

基于中国传统数学思想的课堂教学探索 ——以“勾股定理”为例

周惠婷

江汉大学人工智能学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2026年9月2日; 录用日期: 2026年10月3日; 发布日期: 2026年10月9日

摘 要

为落实《义务教育数学课程标准(2022年版)》融入中华优秀传统文化的要求, 探索中国传统数学思想融入初中几何课堂的教学设计路径, 以勾股定理为载体, 构建文化溯源、数形结合、逻辑确证、意象转换、中西互鉴五阶教学流程, 将规矩文化、出入相补原理转化为可操作的图形剪拼、几何建模课堂活动, 将历史文化脉络、直观操作体验与逻辑推理论证的融合, 实现知识习得、素养培育与文化遗产的有机统一。可为初中数学融入传统数学思想、落实核心素养育人目标提供参考。

关键词

中国传统数学思想, 勾股定理, 出入相补原理, 几何直观

Exploration of Classroom Teaching Based on Traditional Chinese Mathematical Thought —A Case Study of the Gougu Theorem

Huiting Zhou

School of Artificial Intelligence, Jiangnan University, Wuhan Hubei

Received: September 2, 2026; accepted: October 3, 2026; published: October 9, 2026

Abstract

To fulfill the requirement of integrating fine traditional Chinese culture as stipulated in the *Mathematics Curriculum Standard for Compulsory Education (2022 Edition)* and explore the instructional design path for integrating traditional Chinese mathematical thought into junior high school geometry classrooms, this paper takes the Gougu Theorem (Pythagorean Theorem) as the teaching carrier.

It constructs a five-stage teaching process consisting of cultural tracing, number-shape combination, logical verification, imagery transformation and Sino-Western mutual learning, and transforms the compass-and-square culture and the out-in complementary principle into operable classroom activities including figure cutting & splicing and geometric modeling. By integrating historical and cultural context, intuitive operation experience and logical reasoning demonstration, the design realizes the organic unity of knowledge acquisition, competency cultivation and cultural inheritance. It can provide reference for integrating traditional mathematical thought into junior high school mathematics and achieving the educational goals of core mathematical competencies.

Keywords

Traditional Chinese Mathematical Thought, Gougu Theorem, Out-In Complementary Principle, Geometric Intuition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学史融入数学教学(HPM)是推进数学文化建设、深化数学概念理解的重要路径[1]。挖掘数学史中蕴含的多元教育价值,能够为学校开展数学文化实践提供有效载体,推动数学知识由学术形态向教育形态的转化[2]。围绕勾股定理这一经典几何课题,已有 HPM 视角的教学设计普遍在定理猜想、证明与应用环节融入历史素材,挖掘其数学文化内涵,为发展学生核心素养、拓展学科视野提供了丰富的实践参考[3]。

与此同时,文化回应性教学(CRT)倡导将文化作为教学的起点、资源与目的,强调将学习者的本土文化背景转化为促进认知建构的课程资源[4]。这一理念应用于数学学科时,注重在数学知识、学生经验与本土文化间建立深度联结,引导学生在文化情境中理解数学本质,感知文化价值[5],为传统数学文化的课堂转化提供了新的研究视角。

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》(以下简称“新课标”)明确指出,数学课程要注重挖掘数学学科的育人价值,有机融入中华优秀传统文化[6]。中国古代数学是中华优秀传统文化的重要组成部分,蕴含着悠久的历史与丰富的思想成就,同时具有独特的育人魅力。勾股定理作为中国古代数学的辉煌成就,集中体现了中国传统数学“以数御形、数形结合”的思想方法,刘徽的“出入相补”原理更是中国古代几何证明的核心智慧[7]。基于此,本研究以 HPM 理论为基础,借鉴 CRT 的文化回应理念,以勾股定理为教学载体,采用文化溯源、数形结合、逻辑确证、意象转换、中西互鉴的教学思路,将规矩文化与出入相补原理融入课堂实践,使学生在掌握知识技能的同时发展核心素养,实现数学知识建构与文化遗产的有机统一。

2. 教学分析

2.1. 教材与课标分析

新课标在“图形与几何”领域中明确要求:学生探索勾股定理及其逆定理,并能运用它们解决简单的实际问题,引导学生感受数学的严谨性和数学美,体会数学的文化价值[6]。本课选自 2024 年人教版初中数学八年级下册第二十章,勾股定理是“图形与几何”领域的核心内容,也是中国传统数学思想的典

型代表，刻画了直角三角形三边的数量关系，是发展学生几何直观、逻辑推理与模型观念核心素养的重要载体。本章教材修订的核心亮点是强化中华优秀传统文化数学文化的融入，章头图采用《周髀算经》相关内容，阅读材料新增“折矩－积矩”法和梅文鼎证法[3]。

2.2. 学情分析

八年级学生正处于由感性具象认知向理性抽象逻辑过渡的关键期。

认知基础：学生已经掌握正方形面积计算、整式乘法及直角三角形的基础性质，具备初步的图形拼接经验。学生对中华优秀传统文化有基础的认知与认同感，具备通过历史情境开展数学探究的情感基础，能够通过小组合作完成动手拼摆、图形裁剪等实践操作。

认知障碍：学生初次接触“勾、股、弦”等古代数学专有名词时，难以快速将其与直角三角形三边建立直观对应，易混淆概念。从特例到一般，证明是认知难点，难以将图形剪拼与代数恒等式推导联系起来。动手验证出入相补原理时，受空间想象力限制，学生无法正确操作。《九章算术》名题的文言表述，也会给学生提取信息、构建直角三角形模型带来障碍。

2.3. 教学目标分析

知识与技能：理解并掌握勾股定理的内容，能用赵爽弦图、出入相补法证明勾股定理，会用勾股定理解决简单的几何计算与实际问题；了解勾股定理的历史文化背景，知晓《周髀算经》《九章算术》等中国古代数学典籍中的相关成就。

过程与方法：经历完整的探究过程，体会从特殊到一般、数形结合数学思想；通过动手拼摆、图形割补、模型建构等活动，发展几何直观、逻辑推理与数学建模核心素养。

情感态度与价值观：感受中国古代数学家的探索精神与智慧结晶；在中西数学思想对比中，体会数学真理的普适性与文明互鉴的价值，养成严谨求实的科学态度。

2.4. 教学重难点分析

教学重点：勾股定理的探索过程与代数证明；勾股定理在实际情境中的应用。

教学难点：理解出入相补原理的核心内涵，实现几何图形剪拼与代数恒等式推导的转化；从古代数学名题的文言情境中抽象出直角三角形模型。

3. 教学设计

本教学设计遵循学生的认知进阶与思维发展规律，整体规划为两个课时：第一课时聚焦“定理探索与证明”，包含文化溯源、数形结合、逻辑确证，重点引导学生亲历特例感知、网格猜想以及赵爽弦图与“出入相补”原理的深度探究；第二课时侧重“定理应用与升华”，包含环节意象转换、中西互鉴、课堂总结与课后拓展，重点以“引葭赴岸”名题开展模型建构，并通过中西经典图式的多维对比升华文化视野。鉴于篇幅限制与教学逻辑的连贯性，以下将两个课时作为一个完整的教学设计综合呈现。

1) 文化溯源，探寻概念本源

教师展示《伏羲女娲执规矩图》(如图 1)，借“不以规矩，不成方圆”点明“矩”的古代测绘地位。图文结合科普命名：短边称勾(如曲臂)、长边称股(如直腿)、斜边称弦(如琴弦)。学生借助三角板直观认识勾、股、弦。

问题 1 《周髀算经》载有“勾三股四弦五”。这组数据存在怎样的等量关系？它是古人测量的特例，还是所有直角三角形的普遍规律？

设计意图 以《周髀算经》中的古代测绘历史作为切入点，增进对中华传统数学文化的理解。通过

“勾三股四弦五是特例还是规律”这一悬念,引导学生思考如何从古代经验数据中探寻普遍的数学规律,这种将数学知识还原到具体历史情境中的设计,为整节课的传统数学思想探究奠定了认知基础。



注: 图 1 为武氏祠左右室第四石上的“伏羲女娲执规矩图”。

Figure 1. Fuxi and Nüwa holding compass and square

图 1. 伏羲女娲执规矩图

2) 数形结合, 探寻定理本质

活动 1 教师发放网格纸, 引导学生先观察并计算网格中边长为 3、4、5 的直角三角形三边对应正方形的面积; 再独立绘制其他大小、形状各异的直角三角形, 测算其三边对应正方形的面积并记录数据。

问题 2 在网格中, 以直角三角形三边为边长的正方形面积之间存在怎样的数量关系?

问题 3 你能把这个面积关系直接转化为直角三角形三边长度的代数等式吗?

学生通过“数格子”来验证特例, 经历先感知, 再验证, 最后提炼的过程, 得出直角三角形三边满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的数学猜想。

设计意图 本环节引导学生借助网格实现数形转化, 将线段长度关系转化为面积比较, 经历从特殊到一般的探究过程。这一活动在发展学生几何直观与合情推理素养的同时, 落实“定理的探索”这一教学重点。

3) 逻辑确证, 深度领悟思想

活动 2 教师分发四张全等直角三角形纸片(设直角边为 a , b , 斜边为 c), 要求学生尝试将这四个三角形围成一个包含正方形的图案, 向学生介绍这是“赵爽弦图”, 之后引导学生观察拼成后的图形结构, 利用面积关系尝试进行公式推导。

问题 4.1 利用手中的四个全等直角三角形, 你能拼出哪些包含正方形的图案?

问题 4.2 观察斜边朝外拼成的大正方形, 它内部空出的图形是什么形状? 这个空白图形的边长怎样用直角边 a , b 来表示?

问题 4.3 基于赵爽弦图, 利用图形面积的“整体与局部”关系, 你能列出一个代数等式并化简验证猜想吗?

学生拼组出赵爽弦图, 从整体与局部两个角度分析, 完成代数推导: $c^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} ab \right) + (b-a)^2$ 。

活动 3 教师提供代表勾方(a^2)、股方(b^2)的纸片及弦方(c^2)框架(如图 2)。先鼓励学生尝试用纸片填满框架, 在学生经历初步试误后, 教师再引导学生按“叠加 - 标注 - 剪切 - 拼补”四步法重新操作。最后教师进行动态演示(如图 3)。

问题 5 如何仅通过剪拼, 将勾方与股方恰好填满弦方框架?

问题 6 经历剪拼的过程, 你认为“出入相补”的核心是什么? 什么变了, 什么没变?

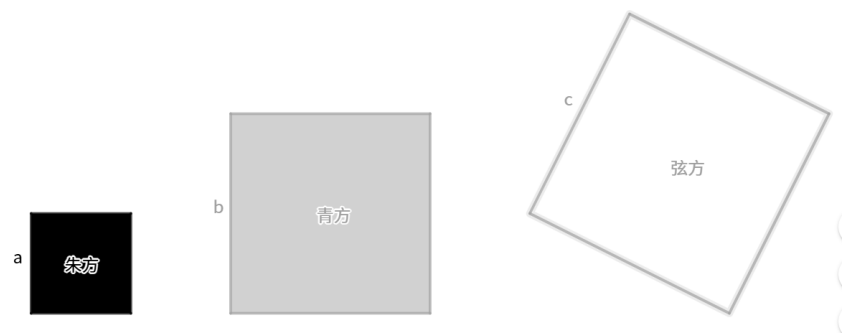


Figure 2. Hypotenuse square frame diagram
图 2. 斜边正方形框架图

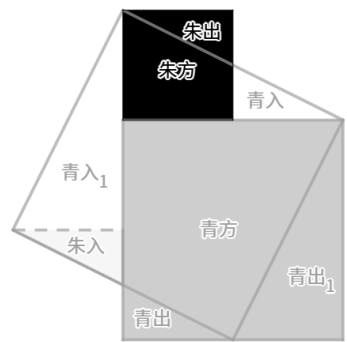


Figure 3. Qing-zhu out-in diagram
图 3. 青朱出入图

设计意图 采用两图递进的探究策略。先通过拼摆赵爽弦图进行代数推导，训练学生的逻辑推理能力与运算能力；之后引导学生动手操作刘徽的“青朱出入图”，经历完整的剪切拼补过程。这种将数学史料转化为课堂实践活动的方式，让学生在动手操作中体会“出入相补”的传统数学智慧，突破了定理证明过于抽象的教学难点。

4) 意象转换，培养模型观念

教师展示《九章算术》名题“引葭赴岸”的水墨情境图(如图 4)及原文，先引导学生翻译原文，再指导其完成建模过程：绘制池塘横截面、标绘芦苇运动轨迹、识别直角三角形模型。

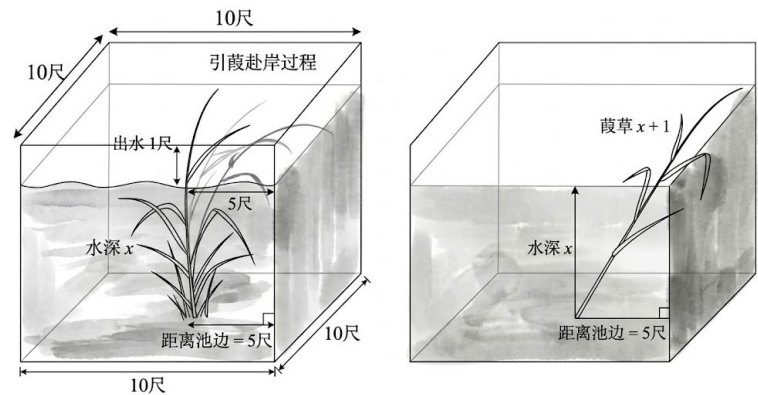


Figure 4. Ink-wash scene of pulling the reed to the bank
图 4. 引葭赴岸水墨情境图

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？

翻译：10 尺宽的正方形池塘正中央长着一株芦苇，高出水面 1 尺。把芦苇向岸边拉，顶端刚好碰到岸边水面，求水深和芦苇长度。

问题 7 在“引葭赴岸”的过程中，芦苇的长度改变了吗？请尝试找出图中的直角三角形，并标出水深和芦苇分别对应哪条线段。

问题 8 若池塘宽 8 尺，芦苇高出水面 2 尺，你能否用同样的方法建模求解？

设计意图 用《九章算术》中的经典名题，创设出实际的问题情境，将数学知识与传统文化有机结合，培养学生用数学的眼光观察世界、用数学的语言表达世界的能力。通过变式训练，进一步拓展学生的思维深度，强化数学应用意识与数学建模素养。

5) 中西互鉴，升华文化视野

教师展示中国古代“赵爽弦图”、古希腊欧几里得“风车图”以及背景导读材料，以递进式问题链为导向，组织学生开展小组合作探究。

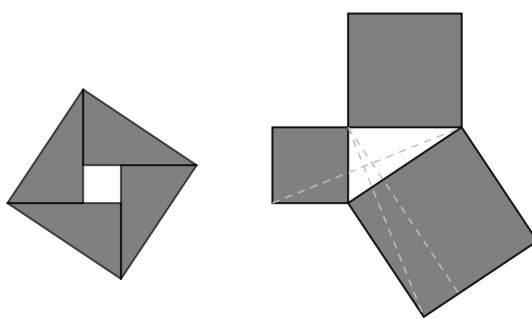


Figure 5. Classic proof diagrams of the Gougu theorem
图 5. 勾股定理经典证明图形

【背景导读材料】

材料一：赵爽(三国时期)在《周髀算经》注中强调数形相依、以形证数。赵爽通过出入相补原理将图形的切割、拼补与面积的数值运算巧妙结合，体现出寓理于算的核心特点，即借助直观图形构造与计算推演解决问题。

材料二：古希腊欧几里得《几何原本》建立在清晰定义与基本公理共同构成的演绎体系之上。证明勾股定理时，主要利用全等三角形与同底等高的面积转化，从既定前提出发一步步推导出结论，体现出注重逻辑推理与严密证明的公理演绎传统。

文化背景补充：中国传统数学多服务于天文历法、土地丈量、工程测算等实际生产生活需求，擅长通过直观的图形构造与数值运算总结实用算法；古希腊数学更侧重通过逻辑推演探寻抽象的数学规律，以公认成立、无需证明的基本公理为逻辑根基，结合明确的概念定义搭建起严谨的演绎理论体系，二者形成了风格迥异的数学发展传统。

【探究问题链】

问题 9-1：观察赵爽弦图与欧几里得风车图(如图 5)，两幅图分别由哪些基本几何图形构成？图中的直角三角形以及分别对应直角三角形三边的正方形，在数量和位置布局上有什么明显差异？

问题 9-2：两种证法的推导起点分别是什么？赵爽弦图主要依靠什么方法完成面积的等量转化？欧几里得的证明又依托哪些已有的几何结论逐步推进？

问题 9-3：两种证法最终都推导出了勾股定理的结论，它们在推导过程中依赖的核心依据有什么区别？

这种区别让二者在数学严谨性上呈现出怎样的不同？

问题 9-4：结合中西数学的文化背景思考，同样是证明勾股定理，中西方为什么会形成截然不同的论证思路？

设计意图 创设中西数学思想碰撞的思辨情境，丰富学生对几何证明的多元认知。赵爽弦图与欧几里得风车图两幅经典图式的跨文化对比，能够拓宽学生的数学文化视野，引导学生感受中国传统数学“寓理于算”的构造特质与古希腊数学“公理演绎”的逻辑特质。这种思辨探究，能够深化学生对几何证明本质的理解，培养兼容并蓄、严谨求实的科学态度。

6) 课堂总结与课后拓展

教师引导学生梳理本节课思维主线，回顾本节课核心知识、传统数学思想并布置作业。

基础层：一个直角三角形的“勾”为 6、“股”为 8，请利用勾股定理计算其“弦”长。

提高层：现有一池塘宽 6 尺，芦苇长在正中央，高出水面 2 尺。拉向岸边顶端齐平，求水深和芦苇长度。

拓展层：“引葭赴岸”这个问题在西方被称为“荷花问题”，课后对比中西方对于同一问题的表述差异，进行简要总结。

学生跟随教师梳理知识与思想脉络，根据自身情况选择完成对应层级的作业。

设计意图 帮助学生梳理知识体系，巩固本节课所学内容。通过分层作业，兼顾不同层次学生的学习需求，将课堂探究延伸至课外，进一步深化学生对传统数学思想的理解与应用能力。

4. 教学思考

4.1. 拓展文化视野，理解多元文化

在课堂中融入中国传统数学思想，并引导学生开展跨文化对比，加深其对中外数学思维异同的理解。历史进程中，中国传统数学注重直观构造与实用性，而古希腊数学则侧重公理化演绎体系。将这两种思维方式进行对比探究，能够为学生提供多元的认知视角。本课第五节“中西互鉴”基于这一理念设计，通过赵爽弦图与欧几里得风车图的并置呈现，配合背景导读材料与递进式问题链，让学生在自主对比中识别两种证法在几何构型、推导起点、推理依据上的结构性差异。这种设计不仅回应了 HPM 关于“通过历史对比促进数学理解”的主张，也体现了 CRT 以学生的文化背景为学习资源的核心诉求，使中华传统数学思想的文化价值在课堂中得到充分彰显。同时教师可将跨文化对比延伸至课外拓展环节，布置主题性探究作业，从而开拓学生的学科视野，使其深入理解数学发展的内在逻辑与多样性，最终在尊重客观规律的基础上，深化对多元数学文化的理解，培养严谨务实的科学态度。

4.2. 创设生活化情境，落实数学建模素养

经典数学思想蕴含着跨越时空的普适价值。中国古代数学所体现的应用导向与新课标倡导的数学建模素养相契合。通过挖掘传统思想与现实情境的关联，学生可以经历完整的建模过程。本课第四节以《九章算术》“引葭赴岸”名题为载体，引导学生从文言文阅读到数学模型建构，正是建模素养落地的具体体现。教学中，教师可提炼古代名题中的核心思想，并将其迁移到现实情境中。学生在应用传统数学思想构建模型、求解实际问题的实践中，能亲身体会到传统数学思想的生命力。这不仅赋予了传统知识实际价值，也进一步培养了学生解决实际问题的综合素养。

4.3. 融合数字化技术，深化数学思想理解

古代文献用文言文与静态简图表述，容易在课堂中造成认知障碍。为此，教学中可借助信息技术，

运用人工智能创设视觉情境,并结合 GeoGebra 制作交互式几何拼接图。例如本课中“引葭赴岸”的水墨情境图(见图 4)即运用人工智能生成,以古风画面呈现池塘、芦苇与岸边的空间关系,使学生在读题之初即获得直观的空间印象这种直观呈现可以降低学生的认知负荷,引导其将注意力集中于面积割补中的不变量及核心关系上,从而促使学生在动态观察与动手操作中,提升几何直观与逻辑推理素养。

4.4. 出入相补原理在几何直观与模型观念培育中的机制分析

出入相补原理由魏晋数学家刘徽系统阐述。它指图形经过切割、移位与拼合,虽然形态发生改变但其总面积保持守恒。该思想不仅是中国古代解决几何问题的核心算法,更是实现从几何直观向代数证明跨越的关键思维杠杆。本课以赵爽弦图的代数推导与青朱出入图的操作验证构成递进的探究活动,针对“几何直观”与“模型观念”两大核心素养设计分层培育路径。

从几何直观培育来看,出入相补原理为抽象的等量关系提供了可视化载体,搭建起从具象操作到抽象定理的认知桥梁。赵爽弦图的探究中,学生通过观察四个全等直角三角形与中心小正方形,直观感知大正方形与各局部的面积对应关系,再通过代数运算完成定理推导,实现“形”的直观向“数”的严谨转化。青朱出入图的操作中,学生通过动手操作,观看 GeoGebra 展示,感知面积守恒的核心逻辑。两种路径各有侧重,在视觉与动作的协同参与中深化对定理的理解,发展学生几何直观素养。

从模型观念培育来看,出入相补原理提供了可迁移的问题解决方法,其本质是“整体分割为部分、部分之和等于整体”的面积守恒模型。这一模型可迁移到几何问题与实际情境中。本课中,学生先在定理证明环节掌握出入相补的核心逻辑,之后在“引葭赴岸”的应用环节将这一方法迁移到实际问题建模,通过识别直角三角形模型,将水深、葭长与池宽的现实关系转化为三边等量关系完成求解。

整体而言,出入相补原理兼具直观建构与模型迁移的双重教学价值,这正是中国传统数学思想在核心素养培育中的独特优势。

参考文献

- [1] 岳增成,汪晓勤. 国际数学史与数学教育(HPM)发展历程及启示[J]. 上海教育科研, 2022(4): 84-92.
- [2] 余庆纯,汪晓勤. 中国 HPM 研究内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 49-55.
- [3] 李健. 探索勾股定理发展核心素养厚植文化自信——2024 年人教版《义务教育教科书·数学》第二十章“勾股定理”解读[J]. 中学数学教学参考, 2025(29): 2-4.
- [4] 靳伟,裴淼,董秋瑾. 文化回应性教学法: 内涵、价值及应用[J]. 民族教育研究, 2020, 31(3): 104-111.
- [5] 丁福军,张维忠. 民族地区数学教学中文化回应的内涵、价值及策略[J]. 当代教育与文化, 2023, 15(3): 89-95.
- [6] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [7] 丁子星,代钦. 勾股定理在中国数学课堂中的体现——对数学文化的重新认识[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2018, 31(11): 57-64.