

AI错例辨析驱动的数学分析证明思维培养

赵佳*, 陈晓荟

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年8月4日; 录用日期: 2026年9月3日; 发布日期: 2026年9月10日

摘要

生成式人工智能给出的数学证明往往语言顺畅、形式完整,但其中可能存在量词错误、定理条件缺失或推理依据不足等问题。本科生在数学分析学习中也容易重视结论和模仿,忽视检查证明条件。针对这两个课堂难点,本文将经过教师审定的AI错误证明用作证明评估材料。教学设计以数学证明理论和支架理论为依据,从定义与条件、逻辑审查、反例证伪和证明重构四个方面提出学习要求。课堂活动分为六个连续步骤,分别是呈现错误证明、独立辨识、说明依据、修正证明、迁移练习和反思总结。相关活动安排在极限、连续性、中值定理、级数与积分等八个教学单元中。本文以一致连续性和Rolle定理为例,说明教师如何运用追问、反例和逐步减少提示,引导学生从判断答案对错转向检查定义、条件与推理依据。在这一过程中,AI只提供可供检验的材料。教师仍负责筛选错例、组织课堂和把握数学标准。该教学方案可以直接用于数学分析常规课堂。

关键词

生成式人工智能, 数学分析, 证明思维, 错例辨析, 教学改革

Cultivating Undergraduates' Mathematical Proof Reasoning through AI-Generated Error Analysis

Jia Zhao*, Xiaohui Chen

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: August 4, 2026; accepted: September 3, 2026; published: September 10, 2026

Abstract

Generative artificial intelligence can produce proofs that read smoothly and appear complete, but

*通讯作者。

文章引用: 赵佳, 陈晓荟. AI 错例辨析驱动的数学分析证明思维培养[J]. 教育进展, 2026, 16(9): 711-720.
DOI: 10.12677/ae.2026.1691953

errors may remain in quantifiers, theorem conditions, or logical reasoning. Undergraduates in mathematical analysis courses may also focus on conclusions and imitate familiar forms without checking why each step is valid. To address these classroom difficulties, this article uses teacher-vetted erroneous AI proofs as materials for proof evaluation. The design draws on studies of mathematical proof and instructional scaffolding. It sets four learning targets concerning definitions and conditions, logical scrutiny, counterexample-based refutation, and proof reconstruction. Classroom work includes six connected tasks. Students read an erroneous proof, make an independent judgment, explain the diagnosis, repair the proof, apply the checking method to a new problem, and reflect on the process. Eight activity units cover limits, continuity, mean value theorems, series, and integration. Cases involving uniform continuity on a compact interval and Rolle's theorem show how questions, counterexamples, and gradually reduced prompts can move students from checking an answer to examining definitions, hypotheses, and reasons. AI only provides claims for examination. Teachers remain responsible for selecting examples, organizing discussion, and maintaining mathematical standards. The resulting approach can be used in regular mathematical analysis lessons. Its classroom effects remain to be examined empirically.

Keywords

Generative Artificial Intelligence, Mathematical Analysis, Proof Reasoning, Error Analysis, Teaching Reform

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

生成式人工智能进入高校课堂后, 学生可以随时获得 AI 给出的例题、讲解和证明。对大学数学教师来说, 需要教导学生怎样规范使用 AI, 以及怎样把这些现成答案转化为促进理解和推理的材料。教育部等五部门发布的《“人工智能 + 教育”行动计划》提出推动人工智能融入教育教学全要素、全过程[1]。美国数学教师协会也提醒数学教师, 应引导学生审慎对待并验证 AI 结果[2]。这说明, 课堂需要合理使用 AI 生成例题和答案, 并教会学生按照数学标准检查其论证。

现有综述表明, 生成式 AI 能够提供即时反馈、示例解答和个性化支持, 但其数学输出仍存在不稳定、事实或推理错误以及诱发过度依赖等风险[3][4]。这些风险在数学证明中更加突出。一个论证即使术语准确、格式完整, 也可能因为量词错置、定理条件缺失、循环论证或关键推理缺少依据而失效。Yoon 等发现, 本科生使用生成式 AI 参与证明时, 会受到证明观、AI 观和伦理判断的共同影响[5]。学生需要从被动接受转向批判性参与。Zhuang 在大学微积分课堂中使用理性追问框架, 引导学生从检查表层步骤转向按照定义、方法和表达标准进行验证[6]。

错例分析教学在数学教育中已有较长的研究基础。Radatz 从诊断角度指出, 学生错误能够呈现其信息处理过程, 为教师判断概念理解和规则使用提供依据[7]。Borasi 进一步把错误用于数学探究, 强调学生通过追查错误来源并检验边界情形, 再据此修正结论, 可以深化概念理解与推理活动[8]。这类研究为本文提供两点启示。错例需要指向可以解释的认知原因, 课堂任务还应从错误定位延伸至论证与重构。

从认知冲突角度看, 学生原有判断与反例或条件核验结果发生矛盾时, 原有理解会受到检验。Limón 指出, 认知冲突能否促进概念改变, 取决于冲突对学生的意义, 也取决于课堂提供的解释和重建支持[9]。因此, AI 错例的价值来自可信外观与数学漏洞之间形成的张力。学生亲自定位冲突, 并借助定义或反例解释

原因,随后完成证明修复。教师若只公布错误,冲突容易停留在惊讶层面,概念重建也会缺少学生参与。

传统错例多来自教材与学生作业,也来自教师经验,其内容较为稳定,便于控制知识范围。AI 错例可以围绕一个概念及其常见误解快速生成多个版本,还能按照课堂需要调整错误的隐蔽程度,使同一检查策略进入不同表述情境。这种生成能力也带来质量风险。模型输出存在波动,流畅文本可能遮蔽第二处漏洞,教师还需要引导学生依据数学证据判断内容。因此,本文先由教师核验数学事实,再按教学目标修订文本,将 AI 错例转化为受控的证明评估材料。

数学分析以极限定义、连续性、实数完备性、微分中值定理和级数收敛等严密论证为核心。本科生通过这门课程从以计算为主的学习转向定义驱动和演绎推理。已有数学分析教改研究从成果导向、教学内容重构、资源建设和评价方式等方面提出了多种改革路径[10][11]。但是,课堂上如何明确教授证明审查,仍常被包含在教师讲评或习题订正中。学生常常能察觉某一证明存在问题,却不能指出最早失效的步骤,也不能说明该步骤违反了什么定义或定理。他们更难通过反例或修正条件来重构证明。

本文据此选取经过教师审定的 AI 错误证明作为课堂材料,不把 AI 当作答案权威。本文先讨论数学分析课程中的证明思维如何体现,然后说明错例辨析如何进入课堂,以及教师怎样借助案例和评价工具避免活动只停留在找错。下文先介绍证明思维的四个观察维度,再说明六个课堂环节和八个活动单元,最后用两类典型案例展示具体做法。这一设计也为后续课堂应用和实证检验提供了基础。

2. 理论依据与培养目标

2.1. 从证明构造到证明评估

数学证明包含得到结论的计算过程,也包含由课堂共同体认可的陈述、符合规范的推理方式和可以被共同体理解的表达形式[12]。因此,证明学习需要同时评价最终结论、形式完整性和论证过程。具体要检查所用定义是否准确,定理条件是否已经全部核验,结论是否真正由前提推出,符号和语言是否清楚地表达了推理关系。

证明评估要求学生阅读一段论证,判断它是否成立,并说明理由。已有研究发现,本科生验证证明时容易受到熟悉符号、较长推导或教师式表述的影响。他们可能只关注局部计算,忽略整体结构[13]。如果没有明确检查隐含依据,学生还可能把感觉合理当作已经证明[14]。AI 生成的证明通常语句完整,因而更容易掩盖依据不足的问题。把这类错例带入课堂,可以促使学生说清判断标准,并用定义、定理、反例或逻辑关系支持结论。

2.2. 支架的作用与逐步撤除

支架理论强调,教师应根据学生当前能力提供支持,使其完成暂时超出独立能力的任务,并随着能力增长逐步撤除支持[15]。在技术环境中,任务单和检查清单提供预设支架,教师追问与同伴反馈则根据课堂表现形成互动支架[16]。本文据此设置判断标准和证据工具,并用交流反馈连接两者。判断标准用于确定核验对象,证据工具引导学生调用定义或反例说明理由。学生在交流反馈中比较不同方案,并据此修订证明。

六个教学环节分别承担不同的支架功能。课堂从经过审定的 AI 证明开始,教师在呈错环节交代判断目标,由任务情境唤起学生已有认识。接下来的辨错使用步骤编号表和条件清单,帮助学生定位最早失效处;进入析错后,依据追问与反例提示推动证据表达。学生在纠错环节借助证明结构框架,把局部诊断转化为完整论证。迁移任务撤去检查清单,仅保留新命题和提交要求,用于观察学生独立调用策略的表现;最后的学习记录承接反思环节,促使学生总结判断依据,并为下一次任务设定优先检查项。

支架撤除按学生表现推进。第一层使用显性提示,明确标出量词关系和定义要求,并提示核验定理

条件与推理依据；第二层改用开放问题，让学生自行选择证据并完成修复。第三层保留任务标准和反馈机会，学生独立判断并说明理由，随后完成证明重构。教师根据形成性评价结果调整层级，使提示强度与学生的实际困难相匹配。

2.3. 证明思维的四个可观察维度

课堂上能否观察到证明思维，取决于能否把它转化为具体行为。本文关注表 1 中的四类表现。第一类是准确展开定义并核验条件，第二类是找到最早失效的推理步骤，第三类是用反例或边界情形说明错误，第四类是据此写出完整证明。这四类表现相互联系，分别体现判断标准、错误定位、错误说明和证明修改。

Table 1. Four observable dimensions of proof reasoning
表 1. 数学分析证明思维的四个可观察维度

培养维度	核心问题	可观察表现	课堂证据
定义与条件意识	命题和定理究竟要求什么？	准确展开定义，识别量词依赖，逐项核验条件	条件清单、定义改写、量词标注
逻辑审查意识	结论如何由前提推出？	定位最早失效步骤，识别跳步、循环论证和结论扩大	步骤编号、推理依据、推理关系图
反例与证伪意识	怎样说明这一步不能成立？	构造边界情形或反例，区分必要条件与充分条件	反例、特殊值检验、失败原因说明
证明重构能力	怎样把无效论证改成有效证明？	补充条件，替换错误工具，组织规范、连贯的证明	修正版证明、前后版本比较、迁移任务

3. AI 错例辨析课堂模式

3.1. 设计原则

错例首先要涉及概念本质，应避免选择明显或低级的计算失误。适合课堂讨论的错误包括混淆逐点存在和统一存在、遗漏定理条件、反向使用必要条件等。学生作出判断后必须说明数学根据。他们可以引用定义、指出未满足的定理条件，也可以给出反例，仅指出某一步有错不足以完成辨析。课堂还应安排证明修改任务，学生需要补充条件、替换定理或重写关键步骤，使前提、方法和结论组成完整证明。随着活动推进，教师要逐步减少检查表和提示，最后由学生独立完成验证。教师应提前生成和核验 AI 材料，避免随机输出影响教学目标。

3.2. 六环节教学流程

图 1 给出了六个课堂环节。学生先阅读一份尚未判定的证明，随后找出最早出错的步骤，说明理由并修正证明。然后，学生把形成的检查方法用于新题，最后记录反思。每一步都会留下可以查看的学习材料。教师可以据此判断困难来自定义理解、逻辑关系还是证明表达。

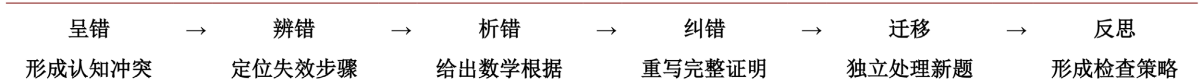


Figure 1. Six-stage classroom model for AI-generated error analysis
图 1. AI 错例辨析的六环节课堂教学模式

(1) 呈错。教师在讲授某一核心定义或定理后，呈现一份结构完整但含有关键漏洞的 AI 证明，不预

先说明错误数量和位置。学生先独立判断证明是正确、局部正确还是错误，并写出初步理由。

(2) 辨错。学生对证明逐步编号，圈出第一个不能由前文推出的步骤。教师在初期提供检查表，内容包括定义、条件、量词、推理和表达，避免讨论变成凭直觉投票。

(3) 析错。学生必须回答为什么错误。可以直接引用定义，核对定理条件，构造反例，或指出逻辑关系。小组交换结论时，以证据能否支持判断为评价重点。

(4) 纠错。学生可以补充条件、替换定理或重写关键步骤，并形成完整的修正版证明。教师比较不同的修复方法，重点讨论为什么只改一句话仍然不够，使学生看到证明的整体结构。

(5) 迁移。教师提供一个表述发生变化或条件发生变化的新命题，并撤除原有提示。学生需要独立验证新的 AI 论证，或使用前一活动中形成的检查方法完成证明。

(6) 反思。学生用简短记录写明本次最隐蔽的错误、有效的检查方法和下次应优先检查的内容。教师把反思归入错误类型档案，用于设计后续活动。

3.3. 八个递进活动单元

活动安排在常规课堂中，不另设大规模课外实验。每次活动在相关知识讲授后进行，用时 25 至 35 分钟。个人初步判断约 3 分钟，小组论证约 8 分钟，全班交流约 10 分钟，证明修复约 10 分钟，反思约 3 分钟。八个单元从提供明确提示逐步过渡到无提示验证，具体安排见表 2。

Table 2. Eight progressive activity units
表 2. AI 错例辨析的八个递进活动单元

单元	知识主题	典型错误	主要思维目标	支架水平
1	数列极限	量词次序错误，N 依赖对象错误	定义与量词意识	完整检查表
2	函数极限	δ 依赖于自变量，邻域条件遗漏	变量依赖与边界意识	定位提示
3	连续性	使用待证结论，把局部性质扩大为整体性质	循环论证审查	问题提示
4	一致连续性	由每点存在 δ_x 直接取全局最小值	量词转换与紧性思想	问题提示
5	微分中值定理	遗漏闭区间连续或开区间可导	定理条件审查	关键词提示
6	级数收敛	把通项趋零当作收敛的充分条件	必要、充分条件辨析	少量提示
7	Riemann 积分	未经条件核验交换极限与积分	工具适用范围审查	开放问题
8	综合迁移	混合型错误或局部正确证明	独立验证与证明重构	无提示

3.4. 教师、学生与 AI 的角色边界

在这套活动中，AI、教师和学生承担不同任务。AI 提供可以变化的论证文本。教师筛选错例，核对数学事实，控制难度并组织讨论。学生负责判断、举证和重写证明。与让学生直接向 AI 索取答案相比，使用经过预审的错例可以减少随机输出对课堂节奏的影响，也能让每个错误对应明确的知识点。有关 ChatGPT 辅助支架的研究表明，清楚的任务和反馈安排是技术转化为有效数学学习活动的必要条件[17]。在一个学期内连续安排这类任务，也便于教师观察学生如何从依赖答案逐步形成自己的检查方法[18]。

4. 典型课堂案例

4.1. 案例一：一致连续性证明中的全局最小值

4.1.1. 呈错：表面自然的量词偷换

教学任务如下。设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，证明 f 在 $[a,b]$ 上一致连续。教师展示如下经过预

审的 AI 生成证明。

AI 错例：“任取 $x \in [a, b]$ 。由 f 在 x 处连续，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta_x > 0$ ，使得当 $|y - x| < \delta_x$ 时，有 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ 。令 $\delta = \min \{\delta_x : x \in [a, b]\}$ ，显然 $\delta > 0$ 。于是任意 $x, y \in [a, b]$ 只要 $|x - y| < \delta$ ，就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ，因此 f 一致连续。”

该论证很容易让学生觉得每一点都有正数 δ_x ，因此可以直接取最小值。教师暂不指出紧致性，先要求学生并列写出连续和一致连续的量词结构，并特别标明 δ 是否允许依赖于 x 。学生先判断结论是否正确，再找出证明中第一个没有根据的步骤。

4.1.2. 辨错与析错：依据证据进行判断

教师依次提出三个问题。集合 $\{\delta_x : x \in [a, b]\}$ 为什么一定有最小元？即使所有 δ_x 都为正，它们的下确界为什么一定大于 0？原证明在哪一步使用了闭区间条件？学生可以用正数集合 $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ 没有正的最小下界来说明每个数都为正不能推出存在统一正下界。这样可以确认，错误来自从逐点存在到统一存在的量词偷换，单纯调整 δ 也无法解决问题。

这一环节也纠正用结论正确替代证明正确的倾向。教师说明，Heine-Cantor 定理保证原结论成立。AI 证明中的每一步仍需单独验证，验证对象是论证本身。学生必须用量词、集合性质和闭区间的作用来解释错误，把标准答案的不同写法作为理由，仍然缺少必要的数学解释。

4.1.3. 纠错：用有限覆盖重构证明

修正时，教师只问学生怎样把无穷多个局部信息变成有限多个。学生据此调用闭区间的紧致性，对给定 $\varepsilon > 0$ ，每个 $x \in [a, b]$ 存在 $r_x > 0$ ，使 $|t - x| < r_x$ 时有 $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。区间族 $\left\{ \left(x - \frac{r_x}{2}, x + \frac{r_x}{2} \right) \right\}$ 覆盖 $[a, b]$ ，由紧致性可选出有限子覆盖，对应点为 $x_1, \dots, x_m$ 。令

$$\delta = \frac{1}{2} \min \{r_{x_1}, \dots, r_{x_m}\} > 0。$$

当 $u, v \in [a, b]$ 且 $|u - v| < \delta$ 时，选取使 u 落在其半径为 $\frac{r_{x_i}}{2}$ 邻域内的 x_i ，则 u 和 v 都落在 x_i 的 r_{x_i} 邻域内，由三角不等式得到 $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ 。学生在重构中需要说明，原证明缺少利用紧致性把无限选择转化为有限选择的步骤，完成这一步后，才能取正的最小值。

4.1.4. 迁移与反思：检验闭区间条件

迁移任务把定义域改为 $(0, 1)$ ，考察 $f(x) = \frac{1}{x}$ 。取 $x_n = \frac{1}{n}$ 、 $y_n = \frac{1}{n+1}$ ，则 $|x_n - y_n|$ 趋于 0，而 $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ ，因此函数并非一致连续。学生据此说明闭区间紧致性在证明中的作用，并在反思表中写下这条检查方法。从每点存在某个量转向存在统一量时，应先检查量词依赖和紧致性依据。这样，一个具体错例就转化为可以用于其他问题的证明审查规则。

4.2. 案例二：Rolle 定理中的条件缺失

4.2.1. 呈错与条件核验

教学任务是判断下面的命题。“若 f 在 (a, b) 上可导，且 $f(a) = f(b)$ ，则存在 $c \in (a, b)$ 使 $f'(c) = 0$ 。”

AI 给出的论证通常很短。“因为端点函数值相等，根据 Rolle 定理，存在 c 使 $f'(c)=0$ 。”论证语言简洁，定理名称也正确。这很容易使学生认为引用了熟悉定理就等于已经完成证明。

AI 错例：“由 $f(a)=f(b)$ ，直接应用 Rolle 定理可知，存在 $c \in (a,b)$ ，使得 $f'(c)=0$ 。”

教师要求学生建立双栏表，分别列出定理条件和题目条件。Rolle 定理需要 f 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可导并满足 $f(a)=f(b)$ ，题目只给出后两项。学生需要明确指出缺少闭区间连续性。笼统写成条件不充分，无法完成条件核验。

4.2.2. 反例证伪与命题修复

学生构造如下反例，以说明缺失条件确实不能省略，也说明这一条件具有实质作用。在 $[0,1]$ 上定义 $f(0)=f(1)=0$ ，而当 $0 < x < 1$ 时令 $f(x)=x$ 。该函数在 $(0,1)$ 上可导，端点函数值相等，但 $f'(x)=1$ ，不存在导数为 0 的点。这个反例说明，缺少该条件时原命题确实为假。

纠错阶段，学生把命题修复为标准的 Rolle 定理，并说明连续性的作用。它保证函数在闭区间上取得最大值和最小值。如果函数不是常值，至少有一个内部极值点，再结合 Fermat 引理可得该点的导数为 0。如果函数是常值，结论显然成立。这样，学生补上连续这一条件，并理解它在证明中的作用。迁移任务还可以改变端点条件或可导区间，要求学生判断能否使用 Lagrange 中值定理。学生由此形成一个稳定习惯，看到定理名称后先核验全部条件。

5. 教学实施与评价保障

5.1. 错例生成与质量控制

教师筛选 AI 错例时，依据本次教学目标确定一个核心错误，编写标准证明和核验清单，最后生成文本。初审关注结论真值与定理条件，复审沿步骤检查每个推理依据，确认核心漏洞能够借助定义核验得到解释，可由反例和条件充分补充。完成审查后，教师可通过少量学生试做或同事复核估计难度，再固定课堂版本。模型与生成日期应随材料归档，人工调整内容另行记录，方便后续追踪。已有研究表明，LLM 的数学推理完整性与正确性存在波动[19]，因此课堂材料需要经过上述审查流程。

判断一份材料是否属于“好错例”，首先看核心漏洞能否直接指向本节概念，并确保主要判断聚焦于一个错误。错误位置需要具有适度隐蔽性，学生经过条件核验或反例检验能够发现，同时保留充分证据支持课堂讨论。文本还应具备可修改空间，学生能够通过补充条件或重写关键步骤形成完整证明。若材料包含多处相互牵连的漏洞，教师可拆分任务，保持诊断目标集中。

为提高筛选效率，教师可以建立错例卡片。每张卡片先记录教学目标和核心漏洞，再附上标准证明；诊断要求与预计用时放在教师备注中。每次使用后，教师根据学生回答更新难度标记和追问方式。经过积累，同一章节可逐步形成可复用的材料组，后续备课以抽取和微调为主。

5.2. 先人后机的课堂规则

为避免学生再次把判断交给 AI，活动先由学生判断，再使用 AI。学生必须先独立完成初步判断并说明理由，然后参加小组讨论。只有形成初步判断后，才可以向 AI 提出与定义、定理或反例有关的问题。AI 回答仍需按照同一套标准接受检验。教师在讨论中先询问学生判断的根据、条件在哪一步使用，以及能否给出使该步骤失败的例子，暂不直接公布答案。学生提交的最终作品保留初步判断、修改痕迹和反思。评价以思考过程为重点，同时记录最后的答案。

5.3. 形成性评价量规

量规采用 0 至 3 分记录四类表现, 单次活动满分为 12 分。量规的目标是形成性诊断, 用于判断学生还需要哪一种提示, 并避免对学生进行精细排名。教师可以连续比较同一学生的错误定位、理由说明和修正版证明, 观察其是否逐渐减少对提示的依赖。表 3 列出了具体标准。

Table 3. Formative rubric for proof reasoning
表 3. AI 错例辨析活动的证明思维评价量规

维度	3 分	2 分	1 分	0 分
定义与条件	准确展开定义并核验全部条件或量词依赖	识别主要条件, 但说明不完整	仅笼统提到条件或定义	未使用相关定义与条件
逻辑审查	定位最早失效步骤并说明前后逻辑关系	定位正确但依据部分缺失	只指出结论或后续步骤错误	无法定位或判断错误
反例与证伪	给出有效反例或充分证伪理由	思路正确但反例或论证不完整	仅声称“可能不成立”	无证伪证据
证明重构	修正版完整、严密且表达规范	主要思路正确, 存在少量跳步	只能局部修改, 未形成完整证明	未能修正或修正后仍错误

5.4. 伦理与学术规范

课堂需要明确 AI 的使用范围。AI 可以用于生成、比较和追问。学生必须对最终证明负责, 记录对话时, 应去除姓名、账号和其他可以识别身份的信息。教师不应强迫学生使用个人付费账户。未经授权的 AI 生成内容不能作为课程作业直接提交。教师应让学生用相同标准验证正确、部分正确和错误的输出, 避免形成 AI 总是出错的印象。生成式 AI 在教育中的机会与风险并存。教师监督、数据保护和学术诚信是技术进入课堂的基本条件[20]。

6. 讨论

6.1. 从获得答案到维护数学标准

这种课堂安排首先改变学生判断 AI 答案的依据。在通常的讲评中, 教师宣布对错, 学生按照教师意见订正。面对 AI 错例时, 学生必须回到定义、定理和逻辑关系, 说明一段看似规范的文字为什么成立或不成立。学生对 AI 答案的怀疑需要具体的数学依据, 他们需要指出某一步缺少的数学依据。与笼统地提醒学生不要相信 AI 相比, 这种做法更贴近证明活动本身, 也符合学生应批判性参与 AI 证明活动的研究观点[5] [6]。

6.2. 从发现错误到形成可迁移策略

仅要求找出错误, 会使错例活动变成简单的找错活动。因此, 学生在定位和解释错误后, 还要重写证明, 并把检查方法用于新题, 反思环节把一次经验整理成以后可以使用的规则。在一致连续性案例中, 关于 δ_x 最小值的判断应建立在量词依赖和紧致性依据的检查上。遇到从逐点存在转向统一存在的情况时, 学生应先完成这两项检查。在 Rolle 定理案例中, 对应的规则是引用定理前逐项核验条件, 并说明每个条件在证明中的作用。

6.3. 实施挑战与应对策略

课堂时间是首要约束。六个环节若全部铺开, 知识讲授时间会被压缩。教师可把完整流程安排在关

键概念课, 在其余课次选用辨错与析错两个环节; 迁移和反思可通过课前学习或课后短任务完成。活动前固定证明文本与讨论问题, 能减少现场等待。

学生在定义掌握和证明经验方面存在差异。分组时可依据前次量规结果安排异质小组, 并为需要支持的学生提供条件清单。进展较快的学生可承担反例优化或多种修复方案的比较。教师依据学生的证据表达调整提示层级, 使同一错例形成不同深度的任务。

教师负担主要集中在材料生成与数学审查。课程组可以共建错例库, 以章节和核心漏洞为索引保存课堂版本, 同时保留标准证明与使用记录。新材料先由一名教师初审, 再由同事复核关键推理; 经过课堂使用的材料进入复用库。这样的分工把重复生成转化为持续维护, 也能应对模型更新带来的输出波动。

本文目前提供教学模式与案例设计, 课堂成效仍需实证检验。后续研究可收集结构相近的前后测证明题, 并结合连续活动作品与访谈资料, 分析四个观察维度随支架撤除发生的变化, 重点考察学生在新命题中的迁移表现。研究记录还应分别标明教师提示和同伴互动, 同时保存 AI 材料版本, 以提高结果解释的准确性。

7. 结论

在数学分析课堂中, AI 生成证明的主要风险来自文本看起来可信, 却未必在数学上成立。本文从这一问题出发, 把错误证明作为训练学生检查定义、条件和推理依据的材料。课堂活动包括呈错、辨错、析错、纠错、迁移和反思。本文通过一致连续性和 Rolle 定理两个案例说明具体做法。案例表明, 错例需要经过教师预审, 还要配合追问、证据要求和逐步减少的提示, 才能用于证明评估训练。本文把 AI 定位为学生练习判断和论证的对象, 最终答案仍由学生依据数学标准形成。本文提出的是一套教学设计, 它的实际成效还需要在后续课堂实践中结合学生作品和访谈资料进行检验。

基金项目

河北工业大学本科教育教学改革研究与实践项目(项目编号: 202301002)。

参考文献

- [1] 教育部等五部门关于印发《“人工智能 + 教育”行动计划》的通知[EB/OL]. https://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s3342/202604/t20260410_1433240.html, 2026-04-10.
- [2] National Council of Teachers of Mathematics (2024) Artificial Intelligence and Mathematics Teaching: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Artificial-Intelligence-and-Mathematics-Teaching>
- [3] Pepin, B., Buchholtz, N. and Salinas-Hernández, U. (2025) A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education. *Digital Experiences in Mathematics Education*, **11**, 9-41. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1>
- [4] Almarashdi, H.S., Jarrah, A.M., Abu Khurma, O. and Gningue, S.M. (2024) Unveiling the Potential: A Systematic Review of ChatGPT in Transforming Mathematics Teaching and Learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **20**, em2555. <https://doi.org/10.29333/ejmste/15739>
- [5] Yoon, H., Hwang, J., Lee, K., Roh, K.H. and Kwon, O.N. (2024) Students' Use of Generative Artificial Intelligence for Proving Mathematical Statements. *ZDM—Mathematics Education*, **56**, 1531-1551. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01629-0>
- [6] Zhuang, Y. (2026) Empowering Students to Critically Validate AI-Generated Mathematical Solutions through the Rational Questioning Approach. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-026-10528-y>
- [7] Radatz, H. (1979) Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, **10**, 163-172. <https://doi.org/10.2307/748804>
- [8] Borasi, R. (1994) Capitalizing on Errors as “Springboards for Inquiry”: A Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 166-208. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.25.2.0166>
- [9] Limón, M. (2001) On the Cognitive Conflict as an Instructional Strategy for Conceptual Change: A Critical Appraisal.

- Learning and Instruction*, **11**, 357-380. [https://doi.org/10.1016/s0959-4752\(00\)00037-2](https://doi.org/10.1016/s0959-4752(00)00037-2)
- [10] 王华军. 基于 OBE 理念的数学分析课程教学改革[J]. 教育进展, 2024, 14(3): 329-334.
- [11] 孙菊贺, 王莉. “四位一体, 逐层培养”的《数学分析》课程教学改革与实践[J]. 教育进展, 2023, 13(1): 197-202.
- [12] Stylianides, A.J. (2007) Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **38**, 289-321.
- [13] Selden, A. and Selden, J. (2003) Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem. *Journal for Research in Mathematics Education*, **34**, 4-36. <https://doi.org/10.2307/30034698>
- [14] Alcock, L. and Weber, K. (2005) Proof Validation in Real Analysis: Inferring and Checking Warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, **24**, 125-134. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003>
- [15] Wood, D., Bruner, J.S. and Ross, G. (1976) The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, **17**, 89-100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>
- [16] Puntambekar, S. and Hubscher, R. (2005) Tools for Scaffolding Students in a Complex Learning Environment: What Have We Gained and What Have We Missed? *Educational Psychologist*, **40**, 1-12. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_1
- [17] Zhou, R., He, X., Fan, Q., Li, Y., Li, Y., Xiao, X. and Fang, J. (2025) Exploring ChatGPT-Facilitated Scaffolding in Undergraduates' Mathematical Problem Solving. *Journal of Computer Assisted Learning*, **41**, e70077. <https://doi.org/10.1111/jcal.70077>
- [18] Zhuang, Y. (2025) Lessons from Using ChatGPT in Calculus: Insights from Two Contrasting Cases. *Journal of Formative Design in Learning*, **9**, 25-35. <https://doi.org/10.1007/s41686-025-00098-2>
- [19] Frieder, S., Pinchetti, L., Chevalier, C., Griffiths, R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., *et al.* (2023) Mathematical Capabilities of ChatGPT. *Advances in Neural Information Processing Systems* 36, New Orleans, 10-16 December 2023, 27699-27744. <https://doi.org/10.52202/075280-1205>
- [20] Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., *et al.* (2023) ChatGPT for Good? On Opportunities and Challenges of Large Language Models for Education. *Learning and Individual Differences*, **103**, Article 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>