

# 高温防护服优化设计和教学实践

刘立华

盐城师范学院数学与统计学院, 江苏 盐城

收稿日期: 2026年9月10日; 录用日期: 2026年10月12日; 发布日期: 2026年10月19日

## 摘 要

本文深入解析2018年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛A题。首先利用微元法建立了高温多层防护服的偏微分方程数学模型, 然后对其进行数值差分, 然后根据附件数据对外层和内层数据进行拟合, 得到防护服内侧和外侧的热交换系数。通过有效地教学案例实践, 能够更加有效激发学生的好奇心和学习数学的原动力。在此基础上, 本文从教学设计、课堂实施与考核评价等方面给出了该案例的完整教学过程, 并基于教学实践进行了教学反思, 以期为高校数学建模课程的教学改革提供参考。

## 关键词

数学建模, 微元法, 高温防护服, 数值计算, 案例教学, 教学反思

# Optimal Design and Teaching Practice of High-Temperature Protective Clothing

Lihua Liu

School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng Jiangsu

Received: September 10, 2026; accepted: October 12, 2026; published: October 19, 2026

## Abstract

This article provides an in-depth analysis of Problem A from the 2018 “Higher Education Press Cup” National College Student Mathematical Modeling Competition. Initially, a partial differential equation mathematical model for high-temperature multi-layer protective clothing was established using the method of infinitesimals. Subsequently, numerical differentiation was performed on the model. Based on the accompanying data, the outer and inner layers were fitted to obtain the heat exchange coefficients on the inside and outside of the protective clothing. Through effective teaching case practice, we can more effectively stimulate students’ curiosity and drive to learn mathematics in the future. On this basis, this paper presents the complete teaching process of this case

from the aspects of teaching design, classroom implementation and assessment evaluation, and carries out teaching reflection based on the teaching practice, in order to provide reference for the teaching reform of mathematical modeling courses in colleges and universities.

## Keywords

**Mathematical Modeling, Infinitesimal Method, High-Temperature Protective Clothing, Numerical Computation, Case Teaching, Teaching Reflection**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在反映现实世界运动过程中的量与量之间的关系中, 存在大量满足微分方程关系的数学模型。这为数学建模课程和学科竞赛提供了丰富的案例[1]-[5]。在全国大学生数学建模赛题中通常有一道关于微分方程的建模问题。建立微分方程模型通常采用机理分析法, 根据自然课程相关定律和以及采用微积分的方法建立数学模型。平时的教学过程中, 我们通常用冷却模型、减肥运动模型、给药模型以及可持续发展的捕鱼模型, 这些模型通常是常微分模型, 建立模型后利用数学软件中的命令给出数值解, 但是观察近年来的微分方程类的建模问题, 有两类问题我们在课程中涉及的还不够多, 一是关于偏微分类的数学模型建模, 二是对于较复杂的微分方程模型用数学软件的命令已经不能够直接求解, 于是如何对微分方程进行差分求解也是个有意思的问题。

近年来, 将全国大学生数学建模竞赛真题转化为教学案例, 以赛促教、以赛促学, 已成为数学建模课程教学改革的重要方向。研究表明, 以问题为导向的教学模式不仅能够激发学生的学习兴趣, 而且有利于学生创新思维与创新能力的培养[6]-[8]; 数学建模教学活动在推动大学数学教育改革中也发挥着重要作用[9]。就本案例而言, 高温防护服的热传导问题在学术研究中已有多角度的成果, 例如基于分离变量法的“防护服-空气-皮肤”热传导解析模型[10], 这些成果为案例教学提供了丰富的学术素材。基于此, 本文在给出该赛题完整建模与求解过程的基础上, 进一步阐述以该题为载体的教学过程设计与教学反思, 以期对数学建模课程的教学改革提供参考。

## 2. 问题的提出

本文的原题来自 2018 年高教杯全国大学生数学建模竞赛 A 题。目的是通过数学建模和数值仿真来设计和优化在高温环境下工作时的专用服装。假设热能的传导是径向的, 就有由高温环境到防护服及皮肤, 在相同厚度下, 温度变化是一致的。该服装记为 I、II、III 层, 其中 I 层与外界环境接触, III 层与皮肤之间还存在空隙, 将此空隙记为 IV 层, 如图 1 所示。其中 I、II、III 层的一些物理参数如密度, 比热, 热传导率都已经给出, 但是 II, IV 层厚度在一定范围内变化, 本文的目的是优化 II, IV 层厚度使得该防护服满足高温下的工作时间和皮肤外侧的问题要求, 具体有以下三个问题:

1) 当在环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟下, 试根据每隔 1 秒下皮肤外侧的温度的已知数据建立数学模型, 并根据所建立的模型对其防护服的温度分布进行模拟。

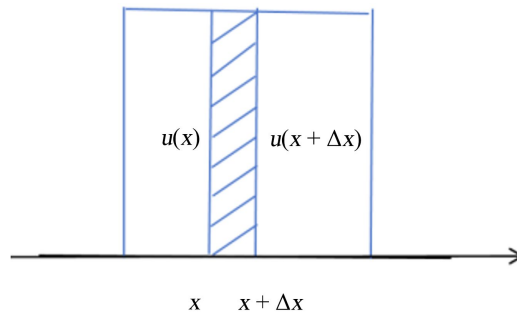


**Figure 1.** Schematic of infinitesimal method modeling  
**图 1.** 微元法建模示意图

2) 当环境温度为  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层的厚度为  $5.5\text{ mm}$  时, 确定 II 层的最优厚度, 确保工作 60 分钟时, 假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ , 且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

3) 当环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$  时, 确定 II 层和 IV 层的最优厚度, 确保工作 30 分钟时, 假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ , 且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

本文笔者主要讨论问题(1)。

从教学的角度看, 该问题取材于高温作业这一真实工程背景, 物理过程直观, 实验数据翔实, 涵盖偏微分方程建模、差分数值求解与参数拟合等数学建模课程的核心知识点, 适合作为教学案例引入课堂。笔者授课对象为数学与应用数学专业本科生, 学生已修高等数学、线性代数与常微分方程, 具备一定的数学基础, 但普遍缺乏将实际问题数学化的经验, 对偏微分方程的数值解法较为陌生。因此, 本案例的教学重点是引导学生亲历“实际问题 - 数学模型 - 数值求解 - 结果验证”的完整过程。

### 3. 模型的建立

首先根据问题 1 建立数学模型, 笔者从根据微元法重新该问题建立数学模型, 本文的总体建模过程参考了文献[1]。出于教学目的, 本文给出模型的建立和求解全过程, 另外本文试图从微元建模的角度进行建模。首先防护服的第 I 层和第 III 层的厚度是固定的。设定第  $i$  层防护服的厚度为  $d_i, i=1,2,3,4$ , 交界的位置可以表达为  $l_i = l_{i-1} + d_i, i=1,2,3,4$ 。下面利用微元法建立温度分布的数学模型, 设温度分布函数  $u = u(x, t), x \in [l_0, l_4], t \in [0, T]$ , 其中  $T$  表示工作时间。对防护服取一个微元层  $[x, x + \Delta x]$ , 在时间上取一个微元时间段  $[t, t + \Delta t]$ , 于是在微元块  $[x, x + \Delta x] \times [t, t + \Delta t]$  上有, 根据牛顿定律以及拉格朗日中值定理有

$$\Delta Q = \left( k_i \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - k_i \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) \Delta t = k_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta t \quad (1.1)$$

上式中第二个等号右边的式子中我们忽略了关于  $\Delta x \Delta t$  的高阶无穷小项,  $k_i, i=1,2,3,4$  表示第  $i$  层的材料热传导率。

另外, 如图 1 所示, 在微元块  $[x, x + \Delta x] \times [t, t + \Delta t]$  上, 有式(1.1)的热量差  $\Delta Q$  全部用于材料的温度的变化, 在微元层上由于温度变化关于  $x$  是连续的, 当微元层的厚度增量  $\Delta x$  充分小时, 温度变化时间增量同阶, 即  $\Delta u = u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$ , 进一步有

$$\Delta Q = c_i \rho_i \Delta u \Delta x = c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta t \quad (1.2)$$

其中  $c_i \rho_i, i=1,2,3,4$  分别为第  $i$  层的材料的比热容和密度。由(1.1)和(1.2)得到

$$c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

其中,  $x \in (l_{i-1}, l_i), t \in [0, T], i = 1, 2, 3, 4$ 。接下来考虑边界处的边值条件,

$$\text{在 } x = l_0 \text{ 处, } k_e(u_e - u) = -k_1 \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1.4)$$

其中  $k_e, u_e$  分别表示的是最外层界面的热交换系数和环境温度。

$$\text{在 } x = l_i (i = 1, 2, 3) \text{ 处, } k_i \frac{\partial u^-}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial u^+}{\partial x}; \quad (1.5)$$

$$\text{在 } x = l_4 \text{ 处, } k_s(u - u_s) = -k_4 \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1.6)$$

其中  $k_s, u_s$  分别表示的是最里层的皮肤界面的热交换系数和皮肤外侧的温度。最后初始条件为:  
 $u(x, 0) = 37$ 。

至此, (1.3)~(1.6) 就是根据微元法建立的数学模型, 该模型属于抛物型热传导模型。目前直接用 matlab 求解也是可以的[3]。但是笔者认为差分求解可能更加符合出题者本意。接下来我们用以下两个差商对方程(1.3)进行差分求解, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + 2\Delta x, t) - 2u(x + \Delta x, t) + u(x, t)}{(\Delta x)^2} \quad (1.8)$$

#### 4. 模型的差分

根据文献[3]的差分过程, 本节我们将详细讨论模型的差分表达式, 首先将区间  $[l_0, l_4]$  分割为  $\sum_{j=1}^4 m_j$  等份, 将时间区间  $[0, T]$  以步长  $\Delta t$  分割成  $n$  等分,  $m_j, (j = 1, 2, 3, 4)$  表示将第  $j$  层防护服分割成  $m_j$  等份。

记  $x_i = x_{M_{j-1}} + i\Delta x_j$ ,  $M_j = 1 + \sum_{i=1}^j m_i$ ,  $t_n = n\Delta t$ ,  $u(x_i, t_n) = u_i^n$ , 其中  $n = 1, 2, \dots, T/\Delta t$ ,  $M_0 = 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, M_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ 。

对于每一个  $t_n$  而言,  $u_i^n$  对于  $x_i$  共有  $M_4 + 1$  个未知数, 那么应该需要  $M_4 + 1$  个差分方程。在防护服内部, 即当  $x \in (l_{j-1}, l_j) (j = 1, 2, 3, 4)$  时,

将方程(1.3)差分得到

$$\frac{k_j}{(\Delta x_j)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{c_j \rho_j}{\Delta t} (u_i^n - u_i^{n-1}) = 0, \quad (1.9)$$

其中  $i = M_{j-1} + 1, \dots, M_j - 1$ , 这里共有  $(M_4 - 4)$  个方程, 还差 9 个方程, 而边值和初始条件(1.4)~(1.6)正好可以差分得到 5 个方程。将方程(2.1)整理得到

$$-\lambda_j u_{i-1}^n + (1 + 2\lambda_j) u_i^n - \lambda_j u_{i+1}^n = u_i^{n-1} \quad (2.0)$$

其中  $\lambda_j = \frac{k_j \Delta t}{c_j \rho_j (\Delta x_j)^2}$ 。

接着考虑边界处, 首先在  $x = l_0$  处, 将方程(1.4)差分得到

$$(1 + \mu_e) u_0^n - \mu_e u_1^n = u_e \quad (2.1)$$

在夹层  $x=l_j (j=1,2,3)$  处, 将方程(1.5)差分得到

$$-k_j u_{i-1}^n + (k_j + k_{j+1}) u_i^n - k_{j+1} u_{i+1}^n = 0 \quad (2.2)$$

最后在  $x=l_4$  处, 将方程(1.6)差分得到

$$\mu_s u_{M_4-1}^n + (1 - \mu_s) u_{M_4}^n = u_s; \quad (2.3)$$

其中  $\mu_e = \frac{k_1}{k_e \Delta x_1}$ ,  $\mu_s = \frac{k_4}{k_s \Delta x_4}$ 。

## 5. 热交换系数的拟合

记列向量  $U^n = [u_0^n, u_2^n, \dots, u_{M_4}^n]^T$ , 将差分方程(2.0)~(2.3)写成矩阵式

$$U^n = AU^{n-1}, \quad n=0,1,\dots,T/\Delta t, \quad (2.4)$$

其中  $U^0 = [37, \dots, 37]^T$ 。而矩阵  $A$  是  $(M_4+1) \times (M_4+1)$  阶的占三角矩阵。

在上述的讨论中, 要完成计算出温度分布  $U^n$ , 还需要知道防护服最外层和皮肤层的两个热交换系数  $k_e$  和  $k_s$ , 根据原问题给出的防护服的皮肤层外侧的数据  $\tilde{u}_{M_4}$ , 于是可以根据最小二乘法拟合热交换系数  $k_e$  和  $k_s$ , 即考虑以下优化问题

$$\varphi(k_e, k_s) = \min \sum_{n=1}^{T/\Delta t} (u_{M_4}^n - \tilde{u}_{M_4}^n)^2 \quad (2.5)$$

根据文献[1], 直接给出热交换系数的  $k_e$  和  $k_s$  的拟合值, 但是具体的计算过程在教学中依然是令人困惑的问题, 为了充分适合教学的进行, 接下来我们进一步思考如何拟合热交换系数。这里我们将首先介绍关于占三角矩阵方程的解法, 然后基于 Matlab 探讨多参数拟合的过程, 这为对提高课堂效果和学生参加建模类比赛都是有幫助的。根据[3], 对于对角占优的三角矩阵而言, 下面的分解是可能的。设

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & \alpha_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

比较两边的计算式得到

$$\begin{cases} \beta_1 = c_1/b_1, \\ \beta_i = c_i/(b_i - a_i \beta_{i-1}), i=2,3,\dots,n-1, \\ \alpha_1 = b_1, \\ \alpha_i = b_i - a_i \beta_{i-1}, r_i = a_i, i=2,3,\dots,n. \end{cases} \quad (2.7)$$

这样我们可以实现矩阵  $A$  的  $LU$  分解。对于求解  $Ax=f$  等价于解两个三角形方程组: 1)  $Ly=f$ , 求  $y$ ; 2)  $Ux=y$ , 求  $x$ 。

对于解(1)  $Ly=f$ , 需要如下的迭代关系式

$$\begin{cases} y_1 = f_1/b_1, \\ y_i = (f_i - a_i y_{i-1})/(b_i - a_i \beta_{i-1}), i=2,3,\dots,n; \end{cases} \quad (2.8)$$

对于解(2)  $Ux=y$ , 迭代如下

$$\begin{cases} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 2, 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

通过(2.8)和(2.9)可以看出, 计算  $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow y_n$  的过程可理解为追的过程, 将计算  $x_n \rightarrow x_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_1$  的过程称之为赶的过程, 所以上述方法称为“追追赶法”。利用追赶法, 可以对(2.4)进行求解, 然而, 由于防护服外侧和内侧的热交换系数不知道, 所以需要根据已知的实验数据进行拟合。在 matlab 中, 笔者应用命令 lsqnonlin, 主体代码如下

```
clc,clear
gw=xlsread('CUMCM.xlsx','A1:B5401');
fun = @(keks) q1fun(keks,gw);
keks0=[50 23];
options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10);
[keks,resn,res,flag,out] = lsqnonlin(fun,keks0);
keks
```

首先建立需要拟合的参数的 M 函数文件, 即 q1fun(keks,gw), keks 就是需要拟合的两个参数, gw 是附件中给的实验数据, 函数 q1fun 实际上是数值计算的数据与实验数据的向量之差, 利用拟合函数 lsqnonlin 的好处在于实际应用中, 可能我们不清楚该模型的具体表达式下, 同样通过数值计算进行拟合。拟合的结果显示, 外侧的热交换系数 ke = 99.4925, 内侧的热交换系数为 ks = 8.3486。

红色的实线(为附件数据)和绿色的虚线(为仿真数据)几乎没有误差, 这种结果一方面验证该模型的正确性, 另外这也是意味着命题者事先已经对该问题做了仿真计算。

## 6. 教学过程的设计与实施

本文以数学建模课程中微分方程模型部分的教学为背景, 将上述高温防护服问题作为教学案例引入课堂。整个教学过程按照“课前预习 - 课堂实施 - 课后实践 - 考核评价”四个环节组织, 贯彻以学生为中心、成果导向的教学理念[8]。具体设计如下。

1) 课前预习环节。教师在课前将 2018 年 A 题原题及附件数据通过课程平台发布, 要求学生复习傅里叶热传导定律与牛顿冷却定律, 并思考“热量如何在多层织物中逐层传递”这一定性问题; 同时准备高温作业现场与防护服结构的图片和视频素材, 以真实情境激发学生的学习兴趣 and 探究欲望[9]。

2) 课堂实施环节。课堂教学分四步进行。第一步, 情境导入: 展示高温作业场景与防护服的分层结构, 提出问题“如何确定防护服各层的厚度”, 引导学生将工程问题转化为数学问题。第二步, 模型建立: 按照本文第 3 节的思路, 采用启发式教学, 通过“微元体吸收的热量从何而来”“边界处的热量交换遵循什么规律”等问题链, 带领学生利用微元法从能量守恒出发逐步推导热传导偏微分方程, 让学生亲历模型的形成过程而非被动接受结论。第三步, 数值求解: 讲解第 4 节与第 5 节的差分格式、追赶法与参数拟合, 现场演示 MATLAB 程序的编写、运行与调试, 引导学生观察空间与时间步长的选取对计算精度和稳定性的影响, 体会“数学模型 - 数值算法 - 程序实现”的完整链条。第四步, 结果验证与讨论: 将仿真得到的皮肤外侧温度曲线与附件实验数据进行对比(图 2), 组织学生讨论拟合误差的来源以及模型的改进方向, 并引入文献[10]基于分离变量法的解析求解作为拓展, 说明同一问题可以有数值与解析两条不同的求解路径。

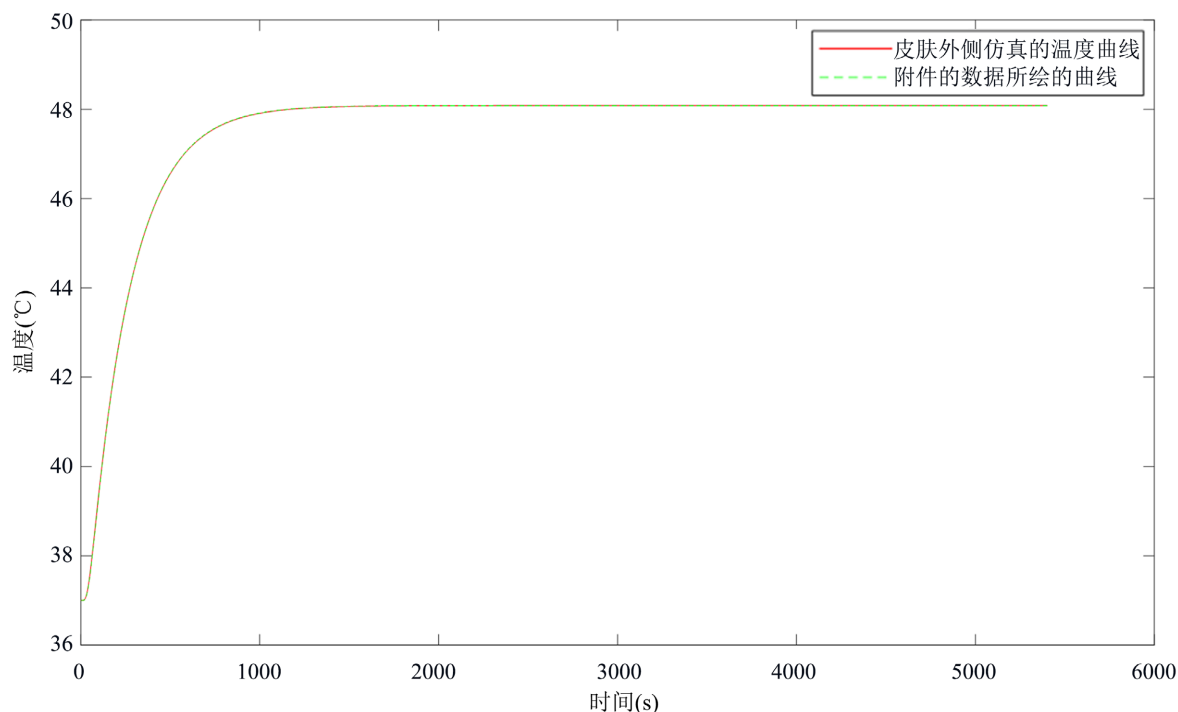


Figure 2. Temperature curves: outer skin simulation vs. appendages

图 2. 皮肤外侧仿真的温度曲线和附件的温度曲线比较

3) 课后实践环节。布置开放式作业：将环境温度改为  $65^{\circ}\text{C}$ ，要求学生重新确定 II 层的最优厚度(即原题问题 2)。学生以 3 人小组为单位，分别承担建模、编程与写作任务，完整经历“问题分析 - 模型建立 - 求解验证 - 论文撰写”的建模全过程，模拟全国大学生数学建模竞赛的协作模式[9]。

4) 考核评价环节。采用过程性评价与结果性评价相结合的方式：课前预习与课堂讨论表现占 20%，课堂展示与问题回答占 30%，课后建模小论文占 50%。评价内容不仅关注结果的正确性，更关注建模假设的合理性、求解过程的规范性，以及团队协作与书面表达能力，力求评价方式与课程培养目标相一致。

## 7. 教学反思

经过一轮教学实践，笔者对本案例的教学有如下体会与反思。

1) 真实赛题案例显著提升了学生的课堂参与度。与课程中常用的冷却模型、给药模型等常微分方程案例相比，高温防护服问题数据真实、结果可视化程度高，温度分布的三维曲面图直观生动，学生在课堂讨论与课后作业中的投入程度明显提高，部分学生还主动尝试用不同的差分格式进行对比实验。

2) 微元法推导过程的教学价值在于“授人以渔”。本案例从能量守恒出发构造偏微分方程的完整过程，使学生认识到数学模型并非凭空给出，而是可以由基本物理定律逐步推导而来，这种建模方法可以迁移到扩散、波动等其他物理问题的教学中[9]。

3) 数值求解环节暴露出学生编程能力的短板。在差分格式的程序实现中，部分学生对矩阵组装与循环结构的理解存在困难，这提示笔者在今后的教学中应加强与程序设计类课程的衔接，或引入更加直观的可视化编程工具辅助教学。

4) 参数拟合环节仍有进一步开放的空间。本案例通过最小二乘法拟合热交换系数，教学中可进一步引导学生思考“若实验数据含有噪声，拟合结果是否稳健”，从而自然引出模型检验与灵敏度分析的思想，培养学生严谨的科学态度。

5) 课程思政元素的融入润物无声。高温防护服的设计直接关系到高温作业劳动者的生命安全与职业健康, 案例教学中可以自然地开展工程伦理与社会责任的讨论, 引导学生体会数学建模服务国计民生的价值, 实现知识传授与价值引领的有机统一。

当然, 本案例的教学实践尚处于初步阶段, 样本量有限, 教学效果的量化评价还需要进一步积累数据。今后笔者将继续依托数学建模竞赛真题建设教学案例库, 持续改进教学设计, 使数学建模课程更好地服务于学生应用能力和创新能力的培养。正如文献[6]所说: 数学建模是一门艺术。每年的数学建模比赛难度笔者感觉在增大, 教科书的案例教学对于学生的数学应用能力有限, 所以笔者希望亲历真题的建模过程, 保持初心和恒心, 通过自己有效的教学案例实践, 今后能够更加有效激发学生的好奇心和学习数学的原动力[7]。

## 参考文献

- [1] 周义仓, 边馥萍, 蔡志杰, 韩中庚, 等. 全国大学生数学建模竞赛赛题精选[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [2] 蔡志杰, 姜启源, 吴孟达, 等. 数学建模案例精选 3 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [3] 蔡志杰. 高温作业专用服装设计[J]. 数学建模及其应用, 2019, 8(1): 44:52.
- [4] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2024.
- [5] 赵静, 但琦. 数学建模与数学实验[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2025.
- [6] 唐国平, 崔金超, 尹玲, 王勇. 纷纭模型凭君看, 欲把金针度与人——以案例为依托, 培养学生的数学建模能力[J]. 数学建模及其应用, 2024, 13(4): 72-79.
- [7] 孔平, 张建青, 候丽英, 等. 基于 PBL 教育理念的数学建模课程的教与学[J]. 上海理工大学学报(社会科学版), 2018, 40(3): 267-270.
- [8] 叶其孝. 数学建模教学活动与大学生教育改革[J]. 数学的实践与认识, 1997, 27(1): 92-96.
- [9] 李长玉, 方彦奎, 刘福旭, 等. 热防护服-空气-皮肤热传导模型及其解析解[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(2): 162-169.
- [10] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2016.