

留数定理与傅里叶变换的实验例证式教学研究 ——以一维散射问题为例

赵璐*, 王薇薇

中国民航大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年7月16日; 录用日期: 2026年8月18日; 发布日期: 2026年8月25日

摘要

在《复变函数与积分变换》课程中, 学生通常能够完成留数计算和傅里叶变换的公式运算, 却难以把这两部分知识联系起来, 也不清楚它们在实际问题中如何配合使用。本课程为面向工科各专业开设的公共基础课, 本方案适用于大学二年级上学期修读该课程的本科生。学生应已学习复数、留数定理和傅里叶变换的基本性质, 但不要求预先掌握格林函数和散射理论。针对这一现象, 本文选取一维弱散射问题, 设计相应的实验教学案例。首先, 将波动方程积分表示中的核函数写成傅里叶逆变换, 并通过围道积分和留数定理求得其解析式; 其次, 在弱散射的一阶近似下, 建立反射数据与目标函数傅里叶频谱的对应关系, 并利用有限频带数据近似恢复目标; 最后, 通过改变目标的位置、宽度和间距, 以及测量带宽、噪声和相位信息, 观察计算结果的变化并分析原因。教学中不展开一维散射和格林函数的一般理论, 而把简化模型作为留数定理、傅里叶变换性质和逆变换的综合应用。本文给出相应的教学内容、实验任务和评价方案, 为上述知识点的衔接教学提供一个可实施的案例。

关键词

复变函数与积分变换, 留数定理, 傅里叶变换, 一维散射, 实验例证式教学

Case-Based Experimental Teaching of the Residue Theorem and Fourier Transform —A One-Dimensional Scattering Example

Lu Zhao*, Weiwei Wang

School of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin

Received: July 16, 2026; accepted: August 18, 2026; published: August 25, 2026

Abstract

In teaching the course *Complex Functions and Integral Transforms*, students are often able to

compute residues and carry out routine Fourier-transform calculations, yet they have difficulty understanding how the two topics are connected and how they can be used together in practical problems. The course is a common foundational course for students from a range of engineering majors. The proposed unit is intended for undergraduates taking the course in the first semester of their sophomore year. Students are expected to have studied complex numbers, the residue theorem, and basic properties of the Fourier transform; no prior knowledge of Green's functions or scattering theory is required. To address this difficulty, this paper develops a teaching case around a simplified one-dimensional weak-scattering problem. First, the integral kernel associated with the wave equation is expressed as an inverse Fourier transform, and its closed-form expression is derived using contour integration and the residue theorem. Next, under a first-order approximation for weak scattering, the relationship between the reflection coefficient and the Fourier spectrum of the target profile is established, and the target is approximately reconstructed from finite-bandwidth reflection data. Numerical experiments are conducted by varying the target position, width, and separation, as well as the measurement bandwidth and noise level, and by comparing the results obtained with and without phase information. These experiments allow students to observe changes in the computed results and explain their causes. Rather than introducing the general theories of one-dimensional scattering and Green's functions, the teaching design uses the simplified model to bring together the residue theorem, properties of the Fourier transform, and the inverse Fourier transform in a single application. The paper presents the teaching content, experimental tasks, and assessment plan, providing a practical example for connecting these topics in classroom instruction.

Keywords

Complex Functions and Integral Transforms, Residue Theorem, Fourier Transform, One-Dimensional Scattering, Case-Based Experimental Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

《复变函数与积分变换》兼具理论性和应用性。留数定理、傅里叶变换、卷积、单位脉冲函数和复数相位,是通信、控制、成像与检测等后续课程常用的数学工具。实际教学中,学生往往能够按照步骤求留数、查变换表和计算逆变换,却难以解释围道为何这样选取、复相位包含什么信息以及有限频带为何会改变计算结果,也不善于把分散在不同章节的知识用于同一个问题。这与课程内容多按知识点依次讲授、缺少贯穿前后内容的综合案例有关。

已有教学研究尝试借助专业案例和数值实验增强课程的直观性。实验例证式教学已用于数论、积分变换和 Fourier 变换性质等内容[1]-[3]。文献[4]以 Chirp 信号为例,把 FRFT 的能量聚集、线性、尺度和频移性质用图像呈现出来,形成了“理论推导-实例计算-图像观察-结果解释”的教学过程;从专业课程需求和工程认证目标出发重组课程内容的研究,也为数学基础课与后续课程的衔接提供了思路[5]-[7]。不过,如果实验仅停留在“对给定对象作变换并观察图像”,学生仍可能只把图像作为公式的补充说明,难以进一步理解怎样从观测数据推断未知对象,也难以辨别离散误差、数据缺失和模型近似所产生的不同影响。

一维弱散射问题可以将上述知识串联在同一计算过程中。给定目标函数,可以计算不同波数下的反射数据;获得这些数据后,又可通过傅里叶逆变换近似恢复目标。一般情况下,散射场与目标之间存在

非线性关系;当目标较弱时,可用一阶近似将其简化为散射数据与目标傅里叶频谱之间的线性关系[8]-[10]。本文采用这一问题,目的不是增加新的理论章节,而是构造一个综合运用傅里叶逆变换、围道选择、留数计算,以及线性、平移、尺度和有限频带逆变换等知识的应用案例。

基于上述分析,本文从留数定理的应用入手,先求出波动方程积分表示中的核函数,再说明反射系数与目标傅里叶频谱之间的关系,最后利用有限频带内的数据近似恢复目标。围绕这一过程,设计目标位置、尺度、间距和测量带宽等参数实验,并设置相应的学习评价任务。教学并不要求学生系统掌握散射理论,而是引导学生在完成计算的同时,理解各公式之间的衔接,明确近似方法的适用条件,并能够分析误差产生的原因。

2. 一维散射问题中的留数定理与傅里叶变换

设实值函数 $q(x)$ 表示一维介质中的局部扰动(下文简称目标),并在有限区间外取零。波数 $k > 0$, 从左侧入射的单位平面波为 $\exp(ikx)$ 。总场满足一维 Helmholtz 型方程

$$u''(x, k) + k^2 u(x, k) = q(x) u(x, k). \quad (1)$$

在远离目标的区域,左侧入射时总场满足渐近关系

$$u_\ell(x, k) \sim \begin{cases} e^{ikx} + R_\ell(k) e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty, \\ T_\ell(k) e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $R_\ell(k)$ 和 $T_\ell(k)$ 分别为反射系数和透射系数;从右侧入射时可类似定义 $R_r(k)$ 和 $T_r(k)$ 。课堂中只需交代这些量的基本含义,并指出 $R_\ell(k)$ 和 $T_\ell(k)$ 为复数,其幅度和相位均携带目标信息,因此仅用反射能量 $|R(k)|^2$ 不能完全描述反射数据。

1) 利用留数定理计算积分核。为将式(1)转化为积分形式,考虑由傅里叶逆变换定义的核函数

$$K_k(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{k^2 - \xi^2 + i\varepsilon} d\xi. \quad (3)$$

当 $x > 0$ 时,为使 $\exp(i\xi x)$ 在大圆弧上衰减,围道在上半平面闭合;当 $x < 0$ 时,围道在下半平面闭合。计算相应极点的留数可得

$$K_k(x) = \frac{e^{ik|x|}}{2ik}. \quad (4)$$

在波动理论中,式(4)通常称为满足向外传播条件的格林函数。由于其一般理论不在课程范围内,课堂只把 $K_k(x)$ 作为傅里叶逆变换和留数定理的一个计算实例,不讨论格林函数的定义、分类和存在唯一性。此处要求学生说明:指数因子的衰减为何决定围道闭合方向,围道内包含哪些极点,以及各极点的留数怎样组成最终结果。

2) 说明反射数据与目标频谱的关系。利用式(4),可将微分方程写成

$$u(x, k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K_k(x-y) q(y) u(y, k) dy. \quad (5)$$

由于积分中的总场 $u(y, k)$ 又依赖 $q(y)$, 因此由 q 到 u 的关系一般不是线性的。当 q 较小时,可用入射场 e^{iky} 代替总场,得到一阶近似。该处理在散射理论中称为一阶 Born 近似,课堂只说明这一假设的作用和适用范围,不展开其一般理论。由此得到左、右反射数据的一阶公式

$$R_\ell^{(1)}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{2iky} dy = \frac{\hat{q}(-2k)}{2ik}, \quad (6)$$

$$R_r^{(1)}(k)=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(y)e^{-2iky}dy=\frac{\hat{q}(2k)}{2ik}, \tag{7}$$

这里采用 $\hat{q}(\xi)=\int q(x)e^{-i\xi x}dx$ 。式(6)和式(7)表明, 左、右反射数据分别对应 q 在负、正空间频率处的傅里叶变换值。因此, 改变目标的强度、位置和宽度, 会分别反映为反射数据幅度、相位和频谱宽度的变化, 可以直接用傅里叶变换的线性、平移和尺度性质解释。

3) 利用有限频带数据近似恢复目标。根据左、右反射数据, 可构造目标频谱的近似值

$$\hat{q}_{\text{rec}}(\xi)=\begin{cases} i\xi R_r(\xi/2), & \xi>0, \\ -i\xi R_l(-\xi/2), & \xi<0. \end{cases} \tag{8}$$

再作傅里叶逆变换, 可得目标的近似恢复结果

$$q_{\text{rec}}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{q}_{\text{rec}}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{9}$$

实际测量往往只覆盖 $0<k\leq K$, 因而只能获得 $|\xi|\leq 2K$ 范围内的频谱。若采用矩形频率窗, 恢复结果满足

$$q_K=q*h_K, \quad h_K(x)=\frac{\sin(2Kx)}{\pi x}. \tag{10}$$

式(10)表明, 频谱截断会使恢复结果等于真实目标与 sinc 型核的卷积。由此可以解释目标轮廓变宽、出现旁瓣以及相邻目标难以分辨等现象。与此同时, 式(8)需要用 ξ 乘反射数据, 因而可能放大高频噪声。教学中应着重说明三个问题: 围道选择和留数计算如何给出积分核; 反射公式中的 $2k$ 为什么对应频谱采样位置; 有限频带为什么会限制恢复结果的清晰度。

3. 实验例证设计

实验程序按教学进程依次呈现四类结果: 复平面中的极点和围道、波动方程的积分核、不同波数下的复反射数据, 以及真实目标与恢复结果的比较。每组实验都遵循“先判断、再计算、后解释”的顺序。学生先写出对结果变化的判断及依据, 再运行程序, 并对照公式解释结果; 如果判断与计算不一致, 还需分辨原因是概念理解有误、离散采样不充分、数据不完整, 还是一阶近似不再适用。主要实验见表 1, 教学内容与课堂活动的安排见图 1。

Table 1. Main experimental contents
表 1. 主要实验内容

实验内容	参数或操作	主要现象	解释重点
单高斯目标	改变目标强度、位置、宽度及频带上限 K	反射数据的幅度、相位和谱宽随之变化; 恢复清晰度受 K 影响	分别用线性、平移和尺度性质解释各项变化
双目标	改变目标间距 d 和频带上限 K	干涉条纹的疏密发生变化; 恢复结果中的两峰由可分辨逐渐变为重叠	结合 $2\hat{q}_0(\xi)\cos(\xi d/2)$ 说明间距、干涉条纹和分辨能力之间的关系
相位缺失	去除相位信息, 只保留 $ R(k) $	恢复峰值移至原点附近, 真实位置无法确定	说明线性相位含有位置信息, 幅度相同不等于目标相同

续表

频带、采样与噪声	改变 K 、采样间隔、噪声水平和窗函数	出现模糊、振铃、混叠或随机波动	辨别频带不足、离散采样和随机噪声造成的不同影响
一阶近似的适用性	用较精确的散射模型生成数据, 并逐步增大目标强度	即使没有随机噪声, 恢复结果仍出现有规律的幅值或形状偏差	检查 $u \approx e^{ikx}$ 是否仍可采用, 避免把模型误差一概归因于程序

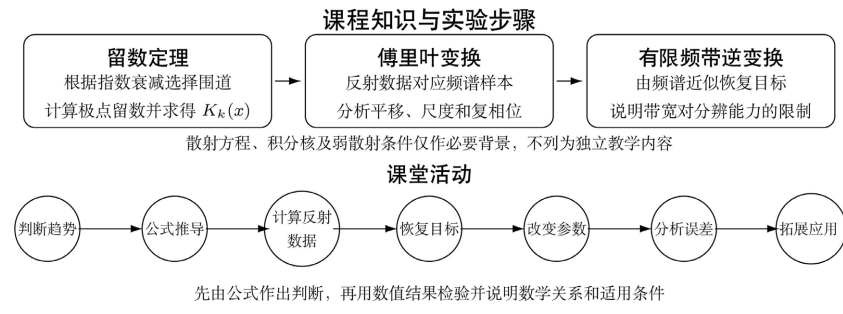


Figure 1. Teaching content and classroom activity arrangement
图 1. 教学内容与课堂活动安排

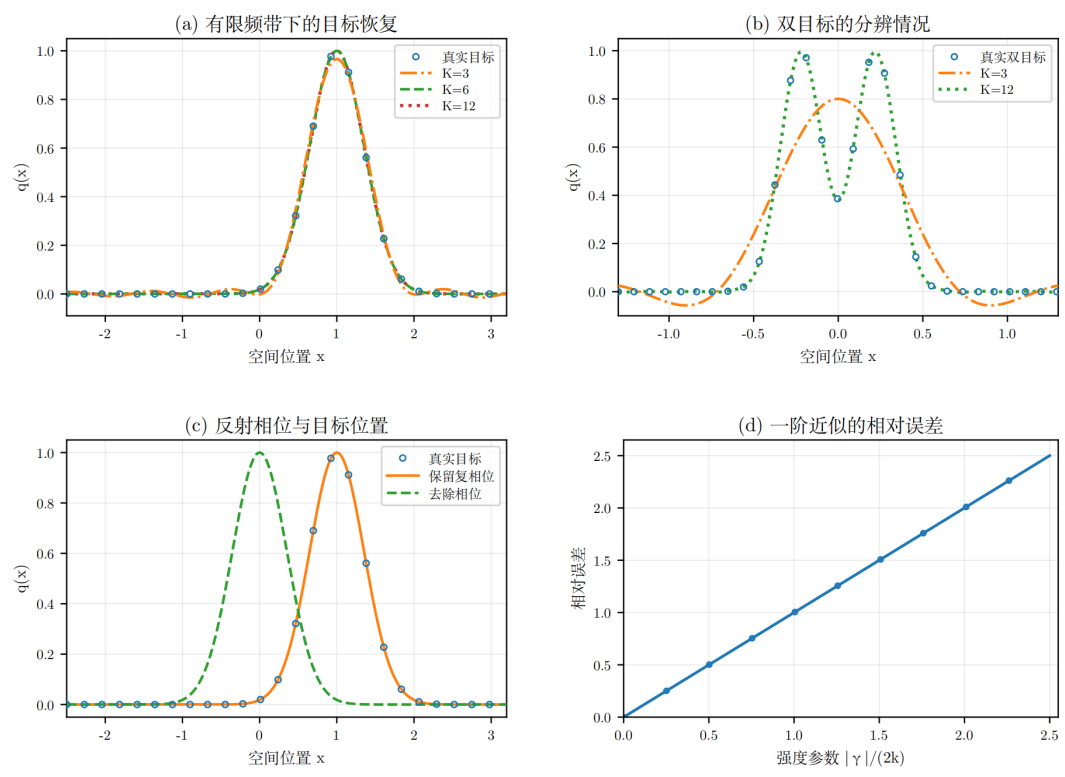


Figure 2. Typical experimental results: (a) Target recovery under finite frequency band; (b) Resolution of two targets; (c) Reflection phase and target position; (d) First-order approximation error of point target reflection data
图 2. 典型实验结果: (a) 有限频带下的目标恢复; (b) 双目标的分辨情况; (c) 反射相位与目标位置; (d) 点目标反射数据的一阶近似误差

图 2(a)显示, 随着带宽增大, 单目标的恢复轮廓逐渐接近真实形状; 低带宽下的展宽和旁瓣可由式

(10)中的 sinc 型核解释。图 2(b)说明, 在目标间距不变时, 带宽不足会使两个目标在恢复结果中合并。图 2(c)中, 保留复相位时可以恢复 $x=1$ 附近的目标; 去除相位后, 恢复峰值移至原点, 表明目标位置主要记录在线性相位中。图 2(d)取点目标 $q(x)=\gamma\delta(x)$, 其反射系数可直接求得为 $R=\gamma/(2ik-\gamma)$, 一阶近似为 $R^{(1)}=\gamma/(2ik)$, 相对误差为 $|\gamma|/(2k)$ 。由此可见, 目标强度增大或波数减小时, 一阶近似的误差会随之增大。

为避免图像和参数过多造成认知负担, 实验界面应按步骤呈现: 先显示围道与积分核, 再显示反射数据和恢复结果, 最后进行综合比较。讲义、程序和图例应使用统一的符号及傅里叶变换约定。基础任务只保留少量参数, 并要求学生手算一个关键关系; 学习单可设置“观察现象-对应公式-成立条件”三栏, 使数值实验服务于理论理解, 而不是取代数推导。

计算平台与实现步骤。实验采用 MATLAB 实现, 利用其矩阵运算、数值积分和绘图功能计算反射数据并显示目标恢复结果。关键步骤如下。

算法 1. 有限频带反射数据生成与目标恢复

1. 输入空间网格 x_m 、目标函数 $q(x_m)$ 、波数采样点 k_j 和频带上限 K ;
2. 数值计算 $\hat{q}(\pm 2k_j)$, 并由式(6)和式(7)生成左右反射数据;
3. 按式(8)组装 $|\xi|\leq 2K$ 内的频谱, 频带外置零;
4. 对频谱作离散傅里叶逆变换, 得到 $q_{\text{rec}}(x_m)$;
5. 改变目标参数、频带和噪声水平, 比较并解释恢复结果。

4. 教学实施与评价

教学对象与分层支持。《复变函数与积分变换》是面向工科各专业开设的公共基础课, 本方案的教学对象为大学二年级上学期本科生。学生应已学习复数、留数定理和傅里叶变换的基本性质, 但不要求预先掌握格林函数和散射理论。考虑到不同专业学生的知识背景存在差异, 对缺少波动背景的学生, 提供 2~3 页的“一维波动与散射基础”简明讲义, 介绍入射波、反射波、复反射系数和弱散射近似; 对程序设计基础较弱的学生, 提供程序模板; 基础较好的学生可进一步完成窗函数比较和近似误差分析。

课时安排。本单元采用“4 学时课堂教学 + 2 学时上机实验”的形式, 具体安排见表 2。

Table 2. Allocation of teaching hours
表 2. 教学课时分配

课时	教学内容	主要活动
第 1~2 学时	围道选择、留数计算与积分核算	完成关键推导并说明围道闭合方向
第 3~4 学时	一阶近似、反射数据与频谱关系、有限频带恢复	解释 $2k$ 、相位和带宽的作用
第 5~6 学时	单目标、双目标、相位缺失及误差实验	运行程序、改变参数并提交实验记录

课堂活动与评价内容应保持一致, 具体安排见表 3。

条件允许时, 可在同一专业的两个平行班开展准实验。实验班采用本文方案, 对照班由同一教师在相同课时内讲授相同知识点, 但以公式讲解、例题计算和静态图示为主。两班均完成前测、即时后测、两至三周后的延迟测和新的应用题。若仅有一个班级, 可采用单组前测、后测和延迟测, 并结合书面解

释、实验记录和访谈进行分析。无论采用何种设计，都应关注学生在概念理解、解释和应用能力上的实际变化，并如实呈现未改善的内容和仍然存在的困难。

Table 3. Teaching process and evaluation materials
表 3. 教学流程与评价材料

环节	主要任务	学生完成的内容	评价材料
课前复习	复习留数、傅里叶变换的平移与尺度性质，以及复数的模与辐角	对围道选择和参数变化作出初步判断	前测及典型错误记录
公式推导	由傅里叶逆变换和留数定理求积分核，再由一阶近似得到反射数据公式	完成关键推导、示意图和口头说明	公式理解题和关系解释题
参数实验	完成单目标、双目标、相位缺失和有限频带实验	提交计算结果及“现象 - 公式 - 条件”记录	即时后测和实验记录
误差分析与拓展	比较噪声、采样、带宽和近似条件的影响，并讨论超声或雷达中的类似问题	说明误差来源，并针对新情境写出简化模型	延迟测试、应用题和访谈

测评可从三个方面展开。第一，学生能否说明围道选择、留数计算、积分核、反射数据和傅里叶逆变换之间的联系；第二，能否说明相位、带宽、噪声和一阶近似分别怎样影响结果，并辨别频带不足、数值误差和模型近似造成的不同偏差；第三，能否把上述数学方法用于分层介质、超声检测或雷达测距等新的情境。题型应包括示意图、解释题和误差判断题，不宜全部采用代数计算。评价不考查格林函数的一般定义、传播条件的严格表述或散射方程的存在唯一性，也不把专业名词记忆作为评分依据。解释题可按 0~3 分评分：0 分为空白或答非所问，1 分只能描述现象，2 分能够引用公式但解释不完整，3 分能够同时说明现象、数学关系和成立条件。量化资料可比较前测、后测、延迟测和应用题得分，并报告效应量；书面解释和访谈则用于分析学生认识的变化及典型错误。

实施时还需注意三点。第一，公式和图像应分步呈现，让学生先理解每一步与前一步的关系，再观察完整计算过程，避免过多动态信息掩盖核心问题。第二，程序只承担参数扫描、结果对照和误差展示；积分核的留数计算、反射公式中 $2k$ 的来由以及有限频带卷积核等关键环节，仍应要求学生手算或完成半推导。第三，应明确弱散射、复反射数据和目标局限于有限区间等前提，并说明不同的傅里叶变换约定可能带来常数或符号差异。课堂中的目标恢复只是简化模型下的近似计算，不能等同于一般散射问题的完整求解。

如果据此开展实证研究，还应交代学生的专业和年级、实际课时、缺失数据处理方法以及评分者一致性。单班前后测只能反映教学前后的变化，不能据此作出严格的因果推断；平行班研究也应报告未出现预期改善的测评项目和典型错误，使结论建立在完整、真实的数据上。

5. 结语

本文以简化的一维弱散射问题为应用案例，将留数定理和傅里叶变换贯穿于同一计算过程。学生先由傅里叶逆变换和留数定理求出波动方程积分表示中的核函数，再根据给定目标计算复反射数据，最后利用有限频带数据近似恢复目标。改变目标的位置、宽度和间距，以及测量带宽、噪声水平和目标强度，可以观察这些变化在反射数据中的表现，并比较复相位、频带限制和一阶近似对恢复结果的影响。

本文选取一个模型简明、数学关系集中的问题, 说明课程中的不同知识如何在同一实际问题中配合使用。该案例的教学重点, 是使学生由“会算”进一步走向“会解释”: 既能给出留数和逆变换结果, 也能说明围道选择的依据、相位与位置的关系、带宽对分辨能力的限制, 以及一阶近似失效的原因。后续可在真实课堂中采用前测、后测和延迟测, 比较不同基础的学生对这些关系的理解变化, 并考察教师演示、分组实验和学生独立操作等实施方式的差异。

参考文献

- [1] 常万里, 李晓东, 张艳硕. 基本数论问题的例证教学方法研究与实践[J]. 北京电子科技学院学报, 2021, 29(2): 101-110.
- [2] 朱亚红, 张晓君, 王惠珍, 等. 工程例证教学法在《积分变换》课程教学中的实践研究[J]. 教育教学论坛, 2015(37): 145-146.
- [3] 吴聪伟, 曹继平, 朱亚红. 工程例证式教学法的实践研究: Fourier 变换的频移特性[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2016, 25(4): 68-71.
- [4] 郭勇, 杨立东. “复变函数与积分变换”实验例证式教学方法研究——以 FRFT 为例[J]. 科技资讯, 2026, 24(1): 215-218.
- [5] 朱四如, 胡军涛, 宋淑玲. 基于专业课程视角下的复变函数与积分变换课程教学实践[J]. 大学数学, 2024, 40(1): 42-49.
- [6] 孙长平, 卢兆信, 王法社. 工程认证下复变函数与积分变换课程教学模式探索与实践[J]. 高教学刊, 2024, 10(3): 125-128.
- [7] 华杰, 董贺, 汪玉海, 等. 复变函数与积分变换课程教学方法[J]. 高师理科学刊, 2022, 42(9): 67-69.
- [8] Colton, D. and Kress, R. (2019) Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. 4th Edition, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-30351-8>
- [9] Devaney, A.J. (2012) Mathematical Foundations of Imaging, Tomography and Wavefield Inversion. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139047838>
- [10] Newton, R.G. (1982) Scattering Theory of Waves and Particles. 2nd Edition, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-88128-2>