

人工智能前沿融入《数学分析》的教学重构 ——“一图三层五环”模式及实施路径

杨普天

重庆科技大学数理科学学院，重庆

收稿日期：2026年7月23日；录用日期：2026年8月24日；发布日期：2026年8月31日

摘要

面向人工智能应用对数学基础、算法解释与工程迁移能力提出的新要求，针对《数学分析》课程中理论知识与算法场景割裂、抽象概念呈现单一、实践任务碎片化以及生成式人工智能使用规范缺位等问题，采用文献研究、设计研究、行动研究与专家评议相结合的方法，构建“一图三层五环”教学重构模式。其中，“一图”是数学分析知识与人工智能技术的双向映射图谱；“三层”依次为概念锚定、算法阐释和工程迁移；“五环”包括问题情境、数学推导、代码实现、可视诊断与迁移反思。研究进一步设计梯度下降、链式法则与误差反向传播、管网仿真模型参数调优等案例，并建立与课程目标一致的多元评价量规和“可用－需核－须述－可追”的人工智能使用规则。该模式把人工智能由外置教学工具转化为检验数学概念、定理条件和知识迁移的应用语境，在不削弱证明训练的前提下形成可实施、可评价、可迭代的课程改革路径。

关键词

数学分析，人工智能教育，课程重构，设计研究，项目式学习

Instructional Reconstruction of *Mathematical Analysis* by Integrating Frontiers of Artificial Intelligence

—The “One-Map, Three-Level, Five-Cycle” Model and Its Implementation Path

Putian Yang

School of Mathematical and Physical Sciences, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

Received: July 23, 2026; accepted: August 24, 2026; published: August 31, 2026

Abstract

To respond to the growing demand for mathematical foundations, algorithmic interpretation, and engineering transfer in artificial-intelligence applications, this study addresses four persistent problems in *Mathematical Analysis*: the separation of theory from algorithmic contexts, limited representations of abstract concepts, fragmented practical tasks, and the absence of explicit rules for the use of generative artificial intelligence. This study employs a combination of methods including literature review, design-based research, action research, and expert review. The resulting “one-map, three-level, five-cycle” model consists of a bidirectional knowledge map linking Mathematical Analysis to artificial-intelligence techniques; three progressive levels—concept anchoring, algorithm interpretation, and engineering transfer; and five learning cycles—problem context, mathematical derivation, code implementation, visual diagnosis, and transfer reflection. Representative cases are developed around gradient descent, the chain rule and backpropagation, and parameter tuning for a pipeline-network simulation model. A multidimensional assessment rubric and a four-part governance rule—permitted use, required verification, mandatory disclosure, and traceability—are also proposed. This model transforms artificial intelligence from an external teaching tool into an application context for testing mathematical concepts, theorems, and knowledge transfer, forming an implementable, evaluable, and iterative curriculum reform path without weakening proof training.

Keywords

Mathematical Analysis, Artificial Intelligence Education, Curriculum Reconstruction, Design-Based Research, Project-Based Learning

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

人工智能技术正在重塑知识生产方式、产业流程和人才能力结构。国务院《新一代人工智能发展规划》强调基础理论、关键共性技术与产业应用的协同推进[1]，教育部《高等学校人工智能创新行动计划》进一步提出推动人工智能与教育教学深度融合[2]。生成式人工智能快速计入高校课堂后，教育改革的焦点已不再是“是否使用人工智能”，而是如何建立有助于深度学习、学术诚信和教师专业判断的使用边界。联合国教科文组织据此提出以人为本、保护数据权益和保持人类能动性的治理原则[3]，并将人工智能素养、教学设计、评价与伦理纳入教师能力框架[4]。这些变化要求基础课程既保持学科体系的稳定性，又能解释新技术背后的数学逻辑。

《数学分析》以极限、连续、微分、积分和级数为主线，是数学、统计学、数据科学等专业形成抽象思维、逻辑论证与定量建模能力的核心课程。经典教材在概念体系、定理结构和证明方法方面具有高度完整性[5]，但学生往往难以回答“这些条件为什么重要”“一个局部近似怎样转化为算法”“收敛结论如何影响工程参数”等问题。若人工智能仅被当作生成习题、自动答疑或展示动画的外部工具，课程可能变得更便利，却未必产生更深的数学理解；反之，若为了追逐技术热点而压缩定义辨析和证明训练，又会削弱《数学分析》作为基础学科课程的育人功能。

已有研究从不同侧面推进了课程改革。赵楠、叶俊佑讨论了人工智能技术在《数学分析》知识图谱、教学辅助与学习支持中的作用[6]；杨洁等从核心素养视角强调逻辑推理、数学抽象和应用意识的协同培

养[7]；杨一浓等提出以真实问题牵引数学分析知识建构[8]。国际人工智能教育研究则显示，现有实践较多聚焦预测、推荐、评价和教师支持[9]，并逐步从“人工智能指导学习者”转向“学习者与人工智能协同”以及“学习者增强人工智能”的范式[10]。人工智能素养研究也指出，学习者需要理解技术能力边界、评价输出并进行负责任的交互[11]。然而，关于“人工智能前沿知识如何反向嵌入数学分析内容体系”的研究仍相对不足，尤其缺少从定理条件、算法行为到工程迁移的一体化设计。

基于此，本文围绕三个问题展开：其一，如何建立数学分析知识与人工智能算法之间的可解释映射，同时保持概念和证明的严谨性；其二，如何把课堂活动组织为从数学推导到代码验证、再到真实任务迁移的连续学习链；其三，如何用可观察证据评价学习质量，并规范生成式人工智能在证明、编程和报告写作中的使用。本文的主要贡献是构建“一图三层五环”模式，给出知识重构、案例实施、评价量规与人工智能治理的完整方案，并以项目阶段性产出为基础说明实施条件与迭代方向。

2. 问题诊断与理论依据

2.1. 传统教学与智能时代能力要求的结构性矛盾

第一，课程内容存在“体系完整而关联隐蔽”的矛盾。极限与连续、泰勒公式、多元函数微分学、极值与级数等内容本身构成严密体系，但其与损失函数、自动微分、梯度优化、误差传播和模型稳定性的联系通常没有显性呈现。学生可以完成求导和证明，却未必能识别学习率过大为何导致迭代振荡、非光滑点为何影响梯度方法、变量尺度为何改变优化轨迹。知识在考试情境中可调用，在算法与工程情境中却难以迁移。

第二，抽象概念存在“符号推演充分而多重表征不足”的矛盾。传统板书有利于展示证明逻辑，但高维函数、方向导数、梯度场和迭代轨迹仅靠静态符号不易形成直觉。如果可视化只用于呈现漂亮图形而不与数学问题对应，又容易造成“看懂动画等于理解概念”的错觉。真正有效的多重表征应让公式、几何、数值结果和代码变量相互校验，使学生能够在不同表征之间转换。

第三，实践教学存在“案例数量增加而学习链条断裂”的矛盾。一些课程把 Python 练习、数学建模题和竞赛训练附加在理论教学之后，任务之间缺少共同的概念主线。学生可能会调用优化器，却无法说明算法依赖的可微性、光滑性和局部近似；也可能得到较低误差，却不能诊断数据尺度、初值、约束与正则项造成的影响。实践活动若没有数学解释和反思环节，容易退化为代码复现。

第四，评价与治理存在“结果可见而思维过程不可见”的矛盾。仅以期末笔试或程序输出评价学习，无法区分学生是理解了数学原理，还是依赖模板、搜索或生成式人工智能完成任务。生成式人工智能还可能产生条件遗漏、虚构引文、错误证明和不可复现代码。因而，课程改革必须同时设计过程证据、口头核验、版本记录和使用说明，使学习成果具有可解释性和可追溯性。

2.2. 理论依据与设计原则

本研究首先采用建构性对齐思想，将课程目标、学习活动与评价证据进行反向设计[12]。课程目标不再停留于“掌握某一定理”或“会使用某一算法”，而是分解为概念辨析、严谨推导、算法解释、数值诊断和工程迁移等可观察表现。每一个人工智能案例必须对应明确的数学知识点，每一种评价证据必须能回到课程目标，避免技术活动与学科目标“两张皮”。

其次，研究借鉴技术-教学法-学科内容知识框架，即教师不仅要分别掌握数学内容、教学方法和数字技术，还要理解三者交叉处的设计知识[13]。例如，使用 PyTorch 自动微分并不等同于掌握链式法则；教师需要把计算图、局部导数、维度匹配和梯度检查组织成可学习的任务。技术选择以是否揭示数学关系为标准，而非以工具新颖程度为标准。

再次，研究采用设计研究的迭代逻辑，在真实课程情境中经历“诊断－设计－实施－收集证据－修订”的循环[14]。设计产出不仅是单个教案，还包括可迁移的知识图谱、案例模板、评价量规和治理规则。认知负荷理论提醒教学材料应控制无关信息并分解复杂任务[15]；数学可视化研究强调图形应服务于关系发现和论证，而非替代符号推理[16]；主动学习的实证研究表明，解释、讨论、尝试和反馈比单向讲授更有利于学习[17]。多媒体学习理论进一步要求文字、图形与操作信息保持邻近、一致和适量[18]。

据此确立四项设计原则。第一是“严谨性优先”：人工智能案例不能替代核心定义、定理和证明，反而要成为检验条件必要性的情境。第二是“关联有据”：每个算法节点必须能回溯到具体数学概念，不以模糊类比替代推导。第三是“层级递进”：先理解概念，再解释算法，最后迁移到工程任务，避免一步跨越到复杂模型。第四是“证据闭环”：学习过程、产出质量和人工智能使用情况均需留下可评价、可复核的证据。

3. 研究设计

3.1. 研究场域与研究方法

研究依托重庆科技大学数学、统计与数据科学类专业的《数学分析》课程开展。课程由数学分析 I、II、III 等模块构成，前期校本讲义已在应用统计学专业连续试用，覆盖学生 200 余人，为识别学习难点、调整章节顺序和开发应用案例提供了基础。项目组由数学、统计、优化、计算数学和机器学习教师组成，并以企业管网仿真模型自适应调参任务作为工程案例来源。由于项目仍处于分阶段实施和成果凝练期，本文重点报告设计逻辑、教学产品与评价方案，不以尚未完成的跨学期数据推断因果效果。

研究综合采用四种方法。文献研究用于梳理政策、人工智能教育、数学课程改革和算法数学基础；设计研究用于生成并迭代课程模型；行动研究用于在具体教学单元中进行“小步试用－即时反馈－修订”；专家评议用于审查知识映射、案例难度、工具配置和评价指标。上述方法共同服务于“形成可执行方案并持续改进”的研究目标，而不是追求脱离情境的单次效果比较。

3.2. 设计流程与证据链

课程重构按六个步骤推进。第一步，分析培养方案、课程大纲和典型学习困难，形成问题清单。第二步，从人工智能任务反向提取数学需求，建立知识节点与关系边。第三步，依据“概念锚定－算法阐释－工程迁移”开发分层案例。第四步，把案例嵌入相应章节，设计课堂活动、代码笔记本和可视化材料。第五步，通过试讲、学生作品、课堂观察与专家意见修订。第六步，将成熟资源标准化为案例卡、实验指导书和评价量规，纳入动态资源库。

证据链包括五类材料：一是概念图、证明草稿和课堂即时解释，用于判断数学理解；二是可运行代码、参数实验和错误诊断记录，用于判断算法解释能力；三是项目报告、模型假设和结果敏感性分析，用于判断迁移能力；四是学习日志、同伴互评和口头答辩，用于识别思维过程；五是人工智能使用说明、关键提示词、版本差异和来源核验记录，用于判断学术诚信与人机协作质量。后续效果研究将以等值概念题、延迟测验和作品量规为主，成绩变化仅作为证据之一。

3.3. 改革边界与伦理要求

本研究明确三条边界。其一，数学分析仍以定义、定理、证明和反例为主轴，人工智能内容按“就地嵌入”而非另起炉灶的方式进入课程。其二，代码用于检验猜想、比较条件和暴露错误，不能替代数学论证；任何数值现象都要说明其适用范围。其三，企业案例使用脱敏或合成数据，不公开商业参数与生产信息。涉及学生数据时采用匿名化汇总，教学评价与研究分析相分离，避免将技术熟练度简单等同于数学能力。

4. “一图三层”的教学内容重构

4.1. “一图”：数学分析 - 人工智能双向知识映射

“一图”不是把章节名称与算法名称机械连线，而是由知识节点、关系边和任务节点组成的双向图谱。数学节点包括定义、定理、方法、反例与证明策略；人工智能节点包括模型结构、目标函数、优化过程、数值现象和工程约束；关系边则标注“提供局部近似”“给出收敛条件”“解释误差来源”“形成可计算表达”“限制算法适用范围”等语义。双向性意味着教师既能从数学章节寻找应用情境，也能从算法故障追溯所缺失的数学条件。机器学习数学基础研究表明，微积分、线性代数、概率与优化之间需要通过任务组织形成整体理解[19]；深度学习理论也把梯度计算、表示学习与数值优化置于统一框架中[20]。

图谱建设遵循“核心知识不减、关联节点精选、前沿案例可更新”的原则。人工智能技术更新很快，但其背后的局部线性化、复合函数求导、凸性、积分与期望、迭收敛等数学结构相对稳定。因此，课程不追逐模型名称，而是选择能够反复迁移的数学 - 算法接口。表 1 给出核心映射示例。

Table 1. Mapping between core contents of Mathematical Analysis and artificial-intelligence tasks

表 1. 数学分析核心内容与人工智能任务的映射

数学分析内容	人工智能关关节点	数学作用	典型任务	层级
极限与连续	损失函数连续性、迭代稳定性	刻画逼近与扰动响应	比较连续/不连续目标的训练轨迹	概念
导数与微分	局部线性化、敏感性、自动微分	建立参数变化的一阶近似	数值梯度与自动微分校验	概念/算法
中值定理与泰勒公式	误差界、步长选择、Newton 思想	解释近似精度与下降条件	学习率、曲率与收敛诊断	算法
数列与级数	迭代收敛、截断、极限交换	分析序列行为与近似累积	损失序列和梯度范数监测	概念/算法
多元微分与梯度	梯度下降、反向传播	把复合函数变化转化为可计算梯度	手写梯度与计算图分析	算法
极值、凸性与 Hessian	损失曲面、局部极小、鞍点	给出最优性与曲率判据	等高线、初值和尺度比较	算法/迁移
积分与含参积分	期望风险、归一化、积分下求导	连接总体目标与样本近似	数值积分和蒙特卡洛误差	迁移
凸函数与不等式	交叉熵、正则化、上界估计	构造可优化目标与性能界	比较正则项和泛化现象	迁移

该映射同时服务于大纲修订和学习导航。教师可以在讲授某一定理前用任务节点提出问题，在定理证明后回到算法节点解释条件，学生则可依据图谱识别自己缺失的是概念、推导还是工程知识。图谱中的每条关系边都应附带一个“可验证动作”，如构造反例、改变学习率、比较数值梯度与自动微分、分析尺度变换后的轨迹，避免知识关联停留在口号层面。

4.2. “三层”：概念锚定、算法阐释与工程迁移

第一层是概念锚定。教学从一个可理解的人工智能现象切入，但结论必须回到数学定义。例如，用

损失函数曲线在某点“看起来平滑”引出可导与连续的区别，用小批量训练中的波动讨论数列收敛与随机扰动，用激活函数在零点的折角辨析可导性。此层强调语言转换：学生要能把“模型不稳定”“参数敏感”等工程表述翻译为连续性、条件数、导数大小或误差界等数学问题。

第二层是算法阐释。学生利用定理和证明结构解释算法步骤，而非只记忆流程。以反向传播为例，核心不是会调用自动微分，而是理解复合映射的链式法则、雅可比矩阵的维度、局部导数的乘积及误差沿计算图传播的路径。经典反向传播工作展示了通过复合函数求导更新网络参数的基本机制[21]。在此层，教师有意设计“条件被破坏”的实验，例如将光滑激活函数替换为分段函数、改变变量尺度或使用过大的步长，让学生用数学语言解释现象。

第三层是工程迁移。学生面对含噪数据、参数约束、计算预算和模型偏差的任务，需要完成问题抽象、目标函数构建、方法选择、结果诊断与局限说明。迁移并不要求所有学生训练复杂大模型，而是要求他们识别数学工具的功能边界。例如，当仿真器不可微时，有限差分的截断误差和舍入误差如何权衡；当目标函数非凸时，局部极小值、鞍点和初值如何影响结果；当变量量纲差异较大时，归一化为何改变优化效率。

三层并非三个孤立单元，而是同一知识点的递进任务。概念锚定解决“是什么”，算法阐释解决“为什么这样做”，工程迁移解决“在约束条件下怎样做得可靠”。不同学情可以停留在不同深度，但所有学生都必须完成第一层，第二层构成课程达成的核心证据，第三层用于高阶任务、课程项目和竞赛训练。

4.3. 章节嵌入与课时组织

课程内容重构采用“章节主线不变、应用接口前置、综合任务后置”的嵌入方式。极限与连续章节重点设置稳定性、逼近和反例任务；一元微分学章节设置局部线性化、泰勒近似与步长问题；多元微分学章节集中处理梯度、方向导数、链式法则和极值条件；积分与级数章节则连接期望风险、数值积分、截断误差和迭代序列。人工智能案例不单独形成与数学章节平行的知识块，而是在“导入－例题－作业－实验－项目”五种位置中选择最合适的入口。

课时组织遵循“短案例高频出现、长项目低频整合”的策略。短案例通常在一个知识点内完成现象观察、关键推导和微型验证，用于建立关联；中型实验跨越一至两个课时，要求学生提交代码、图形和解释；综合项目在学期后段汇聚多个知识节点，承担工程迁移与团队协作。为防止应用内容挤压证明训练，教师在大纲中为每个案例标明其替代的是重复性计算、单纯展示还是课外拓展，而不以减少核心定理和典型证明为代价。

在专业适配方面，同一数学节点允许使用不同情境。统计类专业可侧重损失期望、参数估计与数值稳定性，数据科学类专业可侧重自动微分与优化，数学类专业则可加强收敛证明、反例构造和算法条件的形式化表达。由此形成“数学核心统一、任务情境可变、评价标准分层”的课程结构。

5. “五环”教学实施与典型案例

5.1. 五环学习链

为避免理论课、编程课和项目实践相互割裂，本研究将每个融合案例组织为五个连续环节：问题情境提出可解释的真实矛盾；数学推导提炼变量、假设和定理条件；代码实现把推导转化为可复现程序；可视诊断比较参数、误差和轨迹；迁移反思要求学生说明方法边界并推广到新任务。五环既是课堂流程，也是学生报告的结构。其关系如图1所示。

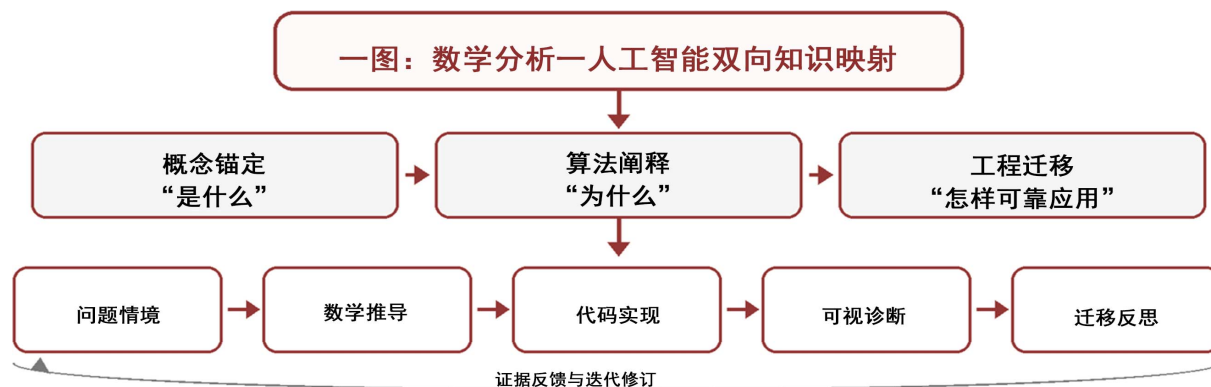


Figure 1. The “one-map, three-level, five-cycle” teaching reconstruction model

图 1. “一图三层五环”教学重构模型

五环允许在不同课时中展开，但不能省略“数学推导”和“迁移反思”。前者防止案例沦为工具演示，后者防止学生把一次成功运行误认为普遍结论。教师可以在问题情境和可视诊断阶段使用交互平台，在推导阶段回归板书和证明，在代码阶段使用 Jupyter Notebook 或 PyTorch，在反思阶段组织同伴质询和口头解释。

5.2. 案例一：从泰勒公式到梯度下降

问题情境设置为“同一回归模型为何因学习率不同而出现缓慢收敛、振荡甚至发散”。学生先对一元二次函数进行手算，再推广到多元损失函数。数学推导以一阶泰勒展开和光滑性为核心。若目标函数 J 的梯度满足 M -Lipschitz 条件，则沿负梯度方向更新

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta \nabla J(\theta_k) \quad (1)$$

可得到下降估计

$$J(\theta_{k+1}) \leq J(\theta_k) - \eta(1 - M\eta/2) \|\nabla J(\theta_k)\|^2. \quad (2)$$

式(2)把抽象条件转化为可观察结论：当 $0 < \eta < 2/M$ 时，单步下降具有理论保证；步长过大可能破坏下降性。学生需要指出该结论依赖光滑性，并讨论非凸情形下“下降”并不等同于到达全局最优。大规模机器学习优化研究对随机梯度、步长和收敛行为作了系统分析[22]，凸优化理论则为凸性、强凸性与最优性条件提供了统一框架[23]。

代码实现采用三个递进任务。基础任务手写梯度下降并记录每次迭代的参数、损失和梯度范数；进阶任务比较固定步长、衰减步长和标准化前后的轨迹；拓展任务调用 Adam 并解释其一阶矩、二阶矩估计与自适应步长思想[24]。可视诊断要求在同一坐标系中呈现等高线、迭代轨迹和损失曲线，并用式(2)解释至少一种异常现象。迁移反思则把结论推广到不同曲率方向、批量噪声和正则化情境。

该案例的评价重点不是“最终损失最低”，而是学生能否建立步长、光滑常数、曲率和收敛现象之间的因果解释。对于只会调用优化器的程序，教师通过随机改变初值、尺度和函数形式进行口头追问；对于数学推导正确但代码异常的作品，则要求定位变量维度、梯度符号和停止条件。这种双向核验把证明能力与计算能力置于同一证据链中。

5.3. 案例二：链式法则与误差反向传播

该案例从一个两层网络或复合函数 $J = \ell(f_2(f_1(x; W_1)); W_2)$ 出发，让学生先绘制计算图，再逐节点写出

局部导数，最后组织为矩阵形式。教师要求学生解释三个容易被代码隐藏的问题：梯度为什么按反向拓扑顺序计算；矩阵乘法次序为什么不能任意交换；激活函数导数接近零时为何会产生梯度消失。课堂不直接给出完整模板，而是先让学生用标量复合函数验证链式法则，再扩展到向量情形。

代码环节同时使用手工推导、有限差分 and 自动微分。学生以中心差分近似某个参数方向的导数，并与自动微分结果比较。差异过大时，需要从差分步长、浮点舍入、随机层和实现错误中寻找原因。此过程把导数定义、误差估计和数值稳定性联系起来，使自动微分成为验证对象而非权威答案。可视诊断可展示不同激活函数下各层梯度范数，迁移反思则讨论深层网络、残差连接和非光滑激活函数带来的变化。

在生成式人工智能参与的情况下，允许学生请求代码框架或错误提示，但必须提交独立的维度表、关键公式和梯度检查记录。若模型给出的推导省略条件或符号不一致，学生需在报告中标注并修正。通过这种安排，人工智能输出本身成为“待审查的数学文本”，有助于训练批判性判断。

5.4. 案例三：管网仿真模型的自适应参数调优

工程迁移案例来源于油气管网仿真模型参数调优需求。为保护企业数据，教学版本采用脱敏参数和合成观测值。设仿真器输出为 $F(\theta)$ ，观测量为 y ，参数向量 θ 包含摩阻、局部阻力或边界修正系数，可构造加权残差与正则项组成的目标函数

$$J(\theta) = \sum_i w_i \|y_i - F_i(\theta)\|^2 + \lambda R(\theta), \theta \in \Omega. \quad (3)$$

问题情境不预设“某一种优化算法最好”，而是要求学生先分析参数物理意义、目标函数连续性、可微性、约束集合和可辨识性。若仿真器可微或可由可微代理模型近似，可使用梯度法；若仿真器是黑箱，则需比较有限差分、坐标搜索或其他方法，并说明计算成本。学生还要识别多个参数产生相似输出时的不可辨识问题，避免把数值拟合误判为真实机理。

五环在该案例中具体表现为：以预测值与现场数据偏差作为问题情境；通过残差、偏导数和约束条件完成数学建模；以统一接口封装仿真器并实现调参；用敏感性曲线、残差分布和参数轨迹进行诊断；最后讨论数据噪声、模型结构误差和参数漂移对结论的影响。团队分工设置为“数学建模 - 程序实现 - 结果审查 - 汇报答辩”，但每位成员都需完成个人解释记录，防止小组合作掩盖个体学习。

该案例把数学分析中的局部近似、参数积分、极值条件和误差控制置于真实约束下。与理想化函数不同，工程目标函数可能不光滑、不可精确求导或具有多个局部最优。教学价值不在于获得一个“工业最优参数”，而在于让学生理解模型、算法与数据之间的责任边界，并学会用数学条件解释方法选择。

5.5. 分层任务与支架设计

考虑学生在证明基础、编程经验和专业背景上的差异，每个案例设置核心、提升和挑战三个任务包。核心包强调定义、定理条件和最小可运行程序，所有学生必须完成；提升包要求比较算法、诊断错误并解释可视化；挑战包引入开放数据、工程约束或文献复现。任务分层并非降低数学要求，而是让技术复杂度与认知准备相匹配。

教学支架遵循“先显式、后撤除”的原则。初期提供变量表、计算图、代码骨架和反思问题；中期只提供接口与评价标准；后期由学生自行定义问题、选择工具和构造证据。TensorFlow Playground 适合在概念阶段快速观察决策边界和学习率效应，PyTorch 适合在算法阶段呈现自动微分与优化器，Jupyter Notebook 用于保存推导、代码、图形和解释的完整过程。工具之间通过相同的变量命名和案例数据衔接，避免重复学习界面。

5.6. 虚拟仿真实验与工具链衔接

虚拟仿真实验采用“轻量交互 - 可复现计算 - 受控工程场景”三级工具链。第一层使用 TensorFlow

Playground 等浏览器工具，让学生快速改变网络深度、激活函数、学习率和数据分布，形成可讨论的现象；第二层转入 Jupyter Notebook 与 PyTorch，要求学生显式写出目标函数、梯度、参数更新和随机种子，保证过程可复现；第三层接入管网仿真教学接口或代理模型，处理约束、噪声、计算成本和数据脱敏。三级工具使用同一组概念标签和变量字典，避免学生把平台切换误解为知识更换。

实验平台的核心不是追求高算力，而是支持参数可控、结果可视和过程可追。简单函数与小型网络优先在本地 CPU 完成，以便逐步执行和检查中间量；只有批量比较、代理模型训练或复杂可视化需要时才申请 GPU 资源。每个实验均提供环境文件、依赖版本、运行入口和预期耗时，并设置无 GPU 降级方案。这样既能降低技术故障对课堂的干扰，也能让学生认识计算资源是工程约束之一。

实验任务设置“预测 - 运行 - 解释 - 反证”四个检查点。学生在运行前先预测趋势，运行后比较结果，随后用数学条件解释差异，最后通过改变假设或构造极端参数检验解释是否稳健。平台自动生成的曲线只能作为证据，不能直接作为结论；报告必须包含关键参数表、图形说明和失败实验。该设计使虚拟仿真由演示性资源转化为可质询的数学实验。

6. 评价体系、资源建设与人工智能治理

6.1. 基于证据的多元评价

评价体系与“三层五环”直接对齐。传统闭卷考试继续承担概念、计算和证明的基础评价，但增加算法解释、代码诊断、项目迁移和反思说明。表 2 给出课程项目的建议量规。权重可随章节和专业调整，但“概念与证明”始终保持最高或并列最高权重，防止代码表现遮蔽数学学习。

Table 2. Multidimensional assessment rubric for integrated cases

表 2. 融合案例的多元评价量规

评价维度	证据载体	权重	核心标准
概念与证明	概念题、推导稿、口试	30%	定义准确，条件完整，论证可复核，能构造反例
算法阐释	计算图、步骤说明、异常解释	20%	能把算法步骤对应到数学关系并说明失效条件
代码与诊断	可复现代码、参数记录、梯度检查	20%	程序可运行，记录完整，能定位并解释错误
项目迁移	建模报告、敏感性分析、答辩	20%	假设合理，方法匹配约束，能区分多类误差
反思与 AI 披露	学习日志、工具说明、版本记录	10%	评价工具输出，说明人工修改，过程可追溯

评价实施采用“形成性证据 + 总结性证据”组合。形成性证据包括随堂概念题、错误分析、代码提交记录、同伴互评和一分钟解释；总结性证据包括等值概念测验、个人口试、项目报告与延迟测验。对小组项目实行“共同作品 + 个人答辩”，教师随机抽取公式、代码或图形要求学生解释。后续研究将比较改革前后等值题表现、概念保持度和作品量规分数，并结合访谈分析变化机制；在样本和课程条件不足以支持因果推断时，仅报告描述性结果和边界。

为了提高评价可靠性，量规中的每个维度均设置可观察描述。例如，“算法阐释”不以是否写出专业术语评分，而以能否说明变量、假设、步骤和失败条件评分；“代码与诊断”不仅检查能否运行，还检查复现性、参数记录和错误定位；“工程迁移”要求区分数据误差、模型误差和优化误差。教师可选取若干作品进行双人评分并讨论分歧，以逐步校准标准。

6.2. “可用 - 需核 - 须述 - 可追”的人工智能使用规则

生成式人工智能可以用于头脑风暴、代码骨架、语言润色、可视化建议和形成性反馈，但不能替代

关键证明、最终解释和来源判断。相关研究指出，大语言模型能够提供个性化支持，同时也存在错误信息、偏见、依赖和学术诚信风险[25]。因此，本研究提出四条操作规则。

“可用”明确允许场景与禁止场景：学生可请求示例、调试建议和表达优化，但不得直接提交人工智能生成的完整证明、实验报告或虚构数据。“需核”要求对定理条件、计算结果、代码输出和参考文献进行人工验证，至少使用教材、原始文献或可运行实验中的一种证据。“须述”要求在作业末尾说明使用的工具、目的、关键提示和人工修改。“可追”要求保留主要版本、代码环境和数据来源，教师可通过口头复核或局部重做确认理解。

这套规则的核心不是扩大监控，而是把人工智能素养转化为学科评价的一部分。学生若能发现模型忽略了可导条件、混淆局部极值与全局极值、生成不存在的文献，说明其数学判断和信息判断得到了体现；反之，即使文本流畅，若无法解释关键步骤，也不能获得高分。教师同样需要披露用于生成案例或代码的人工智能工具，并对最终教学材料承担审查责任。

6.3. 资源库与协同机制

资源建设采用“一个源文件、多种教学输出”的思路。每个案例建立标准化案例卡，包含适用章节、先修知识、学习目标、问题情境、数学推导、代码环境、可视化任务、常见错误、评价证据和人工智能使用提示。源代码、数据字典和版本说明集中管理，再导出为课堂讲义、实验指导书、在线材料和教师用答案，减少资源离散与版本冲突。

案例库实行分级开放。基础数学内容、合成数据和通用代码可向全校开放；企业案例只开放脱敏数据和抽象模型；教师答案、评分标尺与敏感参数设置受限访问。跨学科团队定期联合备课：数学教师审查概念与证明，机器学习教师审查算法与代码，统计教师审查数据与评价，工程专家审查场景真实性。每次修订记录“问题-修改-证据-版本”，使资源库成为持续改进的研究档案。

6.4. 效果验证指标与分析方案

效果验证围绕知识理解、算法解释、工程迁移、学习投入和规范使用五个维度进行。知识理解采用与课程目标对应的等值概念题和证明题，关注条件辨析、反例与迁移而非题目熟练度；算法解释使用统一量规评价学生能否把代码步骤还原为数学关系；工程迁移考查目标函数、约束、误差来源和结果边界；学习投入通过任务完成记录、修订次数和反思日志呈现；规范使用则检查人工智能披露、来源核验和版本可追溯性。

分析时先报告样本构成、缺失数据和教学实施差异，再给出均值、分布、置信区间和作品等级比例。若有改革前后或平行班数据，可在满足可比性前提下使用配对或协变量调整方法，并同时报告效应大小；若样本较小，则以个案轨迹、错误类型和作品证据支持解释，不把显著性检验作为唯一结论。量规评分可通过双人评分的一致性指标进行校准，访谈材料按“概念联系-算法解释-迁移障碍-人工智能判断”编码。

为回应项目中期评价要求，评价节点分为单元诊断、学期中期和课程结束三个阶段。单元诊断用于即时修订案例，中期评价检查工具配置与任务负荷，课程结束评价用于总结达成度；延迟测验在课程结束后若干周实施，以观察知识保持和新情境迁移。所有量化指标在数据收集前明确计算规则，未完成的数据不计入结果性结论。

7. 阶段性产出、实施反思与研究局限

7.1. 阶段性产出及其可推广性

本研究的阶段性产出可归纳为四类。第一，形成数学分析-人工智能双向知识映射框架，能够用于

修订课程大纲、标注案例入口和设计学习导航。第二，形成“三层五环”案例模板，并以梯度下降、反向传播和管网调参为代表给出从概念到工程的任务链。第三，形成多元评价量规与人工智能治理规则，使课程目标、学习活动和评价证据保持一致。第四，形成资源库元数据、版本管理和跨学科审查流程，为后续数字教材、虚拟仿真实验和在线共享提供统一标准。

这些产出具有“结构可迁移、内容可替换”的特点。“一图三层五环”并不依赖某一种模型或平台。在高等数学课程中，可把三层任务简化为概念-计算-应用；在概率统计课程中，可将映射节点替换为损失期望、贝叶斯推断与不确定性；在线性代数课程中，可围绕矩阵分解、表示学习和降维展开。可推广性的关键不是复制同一案例，而是保持知识映射、递进层级、完整学习链和证据闭环。

7.2. 实施中的关键张力

第一项张力是内容更新与课时约束。人工智能案例容易不断扩张，导致课程主线被稀释。解决方法是以数学接口而非技术名词筛选内容，同一数学节点优先选择可覆盖多个算法的案例。教师还需明确哪些内容用于课堂深讲，哪些放入拓展资源，避免把“融合”理解为简单加法。

第二项张力是可视化直觉与证明严谨性。图形可以帮助发现规律，却可能掩盖边界条件。每次可视化活动都应配套“图形能说明什么、不能说明什么”的问题，并至少设置一个反例或极端参数。对数值实验观察到的收敛，学生必须区分经验现象与理论保证。

第三项张力是工具便利与能力替代。自动微分、优化器和生成式人工智能可以降低机械负担，但也可能遮蔽思维过程。课程通过手算小模型、梯度检查、随机口试和版本追踪保留关键认知活动；工具只在学生已经能够解释基本原理后逐步开放。

第四项张力是工程真实性与教学可控性。真实项目往往包含不完整数据、复杂接口和商业限制，直接搬入课堂会增加无关认知负荷。本研究将企业问题转化为“真实性保留、复杂度可控”的教学版本：保留目标、约束和误差来源，压缩系统规模，使用脱敏或合成数据，并在挑战任务中逐步恢复复杂性。

第五项张力是跨学科协同与责任边界。数学教师可能不熟悉最新工具，算法教师也可能忽视证明细节。联合备课需要明确“谁审查什么”：数学正确性、代码可复现性、数据合规性和工程合理性分别设定负责人，同时通过共同量规形成共享语言。

7.3. 研究局限与后续验证

本文的局限主要有三点。首先，研究基于单校课程与特定专业背景，学生先修基础、课时和平台条件会影响实施，外部推广需进行情境适配。其次，项目尚处于阶段性实施和成果凝练期，本文没有提供未经完整收集和审查的成绩增幅、满意度或竞赛获奖率，也不能据此作出因果判断。再次，知识图谱与案例库的维护需要持续投入，人工智能技术与平台变化可能使部分资源快速过时。

后续研究将至少完成两个教学循环。第一循环重点检验任务难度、工具稳定性和量规可用性，第二循环依据证据修订，并使用等值概念题、延迟测验、作品评分、访谈和学习日志形成混合证据。若条件允许，可采用历史对照或平行班级比较，但应控制教师、内容和考核差异，并报告效应大小与不确定性。与此同时，持续跟踪学生能否在新问题中解释数学条件，而不是只比较短期分数。

8. 结论

人工智能前沿融入《数学分析》的关键，不是给传统课堂附加若干工具或案例，而是重构知识之间的关系、学习活动的顺序和评价证据的结构。本文提出的“一图三层五环”模式，以双向知识映射保持内容关联，以概念锚定、算法阐释和工程迁移组织学习深度，以问题情境、数学推导、代码实现、可视诊

断和迁移反思贯通理论与实践，并以多元量规和人工智能治理规则保障学习质量。

该模式强调人工智能是数学概念的应用语境和检验场，而不是替代教师判断与学生思考的捷径。其实施需要四项条件：坚守核心证明训练，选择具有数学必要性的案例，建设可复现的资源与证据链，以及形成跨学科审查机制。下一阶段应通过连续教学循环和规范的数据收集验证其效果、边界与可迁移性，从而为应用型高校数学基础课程面向智能时代的内涵式改革提供更可靠的实践依据。

致谢

感谢项目组成员及开题评议专家对课程框架、案例设计和评价方案提出的建议。

基金项目

重庆科技大学本科教育教学改革研究项目。

项目名称：《数学分析》与人工智能前沿融合的教学内容重构与教学方法创新研究与实践。

项目类别：人工智能+。

项目层次：专项项目。

项目编号：202565。

参考文献

- [1] 国务院关于印发新一代人工智能发展规划的通知 国发〔2017〕35号[EB/OL]. <https://app.www.gov.cn/govdata/gov/201707/20/408540/article.html>, 2017-07-20.
- [2] 教育部关于印发《高等学校人工智能创新行动计划》的通知 教技〔2018〕3号[EB/OL]. https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2018-12/31/content_5443346.htm, 2018-04-02.
- [3] Miao, F. and Holmes, W. (2023) Guidance for Generative AI in Education and Research. UNESCO.
- [4] Miao, F. and Cukurova, M. (2024) AI Competency Framework for Teachers. UNESCO.
- [5] 陈纪修, 于崇华, 金路. 数学分析[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [6] 赵楠, 叶俊佑. 数学分析课程与人工智能技术深度融合的教学[J]. 教育进展, 2026, 16(1): 1618-1623.
- [7] 杨洁, 郑晴慧, 何郁波. 核心素养视域下师范类“数学分析”课程教学改革实践[J]. 教育进展, 2024, 14(9): 589-593.
- [8] 杨一浓, 王金环, 刘生全, 田更. 基于真实问题的数学分析课程教学改革[J]. 创新教育研究, 2025, 13(8): 191-196.
- [9] Zawacki-Richter, O., Marín, V.I., Bond, M. and Gouverneur, F. (2019) Systematic Review of Research on Artificial Intelligence Applications in Higher Education—Where Are the Educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, **16**, Article No. 39. <https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0>
- [10] Ouyang, F. and Jiao, P. (2021) Artificial Intelligence in Education: The Three Paradigms. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, **2**, Article ID: 100020. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2021.100020>
- [11] Long, D. and Magerko, B. (2020) What Is AI Literacy? Competencies and Design Considerations. *Proceedings of the 2020 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, Honolulu, 25-30 April 2020, 1-16. <https://doi.org/10.1145/3313831.3376727>
- [12] Biggs, J. (1996) Enhancing Teaching through Constructive Alignment. *Higher Education*, **32**, 347-364. <https://doi.org/10.1007/bf00138871>
- [13] Mishra, P. and Koehler, M.J. (2006) Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record: The Voice of Scholarship in Education*, **108**, 1017-1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- [14] Wang, F. and Hannafin, M.J. (2005) Design-Based Research and Technology-Enhanced Learning Environments. *Educational Technology Research and Development*, **53**, 5-23. <https://doi.org/10.1007/bf02504682>
- [15] Sweller, J. (1988) Cognitive Load during Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science*, **12**, 257-285. [https://doi.org/10.1016/0364-0213\(88\)90023-7](https://doi.org/10.1016/0364-0213(88)90023-7)
- [16] Arcavi, A. (2003) The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 215-241. <https://doi.org/10.1023/a:1024312321077>

-
- [17] Freeman, S., Eddy, S.L., McDonough, M., Smith, M.K., Okoroafor, N., Jordt, H., *et al.* (2014) Active Learning Increases Student Performance in Science, Engineering, and Mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **111**, 8410-8415. <https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111>
 - [18] Mayer, R.E. (2021) Multimedia Learning. 3rd Edition, Cambridge University Press.
 - [19] Deisenroth, M.P., Faisal, A.A. and Ong, C.S. (2020) Mathematics for Machine Learning. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108679930>
 - [20] Goodfellow, I., Bengio, Y. and Courville, A. (2016) Deep Learning. MIT Press.
 - [21] Rumelhart, D.E., Hinton, G.E. and Williams, R.J. (1986) Learning Representations by Back-Propagating Errors. *Nature*, **323**, 533-536. <https://doi.org/10.1038/323533a0>
 - [22] Bottou, L., Curtis, F.E. and Nocedal, J. (2018) Optimization Methods for Large-Scale Machine Learning. *SIAM Review*, **60**, 223-311. <https://doi.org/10.1137/16m1080173>
 - [23] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004) Convex Optimization. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511804441>
 - [24] Kingma, D.P. and Ba, J. (2015) Adam: A Method for Stochastic Optimization. *International Conference on Learning Representations*, San Diego, 7-9 May 2015, 1-13.
 - [25] Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., *et al.* (2023) ChatGPT for Good? On Opportunities and Challenges of Large Language Models for Education. *Learning and Individual Differences*, **103**, Article ID: 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>