分析”“图论”和“固体物理”三个语境中反复出现，构成一种设计精良的类比编码序列。

这一设计有望在学生的头脑中留下可迁移的“结构思维”印记。在后续信号完整性、电磁兼容等涉及寄生耦合路径分析的课程中，接受过本方案训练的学生可能表现出更强的拓扑直觉——他们或许更倾

向于首先画出简化的连接拓扑图,再分析可能的串扰路径,而非立即跳入具体的电磁场仿真参数。这一假设可以通过后续课程的教师质性访谈和学生的出声思维实验进行追踪验证。

教育学中的“期望-价值理论”指出,当学生发现所学内容与真实的科学前沿存在直接联系时,其内在学习动机和学科认同感将显著提升。本方案的第四阶段将学生在第一周就接触的 KCL 方程,与近年来发表在《自然·物理》等顶级期刊上的拓扑电路研究直接关联起来,从基础知识向学科前沿的跃升很可能触发强烈的认知情感体验。

可以预期,参与本方案的学生在期末匿名调查中,表示“对电路理论与现代物理交叉方向产生兴趣”的学生比例将明显高于常规课程,部分学生可能自发延伸阅读相关文献或寻求进一步的科研训练机会。这一方案有望在低年级本科生中有效激发科研兴趣,对其学术志向的早期形成产生积极影响,可以通过标准化学习动机量表和开放式问卷加以测量。

为将上述理论预期转化为可检验的实证结论,我们设计了以下评估框架,供后续教学实验直接采用。

研究设计:采用非等值对照组前后测准实验设计,在自然教学班基础上设置实验班和对照班,确保两班学生在入学成绩、先修课程等方面具有可比性。

测量工具:

1) 概念理解深度量表:包含三个维度——① KCL/KVL 本质理解的开放性问答题(编码为“代数操作层”“文字转述层”“结构约束层”三个层次);② 节点导纳矩阵稀疏模式填空题(给定拓扑图,勾画非零元位置);③ “电路方程-紧束缚方程”对应关系辨识题。

2) 工程直觉迁移测试:在课程结束后一个学期,于后续课程(如信号完整性分析)中嵌入 2~3 道与网络拓扑分析相关的简答题,由任课教师盲评两组学生的回答质量。

3) 学习动机与科研兴趣问卷:综合改编自 MSLQ (Motivated Strategies for Learning Questionnaire)中内在价值分量表,并增设 4 道针对“科研兴趣激活”的自编题,采用李克特五点量表。

数据分析方案:概念理解得分采用协方差分析,以前测成绩为协变量;质性开放题采用卡方检验比较两组在认知层次分布上的差异;迁移测试和动机问卷采用独立样本 t 检验。

本方案的有效实施依赖几个前提条件。首先是教师的知识整合能力——电路教师需具备固体物理中紧束缚模型的基本知识。在推广阶段,建议采用跨学科集体备课或由电路教师与物理教师组成教学团队联合授课。其次是实验硬件条件——SSH 模块的面板实验对元件精度和测试设备有一定要求,适合在实验条件较好的院校先行开展,条件暂不充分的院校可先以仿真环节为起点。教育部高等学校电工电子基础课程教学指导分委员会发布的教学基本要求[9]明确鼓励各高校在基础课中融入反映学科前沿的教学内容,本方案正是对这一指导思想的积极响应,可借助各级教改项目的支持逐步完善实证数据积累。

让电气工程专业的学生接触紧束缚模型和拓扑边缘态,是否偏离了“培养工程师”的目标?本方案回答了这一疑问,本方案所训练的拓扑思维可转化为工程问题分析能力。高速数字电路中,差分信号要求传输线对保持严格的对称性。当差分对遇到过孔 stub、连接器引脚不对称或参考平面不连续时,差模信号会部分转换为共模信号,成为 EMI 的主要辐射源。从电路网络的角度看,这一“模式转换”现象可以直接类比于拓扑边界态的形成机制:理想对称差分对是一个二聚化的平衡网络,每条线的对地电容和耦合电感的矩阵具有对称性,网络的“体态”支持纯差模传输;当某一处出现不对称(例如一条线对地电容增加),就相当于在网络中引入了一个“对称性破缺的边界”,它会在特定频率下将部分差模能量耦合到共模通道,产生共模响应。在 SSH 拓扑电路模块中,学生反复验证过“体带隙中边界态的出现源于二聚化参数的差异”以及“改变边界条件会重塑模式分布”这两个核心结论。当他们将此经验迁移到差分线设计中时,就会更加自觉地去审视 PCB 版图上的每一个不对称结构,预判其成为“模式转换边界”的可能。这种从连接拓扑和对称性出发分析信号完整性问题的思维路径,正是拓扑思维在工程中的直接投

影,也是本方案期待学生最终内化的那一种“结构直觉”。后续的实证研究可以通过在 SI/EMC 课程中设置差分对模式转换的分析任务,检验实验班学生是否更倾向于首先识别对称性破缺点,再定量评估模式转换水平,以验证这一迁移效果。

7. 结语

基尔霍夫定律从诞生到今天已逾一百七十年,它的教学形式似乎早已固化。然而,当我们将视线从“如何让学生更快地算对电流电压”这个层面稍稍抬起,就会看到定律内部蕴藏着一套无比精美的拓扑骨架——它仅仅依赖于连接,不依赖于元件,它经由关联矩阵通向拉普拉斯算子,又经由拉普拉斯算子与当代凝聚态物理最激动人心的拓扑物态研究无缝对接。这一骨架在传统课堂中被数学的细节掩埋,而我们所做的,不过是擦去它身上厚厚的代数尘埃,让它重新显露出清晰的结构轮廓。

本文提出的“四阶渗透式概念演化”设计,其灵魂并不在于教会学生多少拓扑物理的知识点,而在于为他们建立一条可以从电路分析走向科学前沿的、连续的认知阶梯。当一名大一学生因为理解了 KCL 的结构意义,最终在自己搭建的电路上观测到拓扑边界态时,这节课所给予他的,就不仅是电路知识,更是一种作为一名未来的工程师或科学家的身份认同——他们手中握着的,是一门连接基础电路理论与现代物理学前沿的语言。

在工程教育认证日益强调“解决复杂工程问题能力”和“终身学习意识”的今天,我们有充分的理由,从那些被认为早已熟透的基础内容中,重新唤醒沉睡的科学线索。基尔霍夫定律是一座静卧在我们教案之中的桥梁,它的这一端是电气工程,另一端是现代物理学。搭建这座桥,是教研工作者的使命,也是馈赠。

基金项目

本工作得到湖北省青 A 项目(2025AFA081),湖北省教育厅重点项目(D20241004),湖北大学原创探索种子专项的资助。

参考文献

- [1] Hayt Jr, W.H., Kemmerly, J.E. and Durbin, S.M. (2012) Engineering Circuit Analysis. 8th Edition, McGraw-Hill.
- [2] 邱关源, 罗先觉. 电路[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [3] Lee, C.H., Imhof, S., Berger, C., Bayer, F., Brehm, J., Molenkamp, L.W., *et al.* (2018) Topoelectrical Circuits. *Communications Physics*, **1**, Article No. 39. <https://doi.org/10.1038/s42005-018-0035-2>
- [4] Imhof, S., Berger, C., Bayer, F., Brehm, J., Molenkamp, L.W., Kiessling, T., *et al.* (2018) Topoelectrical-Circuit Realization of Topological Corner Modes. *Nature Physics*, **14**, 925-929. <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0246-1>
- [5] Helbig, T., Hofmann, T., Imhof, S., Abdelghany, M., Kiessling, T., Molenkamp, L.W., *et al.* (2020) Generalized Bulk-Boundary Correspondence in Non-Hermitian Topoelectrical Circuits. *Nature Physics*, **16**, 747-750. <https://doi.org/10.1038/s41567-020-0922-9>
- [6] Stegmaier, A., Fritzsche, A., Sorbello, R., Greiter, M., Brand, H., Barko, C., *et al.* (2025) Topological Edge States in the Frequency Dimension and Their Realization with Floquet Electrical Circuits. *Physical Review Research*, **7**, Article 043118. <https://doi.org/10.1103/6n5m-wvs7>
- [7] Felder, R.M. and Brent, R. (2024) Teaching and Learning STEM: A Practical Guide. Wiley.
- [8] Balabanian, N. and Bickart, T.A. (1969) Electrical Network Theory. Wiley.
- [9] 教育部高等学校电工电子基础课程教学指导分委员会. 高等学校电子电气基础课程教学基本要求[M]. 北京: 高等教育出版社, 2024.
- [10] Chi, M.T.H. (2013) Two Kinds and Four Sub-Types of Misconceived Knowledge, Ways to Change It, and the Learning Outcomes. In: *International Handbook of Research on Conceptual Change*, Routledge, 49-70.