

高等代数多项式章节教学难点分析与优化教学策略

熊 玮, 胡 琳

新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年8月10日; 录用日期: 2026年9月10日; 发布日期: 2026年9月17日

摘 要

多项式教学的核心障碍是学生从“算术思维”向“代数思维”转换困难, 集中体现在整除形式化、辗转相除、不可约多项式、形式微商四方面认知问题。基于认知负荷与结构主义理论, 提出“概念锚定-算法熟练-结构升华”三阶段模型, 结合类比迁移、问题链、可视化策略, 为课程建设提供参考。

关键词

高等代数, 多项式理论, 认知负荷, 教学难点, 优化策略

Analysis of Teaching Difficulties and Optimized Teaching Strategies for the Polynomial Chapter in Advanced Algebra

Wei Xiong, Lin Hu

School of Mathematical Sciences and Systems, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: August 10, 2026; accepted: September 10, 2026; published: September 17, 2026

Abstract

The core obstacle in polynomial teaching lies in students' difficulty transitioning from arithmetical thinking to algebraic thinking, which manifests as cognitive obstacles in four dimensions: formalization of divisibility, the Euclidean algorithm, irreducible polynomials, and formal derivatives. Based on cognitive load theory and structuralism, this study proposes a three-stage model: concept anchoring-algorithm proficiency-structural sublimation. Combined with analogy transfer, problem chains and visualization strategies, the research offers references for curriculum development.

文章引用: 熊玮, 胡琳. 高等代数多项式章节教学难点分析与优化教学策略[J]. 教育进展, 2026, 16(9): 1278-1283.

DOI: 10.12677/ae.2026.1692021

Keywords

Advanced Algebra, Polynomial Theory, Cognitive Load, Teaching Difficulties, Optimization Strategies

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高等代数多项式理论是连接初等代数算术思维与高等抽象代数结构思维的关键枢纽,也是后续线性空间、抽象环域、代数几何学习的前置基础。对于应用型本科院校学生,直接开篇讲授多项式会造成极强认知断层:学生长期依赖实数范围内因式分解、函数求根的直观经验,难以接受多项式环 $F[x]$ 纯粹形式化、不依赖函数赋值的公理体系。结合国内多校教学实践[1][2],提出多项式后置教学方案:将本章置于行列式-矩阵-线性方程组模块之后讲授。学生前置掌握的矩阵初等行变换、秩、线性组合等工具,可直接迁移至多项式带余除法、扩展辗转相除;消元降次与矩阵消元形成双向类比,以“次数”替代矩阵秩作为多项式空间度量,遵循由具体矩阵计算到抽象多项式结构螺旋上升认知规律,大幅降低新手学习者认知负荷,同时凸显多项式环与矩阵环共通的代数结构特征。

2. 课程定位与教学顺序的再思考

教学实践,建议应用型本科院校将多项式章节后置,置于“行列式-矩阵-线性方程组”之后讲授。此举遵循“由具体到抽象、由计算到结构”的认知规律:学生已掌握的矩阵行变换、秩与解空间结构,可迁移至多项式的带余除法与辗转相除法(行变换对应消元,秩对应次数度量)。该“螺旋式上升”顺序既降低认知负荷,又凸显多项式的枢纽地位。

3. 教学内容的知识图谱构建

教学应以“运算-结构-应用”三维坐标构建知识图谱:运算含加法、乘法、带余除法及辗转相除法;结构含整除、最大公因式、互素、不可约多项式、唯一分解及重因式;应用含多项式函数、根与因式关系、各类系数分解及艾森斯坦判别法。三维度通过“因式分解”思想贯通-整除、唯一分解、求根与判定的本质均为分解复杂对象为简单组合。教学应始终高举“分解法”主线,使学生领会多项式理论作为系统化分解工具的精髓。

4. 基于教学经验的观察与反思

基于近三届学生错题分析,多项式学习存在三类认知障碍:一为概念混淆型(约 1/3),将整除理解为运算而非关系,且混淆“约分”与“相伴”,证明中随意约去公因式;二为算法机械型(约 2/5),能完成辗转相除但无法用 Bézout 等式表示线性组合,未理解消元过程的线性组合保持性;三为结构缺失型(约 1/2),在可约性判定与标准分解中策略盲区明显,缺乏“数域决定分解形式”的意识,混淆不同数域规则,难以灵活选用判别法则。三类困难非智力问题,而是算法训练与结构理解失衡所致。优化关键:算法层搭阶梯支架,结构层绘认知地图。

5. 核心教学难点的深度解析与优化策略

5.1. 难点一：整除概念的形式化与带余除法的本质

在中学数学中，学生已经熟悉多项式的四则运算，但中学的整除往往带有分解因式的直观色彩，而高等代数中的整除是一个纯粹的形式化定义：称 $g(x)$ 整除 $f(x)$ ，若存在 $h(x)$ 使得 $f(x) = g(x)h(x)$ [1]。学生初学时容易忽略定义中的两个关键细节：一是 $h(x)$ 必须在同一多项式环中；二是整除关系不依赖于带余除法的计算过程，而是一种存在性刻画。

更为困难的是带余除法定理。虽然学生能够熟练进行多项式长除法，但他们往往将带余除法理解为一种计算技巧，而没有认识到它是一个存在唯一性定理。教材中通常表述为[2]：

定理 1 (带余除法) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$ ，且 $g(x) \neq 0$ ，则存在唯一的 $q(x), r(x) \in F[x]$ ，使得：

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \text{ 或 } r(x) = 0。$$

学生在学习此定理时，常产生两个疑问：第一，为什么余式的次数必须严格低于除式的次数？第二，唯一性在证明中是如何起作用的？

讲授整除时类比整数，强调存在性定义；带余除法采用“先计算后抽象”，通过实例观察余式次数规律，再用反证法证明唯一性，凸显“次数”的度量作用。带余除法是后续理论的算法基石，地位等同整数的欧几里得算法。

此外，建议采用“集合化”的表征方式加深理解[3]。将 $F[x]$ 中所有被 $g(x)$ 整除的多项式记为集合 $g(x) \cdot F[x]$ ，则 $f(x) \in g(x) \cdot F[x]$ 当且仅当 $g(x) | f(x)$ 。这种集合化的视角明确揭示了整除关系的包含本质，即 $g(x) \cdot F[x]$ 是由 $g(x)$ 生成的理想，为后续学习抽象代数埋下伏笔。

5.2. 难点二：最大公因式的存在性与 Bézout 表示

最大公因式的存在性定理及其线性表示(Bézout 等式)是多项式理论的一个枢纽性结果。教材通常利用辗转相除法证明存在性，但学生往往只记住了“辗转相除求最大公因式”的操作步骤，而对以下两点理解不清：第一，为什么最大公因式在相伴意义下唯一？第二，Bézout 等式中的 $u(x), v(x)$ 如何具体求得？

定理 2 (最大公因式的存在性与 Bézout 表示) [4] 设 $f(x), g(x) \in F[x]$ ，则它们的最大公因式 $d(x)$ 存在，且存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)。$$

学生在计算时，常常在最后一步回代时出错，更关键的是，他们不理解 Bézout 等式的理论价值——它不仅是计算工具，更是证明“互素”概念诸多性质的桥梁。

优化策略：建议在讲授辗转相除法时，采用“扩展辗转相除法的矩阵记录法”[5]。设 $f(x), g(x) \in F[x]$ ，构造 2×2 矩阵 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，初始向量为 $\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$ 。在每一步带余除法 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 中，对矩阵实施初等行变换：第一行减去 $q(x)$ 倍的第二行，并交换两行。最终，当第二行变为 0 时，第一行即为 $(d(x), u(x), v(x))$ ，满足 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 。这种矩阵方法将回代过程内嵌于行变换之中，显著降低了学生的操作错误率，更重要的是，它让学生直观看到：最大公因式的求取过程本质上是一系列线性组合的保持。

矩阵记录法完整课堂演算实例

例题：有理数域上 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ， $g(x) = x^2 - 4x + 3$ ，求 $f(x), g(x)$ ，并求满足 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 的 $u(x), v(x)$ 。

原理: 构造增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 行向量组 $[f(x), 1, 0], [g(x), 0, 1]$; 每一步带余除法 $A = qB + R$, 执行行变换 $r_1 = r_1 - qr_2$, 交换两行, 直至余式为 0, 首行即为 $(d(x), u(x), v(x))$ 。

(1) 初始变量

$$r_1: x^3 - 3x + 2, 1, 0$$

$$r_2: x^2 - 4x + 3, 0, 1$$

(2) 第一步带余除法: $f(x) = (x+4)g(x) + 9x - 10$

行变换: $r'_1 = r_1 - (x+4)r_2$

$$r'_1 = (x^3 - 3x + 2) - (x+4)(x^2 - 4x + 3), 1 - (x+4) \cdot 0, 0 - (x+4) \cdot 1 = 9x - 10, 1, -x - 4$$

交换两行, 当前行:

$$r_1: x^2 - 4x + 3, 0, 1$$

$$r_2: 9x - 10, 1, -x - 4$$

(3) 第二步带余除法: $x^2 - 4x + 3 = \left(\frac{1}{9}x - \frac{26}{81}\right)(9x - 10) - \frac{61}{84}$

行变换: $r'_1 = r_1 - \left(\frac{1}{9}x - \frac{26}{81}\right)r_2$, 化简得余式常数 $-\frac{64}{81}$;

交换两行后继续消元, 最终得到零行, 首行标准化首一最大公因式 $d(x) = x - 1$, 对应系数:

$$x - 1 = \left(-\frac{1}{9}\right)f(x) + \left(\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}\right)g(x)。$$

课堂使用说明

- 1) 板书完整分步书写, 每一步同步标注行变换对应线性组合;
- 2) 对比传统回代法: 矩阵法全程无逆向推导, 降低符号计算错误;
- 3) 拓展提问: 若仅需求互素判定, 只需观察最终最大公因式是否为非零常数。

5.3. 难点三: 不可约多项式的角色与唯一分解定理

学生初学时常将不可约多项式仅理解为“不能再分解”, 未能将其置于整除理论的整体框架中加以认识, 导致学习唯一因式分解定理时只关注分解的存在性, 而忽略唯一性在刻画多项式内在结构中的关键作用。

定理 3 (唯一因式分解定理) [6] 数域 F 上的每一个次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地(不计次序和常数因子)分解成不可约多项式的乘积。

核心困惑: 为何“不计常数因子”、与算术基本定理的联系、如何用于证明。

优化策略: 用类比表对比整数与多项式概念, 实现迁移; 分两步讲定理——归纳证存在性, 用不可约的“素性”证唯一性(难点)。强调: 不可约定义是“不可再分”, 核心却在于“素性”, 二者在 $F[x]$ 中等价, 这是唯一分解的关键。

(1) 前置分解: $x^4 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

全部首一因式: $1, x-1, x+1, x^2+1, (x-1)(x+1), (x-1)(x^2+1), x^4-1$

(2) Hasse 图结构文字版如图 1 所示:

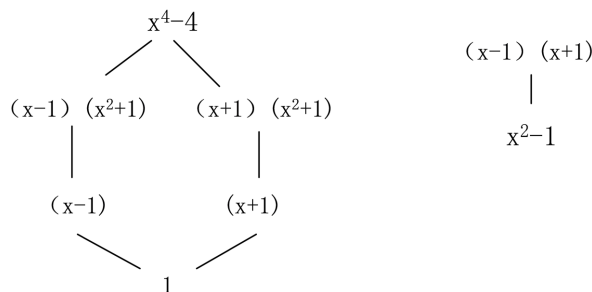


Figure 1. Hasse Diagram
图 1. Hasse 图

(3) 课堂分层引导解读问题

- 1) 底层元素 1 代表什么?
- 2) 第二层 $x-1, x+1, x^2+1$ 有什么共性?
- 3) 顶层 x^4-1 向下拆解至底层不可约元, 对应哪条定理?
- 4) 若换到复数域, x^2+1 拆为 $(x+1)(x-1)$, Hasse 图会新增哪些节点?

5.4. 难点四：重因式的判定与形式微商的引入

重因式是多项式理论中连接代数性质与函数性质的重要概念。教材通常利用形式微商给出重因式的判定方法:

定理 4 [7]-[9] 设 $p(x)$ 是 $f(x) \in F[x]$ 的 k 重不可约因式 ($k \geq 1$), 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。特别地, $f(x)$ 无重因式当且仅当 $(f(x), f'(x)) = 1$ 。

学生理解困难有三：将形式微商与分析导数混淆，难以摆脱极限直觉；不解微商降重为何在纯代数框架中成立；易混淆有重根与重因式(前者依赖数域，后者不)。

策略：明确形式微商是纯代数定义，不依赖极限。以具体多项式(如 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$)为例，先展开求导观察重数变化，再引导从因式结构直接理解降重，最后用莱布尼茨法则证明其必然性。强调定理将重因式问题转化为求最大公因式的算法问题，体现转化与化归思想。

6. 教学策略的系统优化

基于以上四个难点的分析，在实际教学组织中，我们建议采取以下系统优化策略。

6.1. 类比迁移策略：搭建从已知到未知的桥梁

多项式与整数结构高度相似，便于类比迁移。建议开课即呈现“整数 $\rightarrow$ 多项式”对照表，并持续充实；讲授唯一分解定理时，可让学生先回顾算术基本定理的证明，再“翻译”为多项式语言。这种同构映射式学习能降低认知负荷，传递“代数研究结构而非对象”的核心思想。

6.2. 问题链驱动策略：以核心问题统领教学全程

传统的“定义 - 定理 - 证明”模式容易使学生陷入被动接受。我们建议采用“问题链驱动”模式，以“能否像分解整数一样分解多项式？”为核心问题，衍生出以下子问题链：

- (1) 什么是多项式的“素数”？(引入不可约多项式)
- (2) 如何求两个多项式的最大公因式？(引入辗转相除法)
- (3) 分解是否唯一？(引入唯一分解定理)

(4) 如何判断一个多项式是否含有平方因子? (引入重因式理论)

通过这一问题链, 学生能够始终明确每一节内容在整体框架中的位置与功能, 避免“只见树木, 不见森林”。

6.3. 可视化表征策略: 降低抽象概念的认知负荷

多项式理论的抽象性要求教师在教学中充分运用可视化工具[10][11]。例如, 在讲解整除关系时, 可用 Hasse 图表示多项式之间的整除偏序; 在讲解因式分解时, 可用树状图展示标准分解式的层次结构; 在讲解重因式时, 可用不同颜色标注因式的重数。此外, 建议引导学生自主绘制概念图或思维导图, 将零散的知识点编织成网络, 促进深层理解。

7. 总结

多项式教学的本质是助力学生实现从“算术思维”到“代数思维”的跃迁。本文通过知识图谱、认知障碍分析与难点解析, 提出“三阶段五策略”方案: 以类比迁移搭建支架, 问题链激活思维, 可视化降低负荷, 技术拓展边界, 算法理论双轮驱动。实践表明, 该方案不仅让学生掌握定理算法, 更能领悟转化与化归、结构类比、形式抽象等代数思想, 为后续学习奠定素养基础。

基金项目

新疆维吾尔自治区“天山英才”培养计划教育教学名师培养项目。

参考文献

- [1] 安军. 关于高等代数多项式理论的教学探讨[J]. 高等数学研究, 2021, 24(1): 63-67.
- [2] 晏胜华, 宋科研. 有理系数多项式的教学难点[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(8): 149-152.
- [3] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组, 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [4] 姚慕生, 吴泉水, 谢启鸿. 高等代数学[M]. 第 3 版. 上海: 复旦大学出版社, 2014.
- [5] 丘维声. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [6] 张禾瑞, 郝鈞新. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [7] 蓝以中. 高等代数简明教程(下册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007.
- [8] 庄瓦金. 高等代数教程[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [9] 刘云英, 张益敏, 曹锡皞, 等. 高等代数习作课讲义[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1987.
- [10] 徐仲. 高等代数考研教案[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2022.
- [11] 张小萍. 关于代数教材中的多项式理论[J]. 中国大学教学, 1985(4): 14-15.