

《地下铁道》课程中钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算的教学设计和实践

周晓军

西南交通大学土木工程学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年8月3日; 录用日期: 2026年9月2日; 发布日期: 2026年9月9日

摘 要

本文根据面向本科学生而开设的《地下铁道》课程中钢筋混凝土受弯构件正截面承载力和配筋设计的教学内容, 提出了便于学生理解和掌握的钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算方法的教学法设计, 分别从单筋矩形截面梁、双筋矩形截面梁和T形截面单筋梁的承载模型提出了计算和设计受弯构件受力钢筋的推演方法和工程案例。通过对所提出教学设计的实践, 不仅有利于引导学生开展创新思维, 而且还能够实现预期的教学目标。

关键词

钢筋混凝土受弯构件, 承载力, 配筋率, 弯矩分解法, 教学法设计

Pedagogical Planning on Calculating the Load-Bearing Capacity of Normal Cross-Section of Reinforced Concrete Flexural Members and Its Practice in the Course Entitled *Metro*

Xiaojun Zhou

School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: August 3, 2026; accepted: September 2, 2026; published: September 9, 2026

Abstract

Based on the instructional contents of the course entitled *Metro* concerning the load-bearing capacity of normal cross-section of reinforced concrete flexural members and their reinforcement design delivered to undergraduates, a pedagogical planning for calculating the strength of normal cross-section of flexural members is presented to be easily comprehended and mastered by undergraduates in this paper. Both the deductive method and engineering cases on calculating and designing the reinforcement for flexural concrete members are also proposed from the load bearing models of beam with rectangular normal cross-section having single and double reinforcements, as well as the cross-section of T-shaped beam having single reinforcement. The practice of the pedagogical planning presented in the paper can not only help guide the undergraduates to develop innovative thinking, but also help achieve expected teaching aims as planned.

Keywords

Concrete Flexural Members, Load-Bearing Capacity, Ratio of Reinforcement, Method of Decomposing Bending Moment, Pedagogical Planning

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《地下铁道》是西南交通大学面向土木工程、城市地下空间工程 and 智能建造专业本科学生而开设的一门国家级一流专业课程。课程的教学内容包括城市轨道交通的发展历史、城市轨道交通制式组成、路网规划、线路设计、轨道工程、车站建筑和装修设计、车站和区间建筑结构与耐久性设计、车站和区间结构施工方法、车站通风和空调、供电和通讯信号系统、运营组织和管理等[1]-[6]。而钢筋混凝土结构的设计是车站和区间建筑设计中的重点教学内容,也是学生学习的难点[1]-[6]。通过对钢筋混凝土结构承载能力和配筋设计方法的教学,使选修本课程的学生能够掌握与钢筋混凝土结构设计相关的基本概念、原理和计算方法,并具备独立开展地下铁道车站、区间隧道以及高架车站和区间桥梁结构强度计算和配筋设计的能力,为学生今后的就业和进一步学术深造奠定扎实的理论基础。

钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算和配筋设计作为混凝土结构设计方法中的基础性内容,其具有混凝土构件类型多、概念多、物理量多、计算公式多和构造规定多的“五多”特点,并具有极强的工程应用和实践特性,一直是课程教学中的难点。对于选修本课程的学生而言,正确理解和掌握混凝土受弯构件正截面承载力的计算方法,可为其进一步学习混凝土受压、受拉、受扭构件以及预应力混凝土构件的承载力计算和配筋设计奠定基础[3]-[6]。在多年的教学实践中发现,按照目前国内现行的教学参考书中讲解的内容和方法组织此部分教学内容时[7]-[9],由于此部分教学内容具有前文已述的“五多”特点,学生对混凝土受弯构件正截面承载力计算中的基本概念、计算方法和配筋设计流程的理解和掌握尚存在不少困难。尤其是对双筋矩形截面梁和 T 型截面梁受弯矩作用时的正截面承载力计算中弯矩和受拉钢筋的分解方法及其作用的理解较为困难。对于初次选修本课程的学生而言,由于其缺乏针对地铁车站和区间隧道与高架车站和桥梁结构设计与建造方面的工程经验,更未建立结构设计和计算相关的基本概念,如果仅根据教学参考书中列举的内容进行学习时,学生只能被动而机械地接受教材中列举的计算公式和国

家标准中针对配筋设计的构造规定,并不能从计算原理上理解和掌握混凝土受弯构件承载力的计算方法,更不能理解和熟练应用配筋设计的过程,缺乏独立完成地下铁道车站和桥梁结构中混凝土受弯构件课程设计的能力,经对 2020~2022 学年选修此部分课程的学生学习成绩的分析,约占总学生人数的 60%的同学未能掌握教学内容和知识点,致使此部分的教学效果不甚理想。

目前国内对于钢筋混凝土受弯构件正截面承载力的教学方法和组织模式的研究较少,尤其是对结合 PBL(即 Problem-Based Learning)模式的钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算的研究较少。文献[10]-[13]针对土木工程专业和船舶结构专业,从教师教学设计和学生学习的角度就 PBL 教学方法进行研究,结果表明采用 PBL 教学法不仅使学生能够较全面、系统地掌握课程的内容,同时能提高学生学习的积极性和主动性以及分析和解决问题的能力,更重要的是提高学生的实践能力和创新能力。文献[14]-[16]针对大学课程的改革和线性代数课程教学中的 PBL 模式进行研究,并提出了基于 BPL 模式的教学设计和课程改革方案。由此可见国内外就钢筋混凝土受弯构件正截面承载力设计方法的教学设计和研究相对较少。

鉴于此,本文根据钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算方法的教学内容,通过对教学内容及其难易程度的系统性梳理,基于 PBL 问题导向式的教学方式,研究和提出了易于学生理解和掌握的教学设计,并以此开展了教学实践,结果表明,所提出的教学设计不仅有利于培养学生的创新思维,同时还能够实现预期的教学目标,保障课程的教学质量。

2. 课程的教学内容和讲授思路

前文已述及,钢筋混凝土受弯构件正截面承载力的计算方法是整个钢筋混凝土结构设计和计算的理论基础[7]-[9]。学生若通过学习并掌握了混凝土受弯构件正截面承载力的计算方法,就可以为其学习难度更大和理论更复杂的混凝土受拉、受压、受扭构件扭曲截面承载力以及预应力混凝土构件的计算奠定基础。经过对钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算方法的系统梳理,与其相对应的教学内容和难点包括:(1)以横截面划分的混凝土受弯构件类型、受弯构件正截面应力分布及其三个阶段。(2)钢筋混凝土简支梁的配筋率及适筋梁、少筋梁和超筋梁的破坏模式以及最大和最小配筋率。(3)混凝土受弯构件正截面承载力计算的假设和混凝土受压区理论曲线应力图形的简化。(4)单筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算和配筋的案例设计。(5)双筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算和配筋的案例设计。(6)T 型截面受弯构件正截面承载力的计算和配筋的案例设计。(7)国家标准《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010)(2024 版)中针对受弯构件正截面配筋的构造要求和相关规定。

上述的教学内容正是基于 BPL 模式而组织和设计的,并将其作为本课程中涉及到混凝土受弯构件正截面承载力计算和配筋设计教学活动的依据,如此安排则是充分考虑了本科学生对所学知识的接受遵循从简单到复杂的认知过程,即使教师讲授的课程内容与学生对教学内容的学习基于如何计算和设计地铁车站和区间隧道以及高架车站和桥梁结构中混凝土受弯构件的工程实际问题,同时便于学生理解和掌握钢筋混凝土受弯构件正截面承载力的计算方法,进而可独立地开展地铁车站和区间隧道以及高架车站和桥梁结构中钢筋混凝土受弯构件的设计,使学生逐步树立创新意识的意识,达到本课程的教学目的。针对上述教学内容,并基于 PBL 而组织和设计的教学方法现分别介绍如下。

3. 混凝土受弯构件的类型和承载力计算的假设与配筋率

3.1. 混凝土受弯构件及其类型

为便于学生理解,首先讲解在建筑结构中常用的混凝土受弯构件及其类型。钢筋混凝土受弯构件就是指在外荷载作用下同时承受弯矩和剪力作用的钢筋混凝土构件。梁和板就是建筑结构中最典型的受弯构件。根据梁的横截面形式可将其划分为矩形、T 形、I 形、花篮形、倒 L 形等。而根据板的横截面形式

可将其划分为矩形板、空心板和槽形板等。梁和板的横断面类型见图 1 所示。

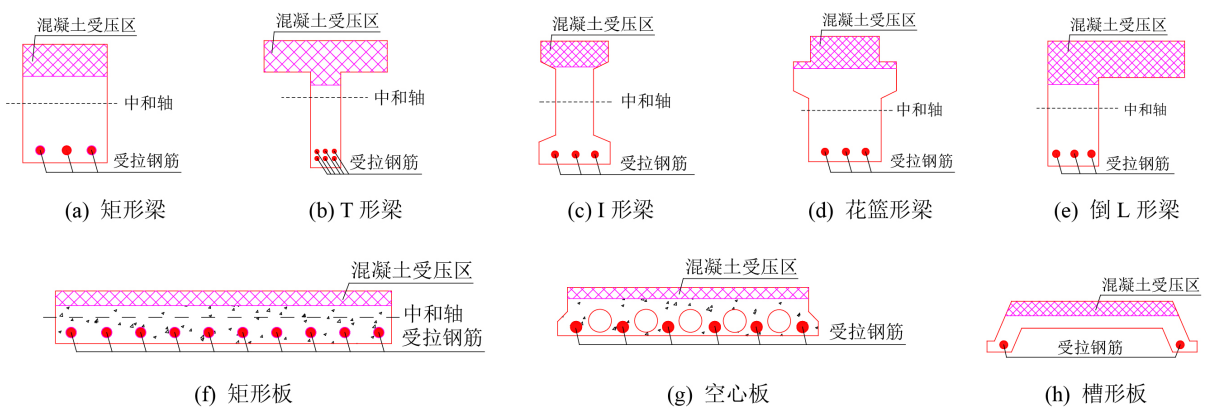


Figure 1. Types of cross-section of beams and slabs
图 1. 梁和板的横截面类型

从图 1 可知，梁和板的区别就在于梁的横截面高度大于其横截面的宽度，而板的横截面高度则小于其横截面的宽度。讲解梁和板的几何特性有助于学生理解梁和板的区别，以增加学生的工程经验。

3.2. 钢筋混凝土简支梁的配筋率和梁的破坏模式

为便于讲解，建立如图 2 所示的承受对称集中荷载 P 作用的矩形正截面素混凝土简支梁，并分析其受荷载 P 作用时正截面上的应力和变形及梁的破坏模式。

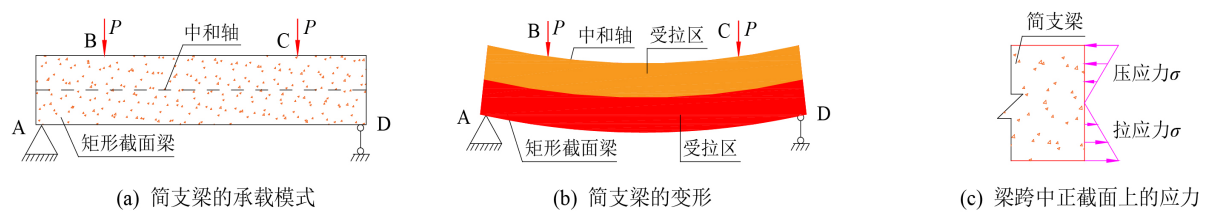


Figure 2. Plain concrete simply supported beam
图 2. 素混凝土简支梁

在图 2 中，当简支梁受对称集中荷载 P 作用且数值较小时，简支梁处于弹性阶段，且梁中 AB 段和 CD 段同时承受弯矩和剪力，而 BC 段则仅承受弯矩，因此 BC 段为纯弯段。图 2(a)还示出了梁的中和轴。由于 BC 段为纯弯段，从图 2(b)可见，梁中和轴上部的混凝土处于压应力状态，而中和轴下部的混凝土则处于拉应力状态。因此梁正截面上的应力分布见图 2(c)。此处的正截面就是指与中和轴相垂直的横截面。随着集中荷载 P 的不断增大，由于混凝土的抗拉强度远小于其抗压强度，因此中和轴下部的混凝土一旦出现塑性状态的受拉裂缝时素混凝土简支梁随即发生破坏，且这种破坏无任何预兆，属于脆性破坏，这是在工程中设计中必须要避免的。为防止简支梁受集中荷载 P 作用时中和轴下部混凝土受拉而发生脆性破坏，可在简支梁中和轴下部的受拉区配置合理的纵向受拉钢筋，如此即可充分利用钢筋具有较高抗拉强度和混凝土具有较高抗压强度的力学特性，进而提高简支梁各个截面的承载能力即强度。仅在受拉区配置受拉钢筋的梁被称为单筋截面梁，见图 3 所示。

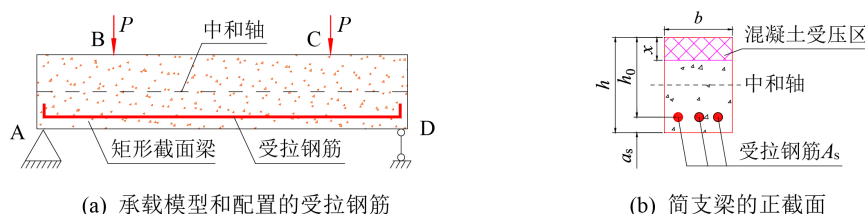


Figure 3. Simply supported beam with singly reinforced rectangular cross-section
图 3. 单筋矩形截面简支梁

在图 3(a)中示出了受拉区配置的受拉钢筋, 单筋梁的正截面见图 3(b)所示, 正截面为矩形。为便于分析, 假设图 3(b)中梁矩形正截面的宽度为 b , 高度为 h , 梁正截面的有效高度为 h_0 。梁中和轴以上混凝土受压区的高度为 x , 配置的全部受拉钢筋的横截面积为 A_s 。为便于记忆, 此处还用 A_s 代表全部的受拉钢筋。而 a_s 则为受拉钢筋的合力作用点至梁截面受拉边缘的距离。图 3 中几何尺寸的单位均以 mm 计, 受拉钢筋的横截面积 A_s 以 mm^2 计。

根据图 3 所示的单筋截面梁, 可给出简支梁中配筋率的定义。梁的配筋率就是梁中全部受拉钢筋的横截面积 A_s 与梁矩形正截面有效面积 A_0 的比值, 两者的单位以 mm^2 计, 配筋率用符号 ρ 表示, 即

$$\rho = \frac{A_s}{A_0} = \frac{A_s}{bh_0} \quad (1)$$

式中配筋率 ρ 的数值通常以%表示, 其余各个符号的含义同前。

在讲解混凝土简支梁中的配筋率 ρ 后就可以按照图 3 所示的单筋矩形截面简支梁为例, 讲解简支梁受弯的 3 个应力阶段、适筋梁、少筋梁和超筋梁的概念及其破坏模式。

当集中荷载 P 逐渐增大, 简支梁会从弹性变形发展到塑性带裂缝的状态。此时受拉区的混凝土出现裂缝, 并且受压区混凝土的承载面积会因受拉区混凝土中裂缝的出现和发展而逐步减小, 钢筋承受的拉力则增加直至达到其屈服强度。之后梁正截面上的应力会经历从受压和受拉同时并存的状态直至仅存在受压的状态。当简支梁受拉区的混凝土出现裂缝后此部位的混凝土便退出工作, 此时的拉力则均由全部纵向受拉钢筋 A_s 承担, 而受压区的混凝土则仅承受压应力。随着受拉钢筋拉应力达到其屈服强度, 受压区混凝土被压碎, 梁便发生破坏。由此梁正截面经历了弹性阶段、带裂缝阶段和钢筋屈服流动破坏的 3 个阶段。

根据单筋截面简支梁受拉区中配筋率 ρ 的不同, 其破坏模式可有适筋梁破坏、少筋梁破坏和超筋梁破坏 3 种。

(1) 适筋梁的破坏模式

在简支梁的受拉区配置合理的受拉钢筋后, 当简支梁承受不断增加的对称荷载 P 作用时, 首先受拉区的钢筋发生屈服, 并且维持其屈服应力不变, 此时梁的塑性变形则显著增长, 致使梁中和轴上部受压区的混凝土达到其极限压应变, 受压区的混凝土被压碎, 简支梁发生破坏。在简支梁发生破坏的过程中混凝土的裂缝和变形均有显著的发展, 梁发生的破坏具有明显的预兆, 因而属于延性破坏。其显著的特征就是当简支梁发生破坏时钢筋具有较高抗拉强度和混凝土具有较高抗压强度的力学特性均得到了充分的利用, 因而属于适筋梁的破坏模式。所以在实际工程中的混凝土受弯构件均应当被设计成适筋构件。

(2) 少筋梁的破坏模式

若在简支梁中配置的受拉钢筋过少即配筋率太小时, 在不断增加的荷载 P 作用下, 简支梁受拉区的混凝土内一旦出现裂缝则受拉钢筋随即发生屈服, 简支梁中的裂缝较宽、挠度也较大, 而使梁受压区的

混凝土被压碎导致梁发生破坏。梁发生的这种破坏没有明显的预兆，因而属于脆性破坏。在简支梁发生脆性破坏过程中混凝土具有较高抗压强度的力学性能并没有得到充分利用，因而属于少筋梁的破坏模式。

(3) 超筋梁的破坏模式

若在简支梁中配置过多的受拉钢筋即配筋率过大时，在不断增加的荷载 P 作用下，简支梁受压区的混凝土被压碎时受拉区的钢筋拉应力却未达到其屈服强度，此时梁已发生了破坏。梁中的裂缝和挠度并不明显，破坏也没有明显的预兆，属于脆性破坏。在简支梁发生的这种破坏过程中受拉区钢筋具有较高抗拉强度的力学特性并没有得到充分利用，因而属于超筋梁的破坏模式。

由此得到钢筋混凝土受弯构件中配筋率的变化会引起构件破坏模式的改变。为避免钢筋混凝土受弯构件发生少筋梁和超筋梁的破坏模式，在实际工程中均应将受弯构件设计成适筋构件。

3.3. 受弯构件正截面受压区应力图形的简化

在讲解了简支梁配筋率及其在对称集中荷载 P 作用下的 3 种破坏模式后，就可讲解受弯构件正截面受压区及其等效的矩形应力图形，为分析混凝土受弯构件正截面承载力建立依据。结合国内外的实验研究给出以下假设：

(1) 混凝土受弯构件中的正截面为平面，即构件受弯后正截面仍保持平面；(2) 不考虑混凝土受弯构件中受拉区混凝土的拉应力；(3) 混凝土在单轴压缩下其变形达到极限压应变时的强度采用混凝土轴心抗压强度设计值 f_c ；(4) 受弯构件中混凝土受压区的理论曲线应力图形可简化为等效的矩形应力图形；(5) 混凝土受压区等效矩形应力图形的合力等于理论曲线应力图形的合力，且等效矩形应力图形的合力作用点与理论曲线应力图形的合力作用点相重合。根据上述的假设，可在图 3 所示的单筋矩形截面简支梁中任意选取一小段梁，得到如图 4 所示的混凝土受弯构件正截面受压区的等效矩形受压区图形。

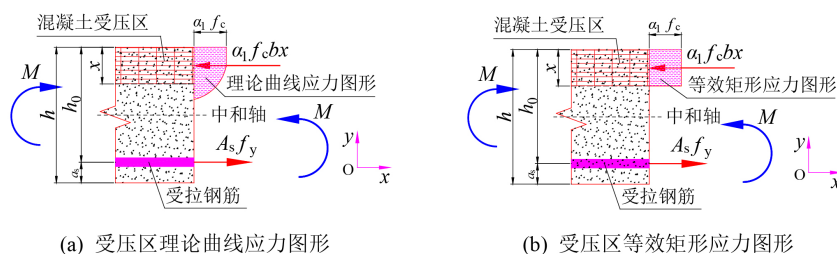


Figure 4. Equivalent rectangular stress diagram of simply supported beam with singly reinforced rectangular cross-section

图 4. 单筋矩形截面简支梁的等效矩形应力图形

图 4 中 M 为简支梁承受的弯矩设计值，单位为 $\text{N}\cdot\text{mm}$ ， f_y 为受拉钢筋的抗拉强度设计值，单位为 $\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ， α_1 为等效矩形应力图形的系数，当立方体混凝土强度等级小于或等于 C50 时取 $\alpha_1 = 1$ ，当立方体混凝土强度等级大于 C80 时取 $\alpha_1 = 0.94$ [17] [18]，其间按照线性内插法取值，其余符号同前。

3.4. 混凝土受弯构件最小和最大配筋率

在讲解单筋矩形截面混凝土简支梁的配筋率 ρ 基础上，为避免建筑结构中出现少筋和超筋构件，需要按照适筋梁的破坏模式分析混凝土受弯构件中的最小配筋率 $\rho_{\min}$ 和最大配筋率 $\rho_{\max}$ 。根据国内外的试验研究和工程实践表明，对于图 3 和图 4 所示的单筋截面简支梁而言，即其当受压区的混凝土被压碎的同时梁中受拉区的钢筋也处于受拉的屈服界限状态，这种简支梁就属于适筋梁。为便于分析受弯构件中的最小配筋率 $\rho_{\min}$ 和最大配筋率 $\rho_{\max}$ ，还需要讲解钢筋混凝土结构设计理论中的相对受压区高度 ξ 和相

对界限受压区高度 ξ_b 的概念。以图 4 为例，当混凝土受弯构件中矩形正截面上等效矩形应力图形的受压区高度为 x ，矩形正截面的有效高度为 h_0 ，则混凝土受弯构件正截面上的相对受压区高度 ξ 为

$$\xi = \frac{x}{h_0} \quad (2)$$

若受弯的单筋矩形截面简支梁达到其承载能力极限状态，则受拉区的钢筋应力便达到其拉伸屈服强度，与此同时受压区混凝土的压应变也达到其极限压应变，混凝土压应力达到其抗压强度，混凝土被压碎，此时混凝土简支梁矩形正截面中等效矩形应力图的受压区高度就被称为界限受压区高度 x_b ，将其与矩形正截面有效高度 h_0 的比值定义为相对界限受压区高度 ξ_b ，即

$$\xi_b = \frac{x_b}{h_0} \quad (3)$$

根据 3.3 节中的假设，当单筋矩形截面混凝土简支梁发生界限破坏时，受压区的混凝土所承受的压应力为 $\alpha_1 f_c b x_b$ ，而简支梁中受拉区配置的纵向钢筋 A_s 所承担的拉应力为 $A_s f_y$ ，且两者达到极限平衡，既有

$$\alpha_1 f_c b x_b = A_s f_y \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)得到

$$\xi_b = \frac{A_s}{b h_0} \frac{f_y}{\alpha_1 f_c} \quad (5)$$

式(5)中的 A_s/bh_0 就是受弯构件发生界限破坏时的配筋率，并将其称为最大配筋率，用 $\rho_{\max}$ 表示，即有

$$\rho_{\max} = \frac{A_s}{b h_0} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c}{f_y} \quad (6)$$

式中的符号含义同前。

根据式(6)分析，当混凝土受弯构件的实际配筋率 $\rho > \rho_{\max}$ 时，即实际配筋率 ρ 过大，受弯构件中正截面对应的混凝土受压区高度 $x > x_b$ ，此时受拉钢筋的应力小于钢筋的屈服强度，属于超筋破坏。而当混凝土受弯构件的实际配筋率 ρ 满足 $\rho < \rho_{\max}$ 时，受弯构件中对应的混凝土受压区高度 $x < x_b$ ，此时受拉钢筋的应力已达到其抗拉屈服强度，属于适筋破坏。因此将相对界限受压区高度 ξ_b 就作为判断混凝土受弯构件是否发生超筋破坏的依据。相对界限受压区高度 ξ_b 可根据《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)中的建议值选取[17]。为便于学生理解和记忆，将以上判断钢筋混凝土受弯构件是否为适筋梁的依据总结为

$$\begin{cases} x \leq x_b = \xi_b h_0 \\ \xi \leq \xi_b \\ \rho \leq \rho_{\max} = \frac{A_s}{b h_0} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c}{f_y} \end{cases} \quad (7)$$

式(7)表明，当钢筋混凝土受弯构件中正截面混凝土的等效矩形应力图形中受压区高度 x 、相对受压区高度 ξ 和实际配筋率 ρ 满足式(7)中的条件时，则此种受弯构件就属于适筋构件。

对于钢筋混凝土受弯构件的一侧受拉钢筋的最小配筋率，国家标准《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)中的规定为[17]

$$\rho_{\min} = \frac{A_{s,\min}}{bh} = \max \left\{ \frac{0.2}{100}, \frac{45}{100} \frac{f_t}{f_y} \right\} \quad (8)$$

式中 $A_{s,\min}$ 为钢筋混凝土受弯构件中一侧全部受拉钢筋的最小横截面面积, mm^2 。其余符号含义同前。

式(8)表明, 钢筋混凝土受弯构件中一侧的全部受拉钢筋的最小配筋率应取两者中的较大值。以上以承受对称集中荷载 P 作用的矩形正截面钢筋混凝土受弯简支梁为例, 讲解了钢筋混凝土受弯简支梁的配筋率 ρ 、矩形正截面混凝土等效矩形应力图形中混凝土受压区高度 x 、相对受压区高度 ξ 、相对界限受压区高度 ξ_b 、最大配筋率 $\rho_{\max}$ 与最小配筋率 $\rho_{\min}$ 以及适筋梁、超筋梁和少筋梁及其破坏模式的概念, 并总结了判断钢筋混凝土受弯构件是否为适筋构件的依据。在此基础上就可以讲解单筋矩形截面梁、双筋矩形截面梁以及 T 形截面梁受弯时正截面承载力的计算和配筋设计方法。

4. 单筋矩形截面受弯构件正截面承载力的计算方法

为便于分析仍以图3和图4所示的单筋矩形截面简支梁为例, 分析其矩形正截面承载力的计算方法。

图4所示为从单筋矩形正截面混凝土简支梁中任意选取的一小段。为便于分析, 在图4中建立二维坐标系 xoy 。首先分析梁正截面的承载状态。该小段梁的正截面上沿 x 轴方向上存在有2个静力, 一个是受压区混凝土所承受的压力 $\alpha_1 f_c b x$, 另一个则是受拉区钢筋所承受的拉力 $A_s f_y$, 两者处于平衡状态, 因此沿 x 坐标轴方向的静力平衡关系可有

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_c b x = A_s f_y \quad (9)$$

然后分别沿正截面上混凝土受压区的合力作用点和受拉钢筋的合力作用点取静力矩平衡的关系可得

$$\sum M = 0 \Rightarrow \begin{cases} M \leq M_u = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \\ M \leq M_u = A_s f_y \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \end{cases} \quad (10)$$

式中 M_u 为简支梁正截面的抵抗弯矩即受弯承载力设计值, 其单位为 $\text{N}\cdot\text{mm}$ 。而 M 为受弯构件的截面弯矩设计值, 其单位为 $\text{N}\cdot\text{mm}$ 。

式(9)和式(10)就是单筋矩形截面钢筋混凝土受弯构件正截面承载力和受拉钢筋 A_s 的设计公式。该公式的建立是基于静力平衡和静力矩平衡的原理。从式(9)和式(10)中还可以看出, 两式中只有2个未知数, 即混凝土受压区高度 x 和受拉区受拉钢筋的横截面面积 A_s 。根据数学方程式分析, 2个方程中具有2个未知数, 则2个方程联立起来就是可以求解的。为拓宽学生的思维, 此处可讲解2种方法来求解未知数 x 和 A_s 。

(1) 利用受弯构件承受的弯矩设计值 M 求解

当已知受弯构件正截面所承受的弯矩设计值 M , 则将弯矩 M 代入式(10)中的第1式可得到一个关于 x 的一元二次方程式, 即

$$\alpha_1 f_c b x^2 - 2\alpha_1 f_c b h_0 x + 2M = 0 \quad (11)$$

求解该一元二次方程式即式(11), 并取两者中较小值作为受压区高度 x 的解, 则有

$$x = h_0 - \sqrt{h_0^2 - \frac{2M}{\alpha_1 f_c b}} \quad (12)$$

当得到受弯构件等效矩形应力图形的受压区高度 x 后即利用式(10)中的第2式可求得受拉钢筋的横截面面积 A_s , 即有

$$A_s = \frac{M}{f_y \left(h_0 - \frac{x}{2} \right)} \quad (13)$$

利用式(13)计算得到的受拉钢筋的横截面面积 A_s 就可以选配受弯构件中受拉区的全部受拉钢筋 A_s 。

(2) 利用相对受压区高度 ξ 求或表格法解

该方法就是利用受弯构件中等效矩形应力图中混凝土相对受压区高度 ξ 的表达式来求解, 也被称为表格法。前文已经分析了单筋矩形截面钢筋混凝土受弯构件中混凝土相对受压区高度 ξ 和矩形应力图形中混凝土受压区高度 x 与矩形正截面的有效高度 h_0 之间的关系式, 即式(2), 将式(2)中的 x 以 ξ 代替并将其代入式(10)可得到受弯构件正截面的弯矩设计值 M 有

$$\begin{cases} M = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi \left(1 - \frac{1}{2} \xi \right) \\ M = A_s f_y h_0 \left(1 - \frac{1}{2} \xi \right) \end{cases} \quad (14)$$

若令

$$\begin{cases} \alpha_s = \xi \left(1 - \frac{1}{2} \xi \right) \\ \gamma_s = 1 - \frac{1}{2} \xi \end{cases} \quad (15)$$

式中 α_s 为截面的抵抗矩系数, 而 γ_s 为截面的内力臂系数, 且两者均为无量纲的参数。

采用消元法将式(15)中的相对受压区高度 ξ 消去并化简后得到

$$\gamma_s = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha_s}}{2} \quad (16)$$

若已知混凝土受弯构件正截面所承受的弯矩设计值 M , 将其和式(15)一并代入式(14)便得到

$$\begin{cases} \alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} \\ A_s = \frac{M}{f_y h_0 \gamma_s} \end{cases} \quad (17)$$

利用式(16)、式(17)就可以计算当混凝土受弯构件中正截面所承受的弯矩设计值为 M 时需要配置的全部受拉钢筋的横截面面积 A_s 。采用这个方法求解受拉钢筋的横截面面积 A_s , 在计算过程中避免了求解关于 x 的一元二次方程的解, 但需要分别计算截面抵抗矩系数 α_s 和内力臂系数 γ_s , 计算步骤稍多。尽管如此, 仍可作为一种求解方法。两者相比, 可优先采用第 1 种采用受弯构件弯矩 M 的求解方法。

前文已述及, 以混凝土受弯构件中相对受压区高度 ξ 来求解的方法也被称为表格法, 其实质就是通过求解构件承受的弯矩设计值 M , 利用式(17)计算得到截面的抵抗矩系数 α_s , 并根据式(15)和式(16)计算出截面的内力臂系数 γ_s , 然后再利用式(17)中的第 2 式计算得到受拉钢筋的横截面面积 A_s 。由于计算过程较多, 可借助式(15)将相对受压区高度 ξ 、截面的抵抗矩系数 α_s 以及内力臂系数 γ_s 三者之间的数值换算成表格, 通过查阅表格来计算受弯构件中受拉钢筋的横截面面积 A_s 。体现三者数值的表格可查阅国家标准《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版) [17]。

以上讲解了 2 种求解受拉钢筋横截面面积 A_s 的计算方法。需要注意的是, 在利用式(12)和式(13)或者式(16)和式(17)计算单筋矩形截面钢筋混凝土受弯构件正截面承担的弯矩 M 和受拉钢筋 A_s 时, 为防止受

弯构件发生超筋和少筋破坏,在得到受压区高度 x 后还需要利用式(7)和式(8)来计算和判断受弯构件的实际配筋率 ρ 是否满足 $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$ 的要求。若满足要求,则受弯构件为适筋构件,否则为超筋构件,需重新设计构件及其配筋。

此外,根据混凝土受弯构件发生界限破坏时的相对界限受压区高度 ξ_b 就可以计算单筋截面钢筋混凝土受弯构件正截面所能承担的最大弯矩 $M_{u,\max}$,将计算相对界限受压区高度 ξ_b 的表达式(3)代入式(10)中的第1式可得到最大弯矩 $M_{u,\max}$ 为

$$M_{u,\max} = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1 - 0.5 \xi_b) \quad (18)$$

以上讲解了单筋矩形截面钢筋混凝土简支梁正截面承载能力 M_u 和受拉区全部受拉钢筋 A_s 的计算方法。为便于学生掌握计算过程和配筋的构造要求,还需要结合实际案例对其计算步骤进行讲解。实际工程案例及其计算步骤如下。

[案例 1] 某地铁车站的框架结构中顶纵梁的跨度为 10 m,承受顶板传递的均布恒载的标准值为 $g_k = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$,承受路面车辆均布的可变荷载标准值为 $q_k = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$,车站的安全等级为一级,环境类别为一类,车站设计耐用年限为 100 年,现需要设计梁的截面尺寸和配置其内部的受拉钢筋 A_s 。详细的计算步骤分别为:

(1) 将纵梁设计为简支梁,其混凝土强度等级为 C35, C35 混凝土轴心抗压强度设计值为 $f_c = 16.7 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$,其轴心抗拉强度设计值为 $f_t = 1.57 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ 。受拉钢筋采用 HRB400 级普通钢筋,其抗拉强度设计值为 $f_y = 360 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ 。地铁车站结构重要性系数 $\gamma_0 = 1.1$,永久荷载的分项系数 $\gamma_G = 1.2$,可变荷载的分项系数 $\gamma_Q = 1.5$,车站结构顶板可变荷载考虑其使用年限的调整系数 $\gamma_L = 1.1$,并选取 $a_s = 40 \text{ mm}$ 。根据《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010)得混凝土强度等级为 C35 的构件中配置 HRB400 级普通钢筋时的相对界限受压区高度 $\xi_b = 0.518$ [17] [18]。

(2) 根据梁的跨度 $l = 10 \text{ m}$,选取矩形截面的高度 $h \geq l/5 \sim l/6$,取 $h \geq l/5 = 2000 \text{ mm}$,其宽度 $b = h/2 \sim h/3$,取 $b = h/2$,则梁截面高度 $h = 2000 \text{ mm}$,宽度 $b = 1000 \text{ mm}$ 。因 $a_s = 40 \text{ mm}$,则梁正截面的有效高度 $h_0 = h - a_s = 2000 \text{ mm} - 40 \text{ mm} = 1960 \text{ mm}$ 。

(3) 计算简支梁的重力 $w = 1.0 \text{ m} \times 2.0 \text{ m} \times 25 \text{ kN}/\text{m}^3 = 50 \text{ kN}/\text{m}$,则梁承担的荷载设计值 q 为

$$q = \gamma_0 (\gamma_G g_k + \gamma_G w + \gamma_L \gamma_Q q_k) = 1.1 \times (1.2 \times 120 + 1.2 \times 50 + 1.5 \times 1.1 \times 80) \text{ kN}/\text{m} = 369.6 \text{ kN}/\text{m} \quad (19)$$

由此得简支梁跨中的最大弯矩设计值 M 为

$$M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \times 369.6 \times 10^2 (\text{kN}\cdot\text{m}) = 4620.0 \times 10^6 (\text{N}\cdot\text{mm}) \quad (20)$$

(4) 为便于对比,此处先采用第1种方法中的式(12)来计算混凝土受压区高度 x ,由式(12)得

$$x = h_0 - \sqrt{h_0^2 - \frac{2M}{\alpha_1 f_c b}} = h_0 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{\alpha_1 f_c b h_0^2}} \right] = 1960 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 4620 \times 10^6}{1 \times 16.7 \times 1000 \times 1960^2}} \right] = 146.63 (\text{mm}) \quad (21)$$

由于受压区高度 $x = 146.63 \text{ mm} < x_b = \xi_b h_0 = 0.518 \times 1960 \text{ mm} = 1015.28 \text{ mm}$,由此配筋后该受弯构件为适筋构件,不是超筋构件。

(5) 根据式(13)计算受拉钢筋的横截面面积 A_s

$$A_s = \frac{M}{f_y \left(h_0 - \frac{x}{2} \right)} = \frac{4620 \times 10^6}{360 \times \left(1960 - \frac{146.63}{2} \right)} = 6802.56 (\text{mm}^2) \quad (22)$$

从而得到受弯构件中受拉区的受拉钢筋横截面面积 $A_s = 6802.56 \text{ mm}^2$ 。

(6) 还可以按照第 2 种方法中的式(16)和式(17)来分别计算简支梁正截面抵抗矩系数 α_s 、内力臂系数 γ_s 和全部受拉钢筋的横截面面积 A_s ，即有

$$\begin{cases} \alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} = \frac{4620 \times 10^6}{1 \times 16.7 \times 1000 \times 1960^2} = 0.072 \\ \gamma_s = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha_s}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2 \times 0.0720}}{2} = 0.9625 \\ A_s = \frac{M}{f_y h_0 \gamma_s} = \frac{4620 \times 10^6}{360 \times 1960 \times 0.9625} \text{ mm}^2 = 6802.56 \text{ mm}^2 \end{cases} \quad (23)$$

由此得到全部受拉钢筋的横截面面积 $A_s = 6802.56 \text{ mm}^2$ ，此值与前述的式(22)计算得到的数值相同。由此表明，虽然采用 2 种计算方法，但计算得到的受拉钢筋横截面面积 A_s 的结果是一致的。相比而言，采用第 1 种方法计算更简便。故在实际设计时优先采用第 1 种计算方法。

(7) 根据计算所得到的全部受拉钢筋的横截面面积 $A_s = 6802.56 \text{ mm}^2$ ，选配 14 根 $\Phi 25\text{HRB400}$ 级钢筋，由此得到实际受拉钢筋的横截面面积 $A_s = 6872 \text{ mm}^2$ 。

(8) 计算单筋截面受弯简支梁的实际配筋率 ρ ，并判断其值是否小于受拉钢筋的最小配筋率 $\rho_{\min}$ 。

单筋截面简支梁的实际配筋率 ρ 为

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = \frac{6872}{1000 \times 2000} = 0.00343 \quad (24)$$

根据《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)中的规定[17]，可根据式(8)得到该单筋截面简支梁一侧的最小配筋率 $\rho_{\min}$ 为

$$\rho_{\min} = \max \left\{ \frac{0.2}{100}, \frac{45}{100} \frac{f_t}{f_y} \right\} = \max \left\{ \frac{0.2}{100}, \frac{45}{100} \times \frac{1.57}{360} \right\} = 0.002 \quad (25)$$

因此简支梁的实际配筋率 $\rho = 0.00343 > \rho_{\min} = 0.002$ ，满足《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)中对混凝土受弯构件一侧最小配筋率的要求[17]。

此外，将式(2)代入式(9)即可计算单筋截面简支梁等效矩形应力图形中相对受压区高度 ξ ，即有

$$\xi = \frac{A_s f_y}{\alpha_1 f_c b h_0} = \frac{6872 \times 360}{1 \times 16.7 \times 1000 \times 1960} = 0.0755 \quad (26)$$

根据《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)中的规定[17]，采用强度等级为 C35 混凝土浇筑的简支梁中若配置 HRB400 级普通钢筋时，其受弯构件中等效矩形应力图形的相对界限受压区高度 $\xi_b = 0.518$ [17] [18]，而实际受弯简支梁正截面等效矩形应力图形的相对受压区高度 $\xi = 0.0755 < \xi_b = 0.518$ ，因此配置 14 根 $\Phi 25\text{HRB400}$ 级受拉钢筋的单筋截面受弯简支梁为适筋梁，由此得到单筋矩形截面简支梁的配筋图见图 5 所示，在受拉区需布置双层普通受力钢筋，钢筋的混凝土保护层厚度为 40 mm。

此外，利用式(18)还可以计算该单筋截面简支梁按适筋梁设计时截面所能承担的最大弯矩 $M_{u,\max}$ 值，将与其对应的相对界限受压区高度 $\xi_b = 0.518$ 以及其余设计参数代入式(18)可得

$$M_{u,\max} = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b \left(1 - \frac{1}{2} \xi_b \right) = 1 \times 16.7 \times 1000 \times 1960^2 \times 0.518 \times \left(1 - 0.5 \times 0.518 \right) = 24625.01 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (27)$$

由此得到该单筋截面简支梁所能承受的跨中最大弯矩为 $24625.01 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 。

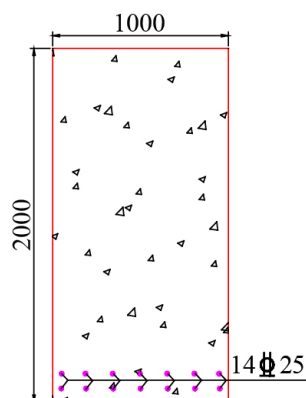


Figure 5. Reinforcement diagram for simply supported beam with singly reinforced cross-section
图 5. 单筋截面简支梁配筋图

5. 双筋矩形截面受弯构件正截面承载力的计算方法

所谓双筋矩形截面受弯构件就是在混凝土受弯构件的受拉区配置受拉钢筋的同时还在受压区内配置受压钢筋,以形成双筋截面受弯构件。由于双筋截面受弯构件在受压区内用钢筋来承担压力是不经济的,因此通常在以下 3 种场合下可采用双筋截面受弯构件:(1) 混凝土结构或构件承受交变荷载如地震、振动等使截面弯矩改变方向的场合;(2) 截面承受的弯矩设计值超过单筋截面所能承受的最大弯矩设计值的场合;(3) 以某种原因如连续梁的某些支座内需要在受压区配置钢筋的场合。

为便于讲解,建立如图 6 所示的双筋矩形截面的简支梁承载模型。简支梁承受对称的集中荷载 P ,并且在其受压区内配置受压钢筋。

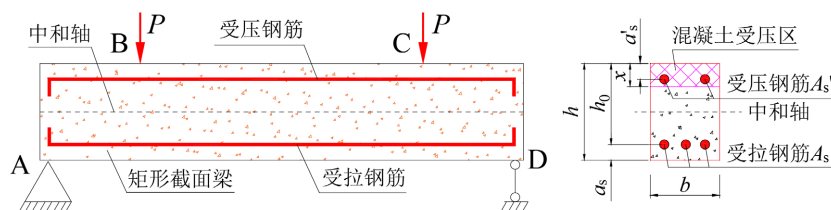


Figure 6. Simply supported beam with doubly reinforced cross-section
图 6. 双筋矩形截面简支梁

图 6(a)为简支梁的承载模型,而图 6(b)为简支梁的矩形正截面。在图 6(b)中 a'_s 为纵向受压钢筋的合力作用点至横截面受压边缘的距离,单位为 mm。 A'_s 为受压区全部受压钢筋的横截面面积,以 mm^2 计。其余符号的含义同图 3(b)。在图 6 中截取一小段简支梁,即可得到双筋矩形截面适筋梁正截面承载力的计算模型,其如图 7 所示,并在图 7(a)中建立二维坐标系 xoy 。

根据图 7(a)中梁正截面上受拉钢筋的拉力 $A_s f_y$ 和受压钢筋的压力 $A'_s f'_y$ 以及受压区混凝土所承受的压力 $\alpha_1 f_c b x$ 就可以分析正截面的承载力。

首先沿 x 轴方向上所有的作用力应处于静力平衡状态,则得沿 x 轴方向上的静力平衡关系式为

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_c b x + A'_s f'_y = A_s f_y \quad (28)$$

其次根据图 7(a)中分别沿受拉钢筋的合力作用点建立静力矩平衡关系式,则有

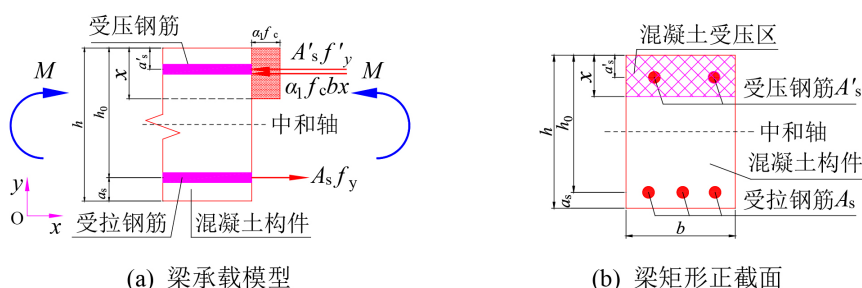


Figure 7. Calculation diagram for strength of beam with doubly reinforced cross-section

图 7. 双筋矩形截面梁承载力计算图

$$\sum M = 0 \Rightarrow M \leq M_u = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + A'_s f'_y (h_0 - a'_s) \quad (29)$$

式(28)和式(29)就是计算双筋矩形截面梁正截面承载力的公式。由于公式中存在有 3 个未知数, 即混凝土受压区高度 x 、受拉钢筋的横截面面积 A_s 和受压钢筋的横截面面积 A'_s , 2 个公式中有 3 个未知数在数学上是无法求解的。为便于讲解, 并拓宽学生的知识和引导学生开展创新思维, 此处可讲解 2 种求解的方法。

(1) 弯矩和受拉钢筋截面积分解法

这种方法就是将双筋矩形截面简支梁正截面承受的弯矩 M_u 和受拉区的全部受拉钢筋横截面面积 A_s 进行分解, 即将双筋截面所承受的弯矩设计值 M_u 分解成 M_{u1} 和 M_{u2} , 其中弯矩 M_{u1} 是由受压区混凝土和部分受拉区的受拉钢筋 A_{s1} 承担, 这部分构成单筋截面; 而弯矩 M_{u2} 则由受压钢筋 A'_s 和另外一部分受拉钢筋 A_{s2} 来承担。双筋矩形截面弯矩和受拉钢筋分解计算图见图 8 所示。

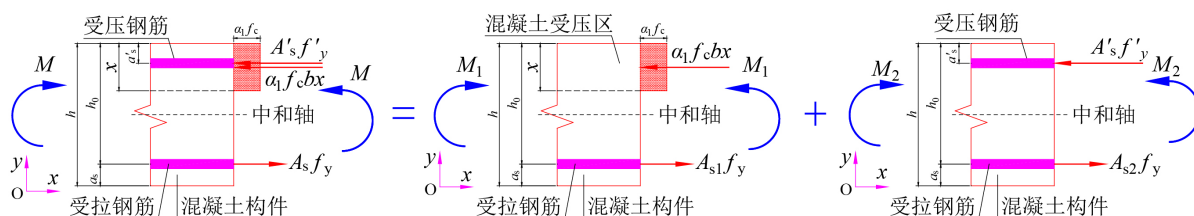


Figure 8. Decomposition diagram of bending moment and reinforcing bar in doubly reinforced cross-section

图 8. 双筋截面弯矩和钢筋分解图

根据图 8 中沿 x 轴方向的静力平衡和对受拉钢筋 A_s 合力作用点建立静力矩平衡关系可分别得到

$$M = M_1 + M_2 \quad (30)$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (31)$$

$$\alpha_1 f_c b x = A_{s1} f_y \quad (32)$$

$$M_{u1} = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (33)$$

$$A'_s f'_y = A_{s2} f_y \quad (34)$$

$$M_{u2} = A'_s f'_y (h_0 - a'_s) \quad (35)$$

当利用式(30)至式(35)计算时, 为避免所设计的钢筋混凝土双筋截面受弯构件成为超筋构件, 同样需

要满足式(7)和式(8)给出的条件。

为确保双筋矩形截面混凝土受弯构件发生破坏时其内部所配置的受压钢筋发生屈服,在等效矩形应力图形的受压高度 x 还应当满足

$$x \geq 2a'_s \quad (36)$$

如果在计算中得到的混凝土受压区高度 x 不满足式(36)时则取

$$x = 2a'_s \quad (37)$$

此时受压钢筋的合力与受压区混凝土受压合力的作用点相重合,则受弯构件正截面的受弯承载力为

$$M \leq A_s f_y (h_0 - a'_s) \quad (38)$$

由式(38)可得受拉钢筋的横截面面积 A_s 为

$$A_s \geq \frac{M}{f_y (h_0 - a'_s)} \quad (39)$$

此外,考虑到双筋矩形截面混凝土受弯构件的配筋率较大,故可不验算其最小配筋率 $\rho_{\min}$ 。

(2) 相对界限受压区高度法

将双筋矩形截面受弯简支梁正截面等效矩形应力图形的混凝土受压区高度 x 直接视为受弯构件正截面等效矩形应力图形的界限受压区高度 x_b ,从而由式(3)得到

$$x = x_b = \xi_b h_0 \quad (40)$$

将式(40)代入式(28)和式(29)即可求得受拉钢筋 A_s 和受压钢筋 A'_s ,即

$$\begin{cases} A'_s = \frac{M - \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1 - 0.5 \xi_b)}{f'_y (h_0 - a'_s)} \\ A_s = \frac{\alpha_1 f_c b h_0 \xi_b + A'_s f'_y}{f_y} \end{cases} \quad (41)$$

根据式(41)计算得到的双筋矩形截面中受拉和受压钢筋时可不需要再验算受压区高度 x 和配筋率 ρ 满足式(7)和式(8)中的要求。

但需要特别强调的是,用界限受压区高度 x_b 代替混凝土受压区高度 x 时,需要根据式(18)来计算单筋截面所承受的最大弯矩 $M_{u,\max}$,并将计算值 M 与受弯构件所能够承受的最大弯矩设计值 $M_{u,\max}$ 相比,若 $M > M_{u,\max}$ 则必须要按照双筋截面构件进行计算,否则就应按单筋截面进行计算。

将上述 2 种计算方法对比,后者计算更加简便,可优先推荐采用第(2)种方法来配置双筋截面受弯构件的受力钢筋。

至此讲解了双筋矩形截面受弯简支梁正截面承载力以及受拉钢筋和受压钢筋的计算方法。其中,需要特别强调的是,将弯矩 M_u 和受拉钢筋截面积 A_s 进行分解的方法可使无法求解 3 个未知数的求解成为可能,有利于拓宽学生的视野,并引导学生树立创新思维的意识。为便于学生掌握计算理论,还需要结合实际案例讲解具体的计算步骤。所采用的实际案例和计算过程如下。

[案例 2] 以某地铁站底纵梁为例,其跨度为 10 m,承受顶板和中板传递的均布恒载的标准值为 $g_k = 580 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$,承受路面车辆等均布的可变荷载标准值为 $q_k = 150 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$,车站的安全等级为一级,环境类别为一类,车站设计耐用年限为 100 年,梁的矩形正截面尺寸 $b = 800 \text{ mm}$, $h = 1500 \text{ mm}$,需要配置梁中的受力钢筋。相应的计算步骤为:

(1) 将纵梁设计为简支梁,其混凝土强度等级为 C40,由此得 C40 混凝土轴心抗压强度设计值为 $f_c =$

$19.1 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, 其轴心抗拉强度设计值为 $f_t = 1.71 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ 。梁中受拉钢筋采用 HRB400 级普通钢筋, 其抗拉强度设计值为 $f_y = 360 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, 其抗压强度设计值为 $f'_y = 360 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ 。车站的结构重要性系数 $\gamma_0 = 1.1$, 永久荷载的分项系数 $\gamma_G = 1.2$, 可变荷载的分项系数 $\gamma_Q = 1.5$, 底纵梁按照可变荷载考虑设计耐用年限的调整系数 $\gamma_L = 1.1$, 并选取 $a_s = 40 \text{ mm}$, $a'_s = 40 \text{ mm}$ 。

(2) 根据简支梁正截面的高度 $h = 1500 \text{ mm}$, 因 $a_s = 40 \text{ mm}$, 则梁正截面的有效高度 $h_0 = h - a_s = 1500 \text{ mm} - 40 \text{ mm} = 1460 \text{ mm}$ 。

(3) 计算简支梁的重力 $w = 0.8 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 25 \text{ kN}/\text{m}^3 = 30 \text{ kN}/\text{m}$, 则梁承担的荷载设计值 q 为

$$q = \gamma_0 (\gamma_G g_k + \gamma_G w + \gamma_Q \gamma_L q_k) = 1.1 \times (1.2 \times 580 + 1.2 \times 30.0 + 1.5 \times 1.1 \times 150) (\text{kN}/\text{m}) = 1077.45 \text{ kN}/\text{m} \quad (42)$$

由此得简支梁跨中的最大弯矩设计值 M 为

$$M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \times 1077.45 \times 10^2 (\text{kN}\cdot\text{m}) = 13468.13 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (43)$$

(4) 根据简支梁混凝土强度等级 C40 和采用 HRB400 级普通钢筋可由《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010)(2024 版)得到等效矩形应力图形的相对界限受压区高度 $\xi_b = 0.518$ [17], 将其代入式(18)可计算得到该单筋截面简支梁所能承担的最大弯矩 $M_{u,\max}$ 为

$$M_{u,\max} = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b \left(1 - \frac{1}{2} \xi_b\right) = 1 \times 19.1 \times 800 \times 1460^2 \times 0.518 \times (1 - 0.5 \times 0.518) = 12501.93 \times 10^6 (\text{N}\cdot\text{mm}) \quad (44)$$

由于底纵梁的跨中弯矩最大值 $M = 13468.13 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$, 其大于单筋矩形截面梁所能承担的最大弯矩 $M_{u,\max} = 12501.93 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$, 因此底纵梁应设计为双筋矩形截面受弯构件。

(5) 为使底纵梁中的钢筋用量为最小, 设底纵梁中正截面等效矩形应力图中的混凝土受压区高度 x 为相对界限受压区高度 x_b , 即 $x = x_b = \xi_b h_0$, 则采用图 8 所示的弯矩和受拉钢筋分解的方法。令 $M_{u1} = M_{u,\max}$, 则 M_{u2}

$$M_{u2} = M - M_{u,\max} = 13468.13 \times 10^6 - 12501.93 \times 10^6 = 966.19 \times 10^6 (\text{N}\cdot\text{mm}) \quad (45)$$

(6) 由式(35)可计算双筋矩形截面简支梁中受压区受压钢筋的横截面面积 A'_s 为

$$A'_s = \frac{M_{u2}}{f'_y (h_0 - a'_s)} = \frac{966.19 \times 10^6}{360 \times (1460 - 40)} = 1890.05 (\text{mm}^2) \quad (46)$$

从而得到双筋矩形截面简支梁受压区全部受压钢筋的横截面面积 $A'_s = 1890.05 \text{ mm}^2$ 。

(7) 将底纵梁中正截面等效矩形应力图中的混凝土受压区高度 $x = x_b = \xi_b h_0$ 代入式(28)可计算得到双筋矩形截面简支梁中全部受拉钢筋的横截面面积 A_s 为

$$A_s = \frac{\alpha_1 f_c b h_0 \xi_b + A'_s f'_y}{f_y} = \frac{1 \times 19.1 \times 800 \times 1460 \times 0.518 + 1890.05 \times 360}{360} = 33989.93 (\text{mm}^2) \quad (47)$$

(8) 根据受拉钢筋和受压钢筋的横截面面积分别选配受力钢筋, 受拉区配置 42 根 $\Phi 32$ HRB400 级, 分 3 层布置, 而受压区则配置 3 根 $\Phi 28$ HRB400 级钢筋。由此得实际配筋率为 2.96%, 全部纵筋未超过最大配筋率 5% 的要求。双筋矩形截面配筋图见图 9 所示。

以上讲解了双筋矩形截面受弯简支梁正截面承载力和配筋的设计和计算方法。根据钢筋混凝土受弯构件的类型, 常用的受弯构件除了矩形截面以外还有 T 形构件, 为增加学生的知识面, 还需要进一步讲解 T 形截面梁正截面承载力和配筋的设计方法。

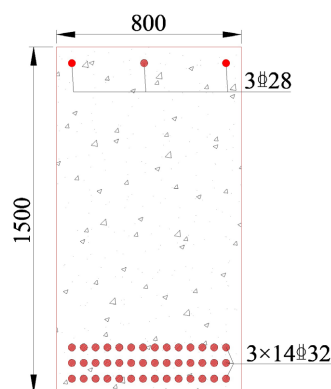


Figure 9. Reinforcement diagram for doubly reinforced cross-section of simply supported beam

图 9. 双筋矩形截面简支梁配筋图

6. T 形截面受弯构件正截面承载力的计算方法

从单筋矩形截面和双筋矩形截面钢筋混凝土简支梁正截面承载力和配筋设计中可以看出, 矩形截面简支梁中受拉区的部分混凝土并未参与承载工作, 因此可以将受拉区两侧的这部分混凝土去除, 形成图 10 所示的 T 形截面梁。此外还可以设计成箱形截面梁。如此设计的 T 形梁和箱形梁不仅不降低梁的正截面承载能力, 而且还可以减少混凝土材料用量, 降低混凝土梁的重量, 节约工程造价。因此 T 形梁和箱形梁在工程中尤其是交通建筑如地铁高架区间车站和桥中得到了广泛应用, 本文以 T 形梁为例。为便于分析, 设 T 形梁的翼缘宽度为 b'_f , 高度为 h'_f , 腹板又称梁肋的宽度为 b , 腹板的高度为 h , 受拉区受拉钢筋 A_s 的合力作用点至腹板截面受拉边缘的距离为 a_s , T 形梁受压区等效矩形应力图形的混凝土受压区高度为 x , 受拉钢筋的横截面面积为 A_s , 见图 10 所示。

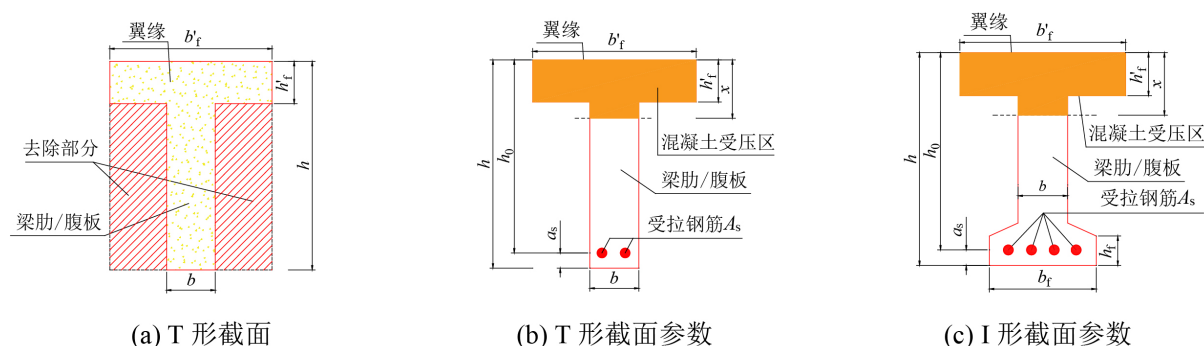


Figure 10. Types of cross-section of singly reinforced T-shaped beam

图 10. T 形梁单筋截面形式

图 10(a)为 T 形截面梁, 图 10(b)为 T 形截面设计参数, 而图 10(c)则为 I 形截面及其设计参数。图 10(c)所示的截面梁多用于因受拉钢筋较多时所采用的扩大端头后而形成的 I 形截面梁。

由于 T 形截面梁受压区的混凝土面积较大, 因此将 T 形截面梁仅在受拉区配置受拉钢筋。对于图 10 所示的 T 形截面受弯构件而言, 其受压区可有 2 种状况, 即混凝土受压区的高度 $x \leq h'_f$ 或 $x > h'_f$ 。因此需要分 2 种状况分别对 T 形单筋截面梁受拉钢筋进行计算和设计。

(1) 当受压区高度 $x \leq h'_f$ 时, 即受压区位于翼缘内, 则翼缘中混凝土的受压区为矩形, 见图 11 所示。

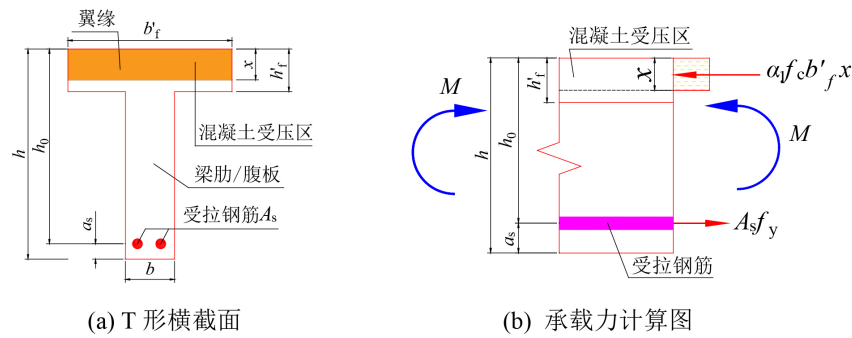


Figure 11. Calculation diagram for concrete compression zone height $x \leq h'_f$

图 11. 受压区高度 $x \leq h'_f$ 的计算图

根据图 11, 当 T 形梁的混凝土受压区高度 $x \leq h'_f$ 时, 其截面承载模式与单筋矩形截面受压构件的承载模式即图 11(b)和图 4 一致, 根据图 11(b)中受拉钢筋 A_s 和混凝土受压区中的静力平衡以及对受拉钢筋合力作用点的静力矩平衡可分别得到

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_c b'_f x = A_s f_y \quad (48)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M \leq M_u = \alpha_1 f_c b'_f x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (49)$$

式中符号含义同前。 M 为 T 形截面的弯矩设计值, 其单位为 $\text{N}\cdot\text{mm}$ 。

根据式(48)和式(49)计算 T 形截面梁的承载力和受拉钢筋 A_s 后, 就需要验算根据最小配筋率的要求验算受拉钢筋的横截面面积 $A_s > \rho_{\min} b h$ 。

(2) 当受压区高度 $x > h'_f$ 时, 即受压区位于 T 形梁的腹板内, 则 T 形梁截面中混凝土的受压区也为 T 形, 因而此时整个受压区的横截面面积不再是规则的矩形, 给计算带来了困难。为便于分析和计算受压区的面积, 可将受压区在腹板内的截面面积分解为 2 个区域, 即采用面积分解法, 具体见图 12 所示。根据图 12 中 T 形截面受压区面积的分解图, 采用静力平衡和静力矩平衡可分别得到

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_c b x + \alpha_1 f_c (b'_f - b) h'_f = A_s f_y \quad (50)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M \leq M_u = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + \alpha_1 f_c (b'_f - b) h'_f \left(h_0 - \frac{h'_f}{2} \right) \quad (51)$$

式中的符号含义同前。 M 为 T 形截面的弯矩设计值, 其单位为 $\text{N}\cdot\text{mm}$ 。

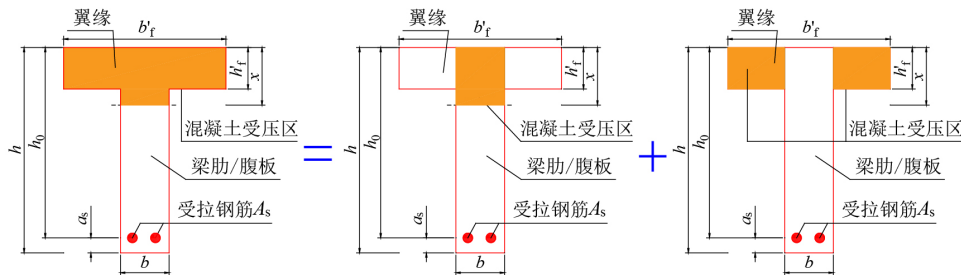


Figure 12. Calculation diagram for concrete compression zone height $x > h'_f$

图 12. 混凝土受压区高度 $x > h'_f$ 的计算图

在采用式(50)和式(51)计算和设计 T 形梁的配筋时,应当满足 $x < x_b = \xi_b h_0$, 即将 T 形梁设计为适筋梁。

从图 11 和图 12 所示的 T 形梁受压区高度处于翼缘内还是腹板内, 根据式(48)至式(51)是无法判断的。但对于 T 形梁的翼缘和腹板而言, 当正截面等效矩形应力图形的混凝土受压区高度 $x = h'_f$ 是两种类型的界限状态, 此时 T 形梁正截面所承受的弯矩 M_{lim} 为

$$M_{lim} = \alpha_1 f_c b'_f h'_f \left(h_0 - \frac{h'_f}{2} \right) \quad (52)$$

即在 $x = h'_f$ 的临界弯矩为 M_{lim} , 而当 $x < h'_f$ 时的弯矩要小于 M_{lim} , 因此可以计算 M_{lim} , 并利用 $M_{lim} < M$ 时, T 形梁就属于混凝土受压区高度 $x \leq h'_f$ 时的状况, 即受压区位于翼缘内, 可以按照式(48)和式(49)来计算 T 形梁正截面的承载力和受拉钢筋 A_s 。而当 $M_{lim} > M$ 时, T 形梁则属于混凝土受压区高度 $x > h'_f$ 时的状况, 即受压区位于腹板内, 此时就需要采用式(50)和式(51)来计算 T 形梁的正截面承载力和受拉钢筋 A_s 。

以上讲解了 T 形梁受弯时正截面承载力计算方法, 为便于学生理解和掌握其方法, 同样需要结合实际案例对其计算过程进行讲解。案例和具体的计算过程如下。

[案例 3] 某 T 形简支梁采用混凝土强度等级 C40 进行浇筑, 其截面的尺寸见图 13 所示, 图 13 中几何尺寸单位以 mm 计。梁内受拉钢筋设计采用 HRB400 级钢筋, 当梁承担的弯矩设计值 $M = 560 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 试配置其受拉钢筋 A_s 。

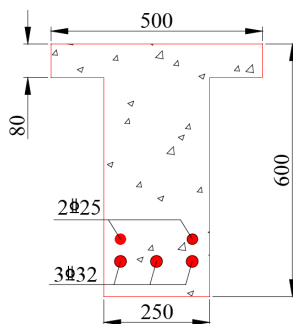


Figure 13. Cross-section of T-shaped beam

图 13. T 形梁横截面

具体的计算步骤为:

(1) 根据图 13 可得, T 形梁的翼缘宽度 $b'_f = 500 \text{ mm}$, 翼缘高度 $h'_f = 80 \text{ mm}$, 腹板的高度 $h = 600 \text{ mm}$, 腹板宽度 $b = 250 \text{ mm}$ 。由混凝土强度等级 C40 确定混凝土梁的轴心抗压强度设计值 $f_c = 19.1 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, 其抗拉强度设计值 $f_t = 1.71 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, HRB400 级普通钢筋的抗拉强度设计值 $f_y = 360 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, 其抗压强度设计值 $f'_y = 360 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, T 形简支梁的相对界限混凝土受压区高度 $\xi_b = 0.518$ [17] [18]。选取 $a_s = 65 \text{ mm}$, 则 T 形梁正截面的腹板有效高度 $h_0 = h - a_s = 600 \text{ mm} - 65 \text{ mm} = 535 \text{ mm}$ 。

(2) 根据式(52)计算 M_{lim} , 即

$$M_{lim} = \alpha_1 f_c b'_f h'_f \left(h_0 - \frac{h'_f}{2} \right) = 1 \times 19.1 \times 500 \times 80 \times \left(535 - \frac{80}{2} \right) = 378.18 \times 10^6 (\text{N}\cdot\text{mm}) \quad (53)$$

由于 T 形梁的 $M = 560 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} > M_{lim} = 378.18 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$, 故该 T 形梁的受压区高度 $x > h'_f$, 即

受压区的高度落在腹板内, 因此需采用受压区高度 $x > h'_f$ 时的式(50)和式(51)来计算受拉钢筋的横截面面积 A_s 。

(3) 利用式(51)计算混凝土受压区高度 x 。对式(51)求解关于 x 的一元二次方程式, 取其较小值即有

$$x = h_0 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \left[M - \alpha_1 f_c (b'_f - b) h'_f \left(h_0 - \frac{h'_f}{2} \right) \right]}{\alpha_1 f_c b h_0^2}} \right\} \quad (54)$$

$$= 535 \times \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \left[560 \times 10^6 - 1 \times 19.1 \times (500 - 250) \times 80_f \times \left(535 - \frac{80}{2} \right) \right]}{1 \times 19.1 \times 250 \times 535^2}} \right\} = 173.24 (\text{mm})$$

由于 T 形梁等效矩形应力图形的混凝土受压区高度 $x = 173.24 \text{ mm}$, 而根据式(40)计算得到界限受压区高度 $x_b = \xi_b \times h_0 = 0.518 \times 535 \text{ mm} = 277.13 \text{ mm}$, 故混凝土受压区高度 $x < x_b$, 故简支梁是适筋梁。

(4) 将 T 形梁等效矩形应力图形的混凝土受压区高度 $x = 173.24 \text{ mm}$ 代入式(50)即可得到受拉钢筋的横截面面积 A_s , 即

$$A_s = \frac{\alpha_1 f_c b x + \alpha_1 f_c (b'_f - b) h'_f}{f_y} = \frac{1 \times 19.1 \times 250 \times 173.24 + 1 \times 19.1 \times (500 - 250) \times 80}{360} = 3358.95 (\text{mm}^2) \quad (55)$$

根据计算得到的受拉钢筋横截面面积 $A_s = 3358.95 \text{ mm}^2$ 即可选取 $2\Phi 25\text{HRB400} + 3\Phi 32\text{HRB400}$ 级钢筋, 则实际受拉钢筋横截面面积 $A_s = 3395 \text{ mm}^2$, 实际配筋率 $\rho = 2.26\%$, 其满足国家标准中规定的混凝土构件中全部受力钢筋配筋率小于 5% 的要求, 由此得到 T 形简支梁的配筋图见图 13 所示。此外, 在图 12 中采用了将受压区面积进行分解的方法, 通过分解法使 T 形梁中受压区处于腹板中时受压面积难以计算的问题得以解决, 对此问题求解方法的讲解有利于引导学生开展创新思维和拓宽思维模式。

至此讲解了钢筋混凝土受弯构件正截面承载力和受力钢筋的计算和设计方法, 就钢筋混凝土构件正截面形式而言, 工程中应用较多的受弯构件主要是矩形截面梁和 T 形梁。因此, 在组织教学内容时重点讲解了单筋矩形正截面、双筋矩形截面受弯构件和 T 形梁单筋截面承载力计算与受力钢筋的设计方法。对于箱梁正截面承载力和受力钢筋的配置方法可参照 T 形的计算方法进行分析, 这项内容可作为学生课后的课程设计来完成。

7. 结论

本文结合钢筋混凝土受弯构件正截面承载力和配筋设计的教学内容, 基于 PBL (Problem-Based Learning) 的教学模式, 推演和提出了计算钢筋混凝土受弯构件正截面承载力的教学设计, 分别从单筋矩形正截面简支梁、双筋矩形正截面简支梁以及 T 形截面梁的承载模型, 提出了讲解截面承载力和配筋方法的具体内容和思路。从便于学生理解和掌握的角度考虑, 针对钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算方法的教学内容和讲解的思路可总结如下: (1) 首先需要讲解混凝土受弯构件的类型和简支梁中截面应力与受拉区配筋和配筋率的概念。(2) 根据配筋率的大小讲解钢筋混凝土适筋梁、少筋梁和超筋梁的破坏模式。(3) 以承受集中对称荷载的钢筋混凝土简支梁为例, 讲解受弯构件正截面简化的等效矩形应力图形、混凝土受压区高度、混凝土相对受压区高度和混凝土相对界限受压区高度的定义。(4) 分析和讲解计算单筋矩形截面简支梁正截面承载力和配筋的方法。(5) 结合单筋矩形截面引入和讲解双筋矩形截面受弯梁正截

面承载力计算和配筋的方法。(6) 讲解 T 形梁正截面承载力计算和配筋的方法。(7) 对比求解单筋梁、双筋梁和 T 形梁中混凝土受压区高度和受力钢筋的两种方法, 给出推荐方法, 以拓宽学生知识面和启发学生的创新思维。(8) 结合单筋截面梁、双筋截面梁和 T 形梁的工程案例, 讲解受弯构件正截面承载力计算和配筋的设计过程, 并结合《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)讲解对受弯构件中配筋的构造要求。

以上教学内容的设计和组织实施遵循了先讲解混凝土受弯构件、受弯构件中受压区钢筋和构件中配筋率的基本概念及其定义, 然后根据受弯构件中混凝土受压区的压力和受拉钢筋的拉力处于静力和弯矩平衡状态引入正截面承载力计算的理论和计算方法, 并结合工程案例, 分别讲解了混凝土受弯构件中单筋矩形截面构件、双筋矩形截面构件、T 形截面构件承载力和配筋的计算过程, 可实现理论与实践的紧密结合, 便于学生理解、掌握和灵活应用。

在课堂教学过程中, 教师除了组织、设计和讲解教学内容与知识点以外, 还应当利用 BPL 的模式, 结合地铁站和桥梁结构中的梁、板等构件强度和受力钢筋的设计和计算问题积极引导学生参与教学活动, 所采用的教学活动主要有: (1) 教师在讲解课程教学内容前需要向学生说明, 在课程的教学过程中会随机抽检 2~3 名学生, 由被抽检到的学生陈述教师在课堂上已讲授过的内容, 而教师则根据学生陈述时对知识点的掌握与熟练程度给出评价, 并将学生的表现纳入到学生的总评成绩当中。以 2023 学年~2026 学年《地下铁道》课程中讲解 T 形梁的承载力为例, 在课堂讲解 T 形截面梁受弯时其受压区高度在翼缘和腹板内的计算受压区面积方法后, 分别随机抽取了 3 名学生。由 3 名学生来讲述各自对 T 形梁受压区面积分解计算方法的计算理解。课堂随机抽检的结果表明, 被抽检到的 9 名学生均能够理解并讲授 T 形梁受压区高度位于翼缘内和腹板内时受压面积的计算方法。(2) 针对教学内容, 教师可在课堂教学结束前的 10~15 min, 由教师布置针对教学内容的随堂测验或发放问卷, 要求学生独立完成, 并根据学生完成随堂测验的成绩将其纳入到学生的总评成绩之中。(3) 教师还需要结合课堂教学内容, 基于 BPL 模式布置与教学内容相关的能够体现地铁结构工程如车站的梁和板结构、区间隧道以及桥梁问题的课程设计, 要求学生课后结合教师讲解的教学课件、教学参考书以及网络在线教育资源如中国大学 MOOC、Deepseek、豆包、千问、百度等完成, 并根据学生完成课程设计的质量, 将其评分一并纳入到考核学生选修本课程的总评成绩当中。(4) 教师则根据学生在课程教学中的参与程度、随堂测验的成绩、回答问卷调查和完成课程设计的质量以及存在的问题, 在课程教学中及时对学生讲评, 并通过课程教学期间由教师组建的 QQ 课程群、微信群等在线资源答复和解释学生在学习教学内容和完成课程设计中遇到的问题, 帮助学生理解和掌握课程中由教师所讲授过的专业知识点和计算与分析方法。

通过采用上述的教学设计, 在西南交通大学 2023 学年至 2026 学年间面向土木工程和城市地下空间工程专业本科学生而开设的《地下铁道》课程中予以实践。从选修本课程的学生人数和考试成绩分析, 2023 学年选修的学生人数为 140 人, 2024 年选修的人数为 135 人, 2025 年选修的人数为 120 人, 2026 年选修的人数为 90 人。通过对学生课程学习期间的测验、课程设计以及期末考试成绩的分析, 4 学年中每年能够掌握混凝土受弯构件承载力的计算和配筋设计的人数分别占选修总人数的比例为 93.12%、92.4%、95.3%和 96.3%。由此表明经过对选修本课程的 4 届学生合计 485 人学习成绩的考核和评价, 约 92%以上的学生均能够掌握钢筋混凝土受弯构件正截面承载力的计算方法, 并且能够根据计算结果和利用《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)开展混凝土受弯构件的配筋设计, 对拓宽学生的思维和树立创新意识发挥了良好的作用, 同时有效保障了本课程的教学质量。

基金项目

本文的研究得到四川省 2021-2023 年高等教育人才培养质量和教学改革项目(JG2021-258)的支持。

参考文献

- [1] 周晓军. 混合式教学法在《地下铁道》课程中的应用与效果评价[J]. 教育教学论坛, 2019(48): 176-177.
- [2] 周晓军, 周佳媚. 城市地下铁道与轻轨交通[M]. 第2版. 成都: 西南交通大学出版社, 2016.
- [3] 周晓军. 钢筋混凝土受弯构件斜截面承载力计算方法的教学设计和实践[J]. 创新教育研究, 2025, 13(2): 318-336.
- [4] 周晓军. 钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算的教学设计和实践[J]. 创新教育研究, 2025, 13(5): 644-666.
- [5] 周晓军. 钢筋混凝土偏心受压构件正截面受力钢筋计算的教学设计与实践[J]. 教育进展, 2024, 14(11): 1427-1451.
- [6] 周晓军. 钢筋混凝土偏心受拉构件正截面受力钢筋计算的教学设计与实践[J]. 教育进展, 2024, 14(11): 239-254.
- [7] 沈浦生, 梁兴文. 混凝土结构设计原理[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [8] 秦力, 魏春明. 混凝土结构基本原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [9] 许成祥, 张皓. 混凝土结构基本原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [10] 李鑫, 张锋春, 康玉梅. 基于“PBL 与 LBL 相融合教学法”的结构设计原理课程建设——以预应力混凝土结构为例[J]. 高教学刊, 2022, 8(31): 84-87+92.
- [11] 常威, 贾开武. CDIO + PBL 在土木工程专业教育应用探讨——以利默里克大学为考察对象[J]. 教育教学论坛, 2020(28): 282-283.
- [12] 曹永红, 张乃元. 学生视角下高校土木工程专业 PBL 教学模式改革思考[J]. 高等建筑教育, 2020, 29(1): 86-90.
- [13] 施利娟, 魏莉洁. PBL 教学法在“船舶强度与结构设计”课程中的应用[J]. 南通航运职业技术学院学报, 2013, 12(3): 126-128.
- [14] 孙建华. 基于 PBL 教学法的线性代数教学实践研究[J]. 学周刊, 2026(19): 17-20.
- [15] 杜翔云, Anette Kolmos, Jette Egelund Holgaard. PBL: 大学课程的改革与创新[J]. 高等工程教育研究, 2009, 57(3): 29-35.
- [16] 欧阳陶弢. PBL 教学法培养探究式学习能力教学设计思考——以“函数极限”概念为例[J]. 科学咨询, 2024(24): 77-80.
- [17] GB/T50010-2010 混凝土结构设计标准[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2024.
https://www.mohurd.gov.cn/gongkai/zc/wjk/art/2024/art_17339_778180.html, 2024-04-24.
- [18] 李守巨. 混凝土结构常用公式与数据速查手册[M]. 北京: 知识产权出版社, 2015.