

指向抽象能力培养的“算术平方根” 教学案例设计

付 艳

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年8月8日; 录用日期: 2026年9月9日; 发布日期: 2026年9月17日

摘 要

数学概念是数学知识体系的基石, 也是数学抽象的基础, 而数学课堂教学中, 数学概念的抽象过程并没有得到足够的重视。基于数学概念的形成过程是最典型的数学抽象过程, 概念课是培育数学抽象能力的重要途径, 设计一则可模仿、可操作、可迁移的指向抽象能力培养的“算术平方根”教学案例。

关键词

抽象能力, 数学抽象物, 数学概念, 算术平方根

Teaching Case Design of “Arithmetic Square Root” Oriented to the Cultivation of Abstract Ability

Yan Fu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: August 8, 2026; accepted: September 9, 2026; published: September 17, 2026

Abstract

Mathematical concepts are the cornerstone of the system of mathematical knowledge and the foundation of mathematical abstraction. However, in mathematics classroom teaching, insufficient attention has been paid to the abstraction process of mathematical concept. Because the formation process of mathematical concepts is the most typical process of mathematical abstraction, concept-teaching lessons serve as a vital way to cultivate mathematical abstraction ability. This paper designs an imitable, operable and transferable teaching case of “arithmetic square root” oriented to the cultivation of abstract ability.

文章引用: 付艳. 指向抽象能力培养的“算术平方根”教学案例设计[J]. 教育进展, 2026, 16(9): 1137-1145.

DOI: 10.12677/ae.2026.1692005

Keywords

Abstract Ability, Mathematical Object of Abstraction, Mathematical Concept, Arithmetic Square Root

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题的提出

抽象是数学的基本思想，也是用数学观察现实世界的基本方式[1]。初中阶段的抽象能力主要表现在数学概念、关系与方法的抽象上。2022年版《义务教育数学课程标准》把“抽象能力”排在初中各项核心能力中的第一位，其内涵与要求表述如下：“抽象能力主要是指通过对现实世界中的数量关系与空间形式的抽象，得到数学的研究对象，形成数学概念、性质、法则和方法的能力。能够从实际情境或跨学科的问题中抽象出核心变量、变量的规律及变量之间的关系，并能够用数学符号予以表达；能够从具体的问题解决中概括出一般结论，形成数学的方法与策略。感悟数学抽象对于数学生产与发展的作用，感悟用数学的眼光观察世界的意义，形成数学想象力，提高学习数学的兴趣。”[2]

数学概念是数学知识体系的基石，也是数学抽象的基础，更是学生数学知识体系建立的基础。因此，培养学生的抽象能力应从数学概念的形成过程入手，引导学生经历从具体实例到本质特征的提炼过程，逐步学会用数学语言表达现实问题中的数量关系与空间形式，在归纳、概括的思维活动中，深化对数学对象的理解与建构。即数学概念的形成过程是最典型的数学抽象过程，概念课是培育数学抽象能力的重要途径[3]。数学概念是性质抽象的基础，通过研究和抽象出各种性质能更全面、深入地认识概念所代表的数学对象。

相较于纯教学理论研究，具体课时案例更便于参考借鉴。本文选定“算术平方根”开展专项研究，原因如下：该概念是初中数系扩充的重要衔接点，上承平方运算，下启无理数、二次根式等知识；教学过程包含情境提炼、概念生成、符号建构、性质归纳、数值估算等一系列完整抽象环节，层次丰富、代表性强。同时，七年级学生在面对根号符号、无限不循环小数时会产生明显认知矛盾，适合设计阶梯式抽象探究活动。为此，本文以人教版七年级“算术平方根”为素材，设计指向抽象能力培养的教案案例。

2. 指向抽象能力培养的“算术平方根”教学思路

抽象能力的内涵表明，数学概念、性质、法则和方法等是通过抽象过程获得的不同表现形式的“数学的抽象物”。通过研读数学课程标准和教科书可以确定，“算术平方根”教学过程中蕴含的不同表现形式的“数学抽象物”依次为“数学问题”“数学概念”“数学性质”“归纳、数形结合的宏观数学思想方法”“夹逼法(或极限思想)的微观数学思想方法”。这些不同表现形式的“数学抽象物”的数学抽象过程见图1[4]。

据此，指向抽象能力培养的“算术平方根”教学思路设计如下：

(1) 通过熟悉的情境抽象出一个数学问题：已知正方形的面积为 a ，求其边长 x 。

(2) 通过分析，抽象出算术平方根的概念，并用数学语言予以表征。

(3) 通过运用算术平方根概念解决具体的问题，抽象出算术平方根的性质及估算 $\sqrt{2}$ 大小的宏观数学思想方法(数形结合思想)和微观数学思想方法(夹逼法或极限思想)，以此获得对抽象算术平方根的具象化

理解,从而达到理解与掌握“数学抽象物”之目的。

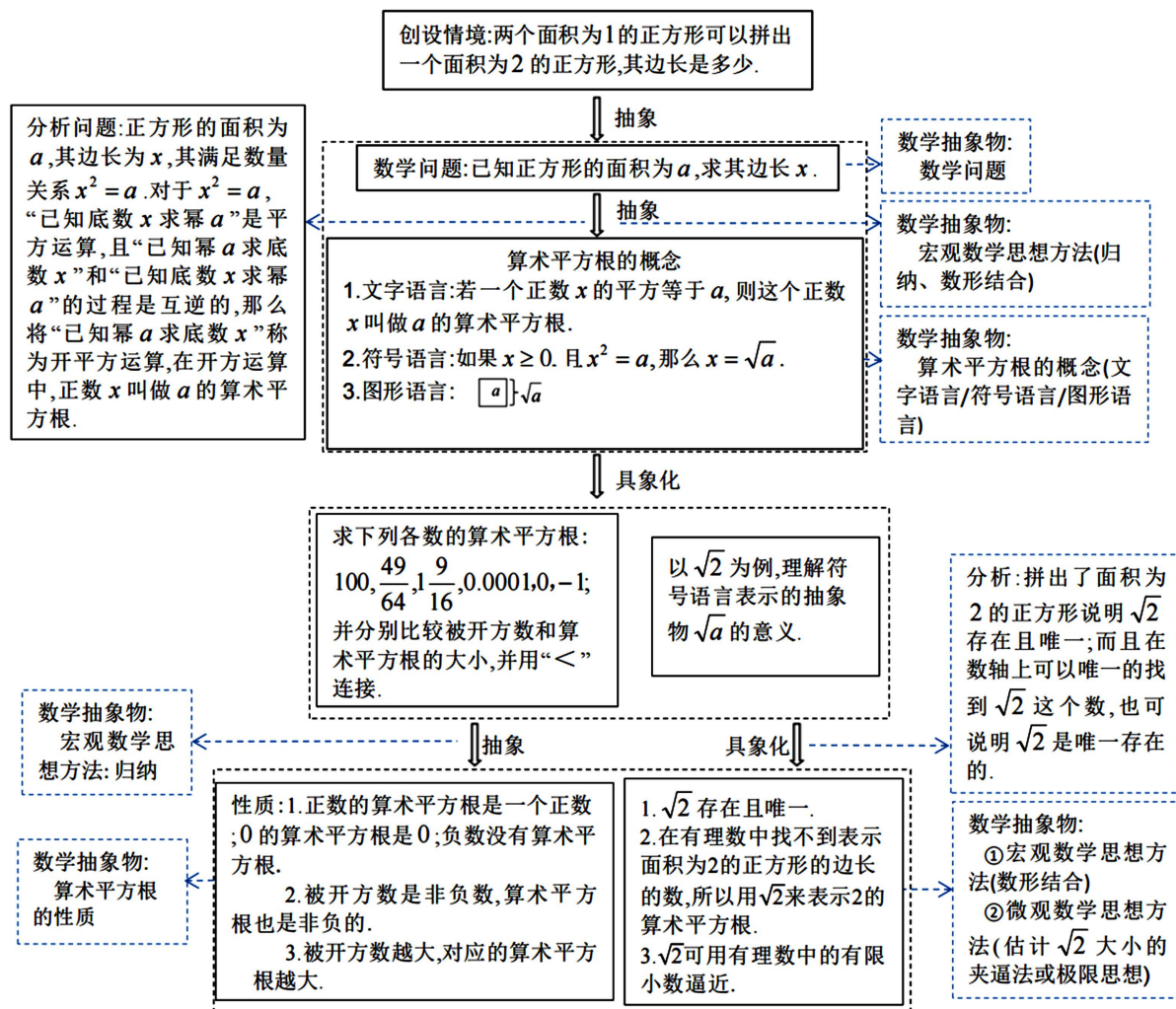


Figure 1. The mathematical abstraction process of the “mathematical object of abstraction” in arithmetic square root

图 1. 算术平方根中“数学抽象物”的数学抽象过程

3. 指向数学抽象能力培养的“算术平方根”教学实践

3.1. 创设情境, 抽象数学问题

学情预设:本环节中,学生不能用字母关系来表示正方形面积和边长的关系。所以需要教师的引导。教师应该在已知正方形面积求边长的具体实例中,自然而然地引出。

教师 同学们,回顾以往所学,我们掌握了正方形边长与面积的计算关系。如果已知一个正方形的边长,大家能否快速求出它的面积?

学生 可以,利用正方形面积公式:面积 = 边长 × 边长。

教师 非常好。那我们逆向思考:若已知正方形的面积,要求出对应的边长,又该如何解决呢?接下来请大家观察下表1,结合已学知识,尝试填写正方形的边长。

(教师出示预设表格,学生独立思考、动笔作答)

Table 1. Examples: finding the side length of a square from its area
表 1. 已知正方形面积求边长具体实例

正方形的面积	1	2	4	9	0.04
正方形的边长	1		2	3	0.2

学生 面积为 1、4、9、0.04 的正方形边长依次是 1、2、3、0.2。但是面积为 2 的正方形，学生无法用已学数字作答，产生疑惑。

教师追问 面积为 2 的正方形真的存在吗？它的边长是否客观存在？这是我们首先要探究的问题。
(请大家拿出课前准备的学具——两个面积为 1 的全等正方形进行拼接，动手操作后发现，两个面积为 1 的小正方形能够拼出一个新的大正方形，而这个正方形的面积恰好是 2，见下图 2。)

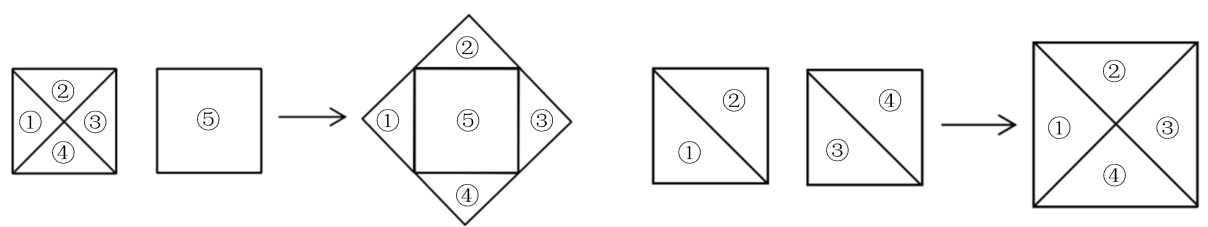


Figure 2. Two methods of using unit squares to construct a square with an area of 2
图 2. 算术利用单位正方形拼接面积为 2 的正方形的两种方案

情境 如图 2，两个面积为 1 的正方形可以拼出一个面积为 2 的正方形，请问：面积为 2 的正方形的边长是多少？

上述情境抽象出一个数学问题：已知正方形的面积为 2，求其边长。把问题一般化，即
问题 已知正方形的面积为 a 求其边长 x 。

【设计意图】依托学生熟悉的正方形面积计算这一现实问题，通过“正向运算→逆向提问”的问题设计，结合表格具象化任务，引导学生从生活几何情境中剥离出纯数学研究对象，完成现实情境向数学问题的抽象，本阶段生成的数学抽象物为数学问题。针对“面积为 2 的正方形是否存在”这一疑问，设计动手拼图活动，以直观的几何操作验证图形与边长的存在性，将几何图形、数量关系相结合，渗透数形结合这一宏观数学思想方法。

3.2. 引发冲突，迈入本节学习

教师 面积为 1 的正方形边长为 1，面积为 2 的正方形边长呢？(提示：要解决这个问题需要找到一个数的平方等于 2。)

学生 1 设正方形的边长为 x ，得到 $x^2 = 2$ 。进而可以去估算 x 的值。因为 $1^2 = 1$ ， $2^2 = 4$ ，所以 $1 < x < 2$ 。(教师要对学生的回答做出表扬)

学生 2 只能估算，就说明就目前学习的内容不足以解决此问题，我们需要学习新的数学知识来解决这个问题。(教师要对学生的回答给予肯定)

教师小结 明明是同样的问题，面积为 1 的正方形其边长是 1，但面积为 2 时其边长就回答不出来呢？即找不到用已学过的一个数来表示“面积为 2 的正方形的边长”，那是不是数不够用了？这节课我们就来解决这个问题，学了今天的“算术平方根”之后，我们就可以回答“面积为 2 的正方形的边长是多少”这个问题。

【设计意图】通过引导学生探究“面积为 2 的正方形的边长是多少”，引发认知冲突：明明是一样

的问题，为什么面积为 2 时其边长就回答不出来呢？是数不够用了吗？从而激发学生探究算术平方根概念的求知欲。

3.3. 分析问题，生成数学概念

启发 刚才提到了我们要学习新的知识——算术平方根，那算术平方根是什么？它与我们已学过的知识有什么联系？我们能否从已有的知识经验中来建构算术平方根的概念？你们想从哪些已知知识入手去研究？

师生 教师引导学生分析问题，假设正方形的面积为 a ，其边长为 x ，其满足数量关系 $x^2 = a$ 。对于 $x^2 = a$ ，“已知底数 x 求幂 a ”是平方运算，且“已知幂 a 求底数 x ”和“已知底数 x 求幂 a ”的过程是互逆的，那么将“已知幂 a 求底数 x ”称为开平方运算(图 3)。在开平方运算中，我们把 a 叫被开方数，正数 x 叫 a 的算术平方根(图 3)。

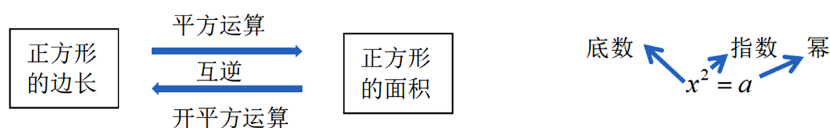


Figure 3. Schematic diagram of the inverse-relationship between squaring and square-root operations

图 3. 平方运算与开平方运算的互逆关系示意图

教师 结合刚才的问题，我们知道：因为 $1^2 = 1$ ，所以正数 1 是 1 的算术平方根； $2^2 = 4$ ，所以正数 2 是 4 的算术平方根。那面积为 2 的正方形，我们设它的边长为 x ，就有 $x^2 = 2$ ，这个正数 x 就是 2 的算术平方根，大家能不能写出这个数 x ？

学生 不能直接写出这个数 x 。

教师 既然不能直接写出这个数 x ，用数学的思维去思考，有没有其他的方法？

学生 可以引入一种新的符号来表示。(教师要给予肯定)

教师 用数学的思维去思考，我们可以引入一种新的符号来表示 2 的算术平方根，那我们该用这样的数学符号来表示这个特殊的 x 呢？

学生 学生 1：既然是平方反过来的运算，在平方符号上做改动。用 2_2 表示 2 的算术平方根；学生 2：用一个简单图形 $\square 2$ 表示的算术平方根；学生 3：直接用字母 x 、 y 表示 2 的算术平方根。

教师小结 大家都大开脑洞提出了不同的想法，我们一起来逐一分析。首先只用字母来表示，只能代表这个数本身，无法体现“2 的算术平方根”这一运算含义，也无法区分是哪个数的算术平方根，通用性太差；尝试修改平方下标，也都不符合运算逻辑，无法准确表达“寻找一个数，使其平方等于已知数”的内涵。数学符号要求简洁、通用、表意明确，这些方式都存在明显缺陷。在数学发展过程中，数学家们也经历了长期探索，最终大数学家笛卡尔的表示方法一直沿用至今。符号写作“ $\sqrt{\quad}$ ”，我们读作“根号”。我们规定：数 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$ 。其中 a 叫做被开方数，书写时被开方数完整写在根号内部。

教师 结合前面的例子，4 的算术平方根该如何表示？

学生 4 的算术平方根记作 $\sqrt{4}$ 。

教师 $\sqrt{4}$ 表示什么含义？结果是多少？

学生 $\sqrt{4}$ 表示求的 4 的算术平方根，因为 $2^2 = 4$ ，所以 $\sqrt{4} = 2$ 。

教师 那 2 的算术平方根呢？

学生 记作 $\sqrt{2}$ ，它就是面积为 2 的正方形的边长，且 $(\sqrt{2})^2 = 2$ 。

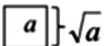
(下面析出数学概念)

教师 现在我们结合运算关系、符号规则，一起完整归纳算术平方根的概念，分别用文字语言、符号语言、图形语言三种形式表达。

师生 教师引导学生将算术平方根的概念用数学语言表示为：

若一个正数 x 的平方等于 a ，则这个正数 x 叫做 a 的算术平方根。(文字语言)

如果 $x \geq 0$ ，且 $x^2 = a$ ，那么 $x = \sqrt{a}$ 。(符号语言)

 $\sqrt{a}$ (图形语言)

【设计意图】通过分析，要研究算术平方根必须从特殊的情形(特殊正方形的面积和边长入手)出发，然后将特殊问题一般化，进一步分析，教师带领学生抽象出算术平方根的概念，并用数学语言予以表征，获得的是数学抽象物是数学概念。同时，对于算术平方根概念的生成，我们是归纳得到的，这也是我们常用到的数学方法，获得的数学抽象物是数学方法。

3.4. 深化概念的理解，探究算术平方根相关内容

3.4.1. 辨析释疑，归纳算术平方根的性质

例 1 求下列各数的算术平方根：100、 $\frac{49}{64}$ 、 $1\frac{9}{16}$ 、0.0001、0；并分别比较被开方数和算术平方根的大小，并用“<”连接。

教师 请大家结合刚刚学习的算术平方根概念，独立完成这道题，写出完整解题过程。

(学生动笔演算，教师巡视指导，随后组织集体交流)

教师 谁来说一说100的算术平方根是多少？说一说你的依据。

学生 1 因为 $10^2 = 100$ ，所以100的算术平方根是10，记作 $\sqrt{100} = 10$ 。

教师 回答得很规范。那64的算术平方根呢？

学生 2 因为 $8^2 = 64$ ，所以64的算术平方根是8，即 $\sqrt{64} = 8$ 。

教师 不错。0.0001和0的算术平方根哪位同学来分享？

学生 3 由 $0.01^2 = 0.0001$ 可得 $\sqrt{0.0001} = 0.01$ 。同理可得0的算术平方根为0。

教师 大家都能熟练运用概念解题了。现在我们把这几组被开方数和对应的算术平方根的大小按“<”连接起来：

被开方数： $0 < 0.0001 < \frac{49}{64} < 1\frac{9}{16} < 100$ ；

算术平方根： $0 < 0.01 < \frac{7}{8} < 1\frac{3}{4} < 10$ 。

请大家观察这两组数据，小组讨论，能发现什么规律？

(学生交流，片刻后交流发言)

学生 4 我发现被开方数越大，对应的算术平方根也就越大。

教师 观察的很仔细，这是一条重要规律，那老师再来提一个问题：我们能不能求负数的算术平方根？比如-4有没有算术平方根？大家结合算术平方根的定义想一想。

师生 教师引导学生明白“求一个数的算术平方根就是找到两个相同的因数相乘等于这个数”，但在我们学习过的有理数中找“两个相同的数相乘得负数”根本就不可能发生，所以负数没有算术平方根。

教师 现在我们换一个角度思考。在表达式 $\sqrt{a}$ 中， a 作为被开方数，它可以是负数吗？ $\sqrt{a}$ 本身又会

是负数吗？结合刚才的结论说一说理由。

师生 被开方数 a 不能是负数，因为不存在数的平方为负数，而算术平方根要么是正数，要么是 0，所以 $\sqrt{a}$ 也一定不是负数。

教师 经过我们刚才一系列得探究、讨论与总结，现在我们共同归纳，得出算术平方的性质：

- 性质**
1. 正数的算术平方根是一个正数；0 的算术平方根是 0；负数没有算术平方根。
 2. 被开方数是非负数，算术平方根也是非负的。
 3. 被开方数越大，对应的算术平方根越大。

【设计意图】以例题为载体，通过层层递进的师生问答、小组讨论，引导学生自主观察、推理、归纳，从具体计算走向规律提炼，获得了算术平方根的性质，这是以性质呈现的抽象物。同时通过探究算术平方根的性质，抽象出了归纳的宏观数学思想方法，这是以数学方法呈现的数学抽象物。

3.4.2. 以 $\sqrt{2}$ 为载体，解读符号意义，探究与有理数的关联

教师 通过前面的拼图，可以发现两个面积为 1 的正方形可以拼接成面积为 2 的大正方形。想一想这个大正方形的边长对应哪个数？

学生 这个边长就是 2 的算术平方根，即 $\sqrt{2}$ 。

教师 说的很准确。这个大正方形的边长就是 2 的算术平方根。大家思考一下，这条边长是否真实存在？

学生 1 这条边长是真实存在的，我们拼出了对应的正方形，线段长度客观存在。

学生 2 而且这个长度是唯一的，不存在第二个不同长度能作为该正方形的边长。

教师 两位同学总结得很准确。我们再结合数轴(图 4)来看，在数轴上能找到唯一一个点与之对应，从几何层面再次证明：2 的算术平方根客观存在且取值唯一。接下来我们围绕这个特殊的数展开探究。

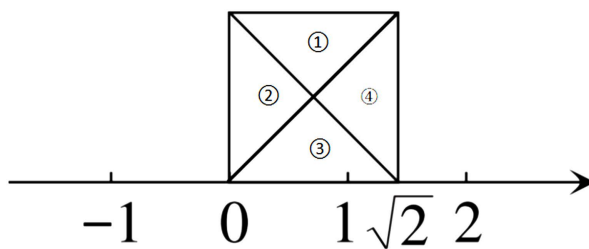


Figure 4. Schematic diagram of plotting the irrational number $\sqrt{2}$ on the number line

图 4. 在数轴上做出 $\sqrt{2}$ 的示意图

探究一 为何要用 $\sqrt{2}$ 表示 2 的算术平方根

教师 我们已经学习了整数、分数、有限小数等有理数，现在大家可以动笔计算，尝试找出一个有理数，使它的平方恰好等于 2，大家可以以小组进行讨论。

学生 学生结合计算依次回答： $1^2 = 1$ 、 $2^2 = 4$ ，但不存在整数的平方等于 2；继续尝试小数计算， $1.4^2 = 1.96$ 、 $1.5^2 = 2.25$ 、 $1.41^2 = 1.9881$ 、 $1.42^2 = 2.0164$ ，发现整数和有限小数范围内都没有符合条件的数。

(教师给予肯定)

师生 教师引导学生理解在数学定义中，所有有理数都可以表示为两个互质整数的比值 n 。经过严格的推理可以证明，有理数范围内不存在平方为 2 的数。这就出现了矛盾：面积为 2 的正方形边长真实存

在，可我们现有的有理数体系，却无法精准描述、书写这个数。所以就引入了根号，形象地来说 2 ，就像是给这个特殊的数戴上了专属“标识帽”，实现了数学表达的标准化，这也是我们必须用 $\sqrt{2}$ 表示 2 的算术平方根的核心原因。

探究二 $\sqrt{2}$ 与有理数的区别和联系

教师 通过刚才的探究，我们明确了 $\sqrt{2}$ 不属于有理数，那它到底是怎样一个数，它和我们熟悉的有理数之间是不是完全没有联系呢？(提示：大家可以结合算术平方根的性质 3：被开方数越大，对应的算术平方根越大，试着寻找二者的联系。)

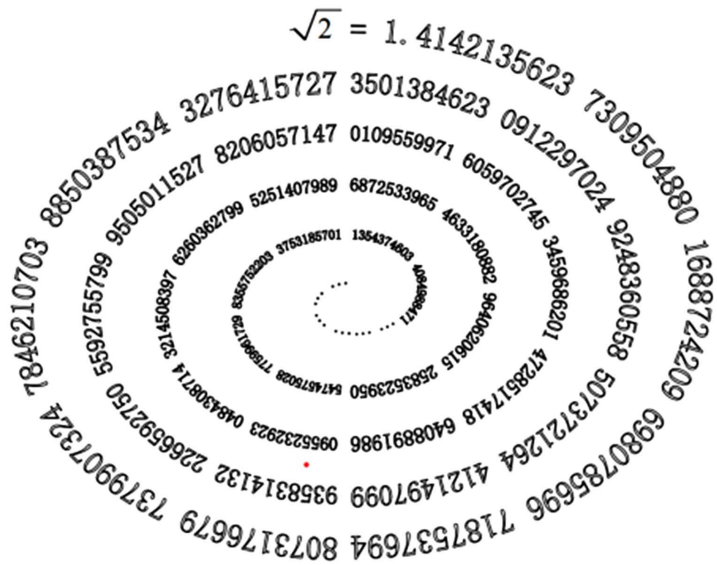
(学生分组运算，记录数据，教师巡视指导，引导学生逐步缩小范围)

学生 我们先通过数计算先确定整数范围，由 $1^2 = 1, 2^2 = 4$ 得出 $1 < \sqrt{2} < 2$ 。然后在这个基础上计算一位小数， $1.4^2 = 1.96, 1.5^2 = 2.25$ ，所以缩小范围到 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ 。

教师 区间越来越精确了，继续算下去，还能得到什么样的结论？

学生 我们计算了百分位和千分位，算出 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42, 1.414 < \sqrt{2} < 1.415$ ，能一直算下去。

教师 其实大家是用夹逼法，不断压缩 $\sqrt{2}$ 的取值范围。现在大家观看屏幕上 $\sqrt{2}$ 的小数展开图(图 5)，观察这些数字，说一说你发现了什么特征？



2. 内在联系：我们可以选取一系列有理数从左右两侧无限逼近 $\sqrt{2}$ 。在日常计算中，我们也常常选用合适的有理数近似代替 $\sqrt{2}$ 进行计算。

教师 补充一段数学史料， $\sqrt{2}$ 的发现推翻了古希腊“万物皆有理数”的观点，引发了数学史上的第一次数学危机，也推动了数学家打破原有认知，完成数系的扩充。

【设计意图】以 $\sqrt{2}$ 为载体，借助数轴，通过分析，探究了 $\sqrt{2}$ 的存在性、唯一性、大小、与熟悉的有理数的关系等问题，抽象出了数形结合的宏观数学思想方法，以及估计 $\sqrt{2}$ 的大小的微观数学方法：夹逼法(或极限思想)，这是以数学方法呈现的数学抽象物。

课后作业

(1) 通过算术平方根的探究过程，你领悟到了哪些数学思想方法？

(2) 自学教材第 58 页“阅读与思考”——为什么 $\sqrt{2}$ 不是有理数？

【设计意图】有利于让学生了解并证明“ $\sqrt{2}$ 不是有理数”的推理过程，消除课堂中存留的疑点问题。

4. 结束语

本文以数学概念“算术平方根”为例，通过设计不同层次“数学抽象物”的抽象过程，达到培养初中生数学抽象能力之目的，由此可以获得以下几点基本认识：

(1) 数学概念的形成过程是最典型的数学抽象过程。教学中往往会忽视数学概念的生成过程，实质是忽视数学概念的抽象过程，进而也就达不到培养数学抽象能力之目的；

(2) 数学概念的抽象过程包括从“各类情境”中抽象“数学问题”的过程，进一步通过分析析出概念；从“概念的具象化解决问题”中抽象出“数学问题”，通过解释、分析，抽象出“数学性质”的过程，并以具体实例理解抽象的概念的过程，也包括隐匿于表象之中的“数学思想方法”等过程；

(3) 通过设计数学概念教学过程中不同层次“数学抽象物”的抽象过程，掌握数学概念并用数学语言予以表征。通过具体例子，运用数学概念解释和分析，获得数学性质、数学思想方法，均是培养数学抽象能力的重要途径。

参考文献

- [1] 鲍建生. 数学核心素养在初中阶段的主要表现之一：抽象能力[J]. 中国数学教育, 2022(9): 4-9+13.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [3] 陈雨晴. 精心设计概念教学培育数学抽象素养——以“导数的概念”第 1 课时教学设计为例[J]. 高中数学教与学, 2024(10): 17-19+26.
- [4] 杨军. 指向抽象能力培养的教学案例设计——以“勾股定理”的教学为例[J]. 中国数学教育, 2026(3): 18-22.