

线性代数课程与经济学交叉融合探索及实践

冯海珊, 蒙忠传, 张 幸

广西大学数学学院, 广西 南宁

收稿日期: 2026年9月7日; 录用日期: 2026年10月8日; 发布日期: 2026年10月15日

摘 要

为满足培养“四新”人才的需求, 教学团队开展了线性代数与经济学学科交叉融合的探索, 构建了交叉融合系列案例, 提出“案例驱动 + 线上线下混合教学”的改革方案, 通过课前线上案例预习、线下课堂解决问题, 课后拓展巩固的教学组织形式, 显著提升了课程的高阶性和挑战度, 取得了良好的教学效果。

关键词

案例建设, 学科交叉, 线上线下混合教学

Exploration and Practice of Integrating Linear Algebra with Economics

Haishan Feng, Zhongchuan Meng, Xing Zhang

School of Mathematics, Guangxi University, Nanning Guangxi

Received: September 7, 2026; accepted: October 8, 2026; published: October 15, 2026

Abstract

To meet the demand for cultivating “Four New” talents (new engineering, new medicine, new agriculture, and new humanities), the university has explored the interdisciplinary integration of linear algebra and economics, developed a series of interdisciplinary case studies, and proposed a reform plan featuring “case-driven instruction combined with online-offline blended teaching”. Through a pedagogical structure encompassing pre-class online case preview, in-class problem solving, and post-class extension and consolidation, the initiative has significantly enhanced the course’s advanced nature and level of challenge, achieving favorable teaching outcomes.

Keywords

Case Development, Interdisciplinary Integration, Online-Offline Blended Instruction



1. 引言

近年来,应教育部要求,各高校各专业持续推进培养“四新”人才的探索,推行本硕博贯通培养模式,设立各专业的创新实验班。高水平的人才培养需要高质量的课程建设,学科交叉融合、持续深化教育教学制度改革是提升课程高阶性、创新性和挑战度的有效方式[1]。

线性代数是刻画线性系统特征的重要工具,经济学中的诸多方法均以其为核心支撑:比如多元线性回归模型中的参数估计需要用到矩阵乘法及逆运算原理、经济领域多变量间的多重共线性问题需要涉及变量线性相关性判断、多因素分析中的主成分提取需要特征值分析等等。莱夫和温格提出的情景学习理论指出,应该在知识实际应用的真实情景中呈现知识,要把学与用结合起来。然而,长期以来,现有《线性代数》教材和教学模式均未能与经济学学科较好的交叉融合,导致经管专业学生缺乏学习的主观能动性,以及将方法迁移至具体对象建立数学模型并求解的能力。因此,亟须进行线性代数课程与经济学学科交叉融合的探索,解决高水平人才培养需求与纯数学理论学习之间的矛盾。

国内外高校有大量针对线性代数课程的教学改革,但仍存在适配学科交叉特色的研究空白。国外高校(如 MIT、斯坦福大学)侧重强调“应用驱动 + 计算导向”的理念,常将线性代数课程与计算机图形学、机器学习等前沿领域深度绑定[2]。国内高校也在积极推进改革,但较多的改革集中在教学手段创新方面,如依托学习平台,利用知识图谱技术构建课程知识图谱与能力图谱;利用 AI 构建智慧课堂等等,这些新的技术,为学生学习提供了技术支撑。但现有研究与实践仍未能充分覆盖跨学科知识体系的构建需求:将线性代数与专业领域融合的应用案例仍需拓展,唯有丰富线性代数课程的跨学科应用案例,才能为跨学科知识体系的完善提供核心支撑。

目前,在线性代数课程中融入经济学学科知识面临以下突出问题:一是《线性代数》课程教材中没有与经济学学科相联系的案例,线性代数的核心概念如向量空间、线性相关性、特征值等具有高度抽象性,传统教学往往从定义、定理到证明的“演绎式”展开,缺乏直观背景和具体应用场景,导致学生难以建立概念与现实问题之间的关联,产生“学而无用”的困惑;二是教学模式单一,互动性不足。以教师讲授为主的“满堂灌”模式,学生被动接受知识,课堂参与度低,高阶思维能力(如分析、评价、创造)培养不足。三是考核评价偏重计算,忽视能力培养。传统考试侧重计算,而对建模能力、跨学科迁移能力、批判性思维等高阶能力的考查不足。

教学团队采取了以下措施应对上述问题:

(1) 融合具备数学和经济学背景的教师联合备课,形成了线性代数与经济学交叉融合的系列教案,将部分经济学专业偏数学及数学模型课程的知识结合线性代数方法进行介绍。一方面,提升了学生学习线性代数的目的性及趣味性;另一方面,学生在学习该类偏数学的专业课程时更易于吸收理解,这一措施显著提升了课程的高阶性。

(2) 依托线上线下混合教学模式,将案例教学融入“课前-课中-课后”全链条。课前阶段,借助慕课平台与雨课堂等工具,向学生推送与后续授课内容紧密关联的经济学微案例与预习任务单,如“投入产出表中的矩阵运算”,引导学生带着问题进入课堂;课中阶段,采用“案例驱动 + 翻转研讨”的教学策略,教师以经济学真实情境引出线性代数核心概念并详细介绍;课后,依托线上平台布置开放性经济学建模作业,鼓励学生运用 SPSS 或 Python 等工具将线性代数方法应用于数据分析与决策优化,同时通

过线上答疑与同伴互评延伸学习深度。

(3) 重构考核评价体系,实现从“重计算”向“重能力”的转变。在课程考核的过程性评价部分,加入线上学习行为数据、课堂案例研讨表现、经济学建模小组项目报告等维度,将高阶思维能力的发展纳入评价反馈闭环,有效引导学生在掌握运算技能的同时,提升运用数学工具解决复杂经济问题的综合素养。

2. 交叉融合典型案例

经济、管理中数学模型的运用与估计,一直是经管专业学生学习的难点,为帮助学生更深入掌握其中的方法,设计了系列案例。

2.1. 案例库的整体框架设计

以同济大学数学科学学院编写的《线性代数》为教材[3],设计了以下典型案例,见表1。

Table 1. Overall framework design of the case
表 1. 案例整体框架设计

知识模块	经济学专业应用场景	对应教材章节
矩阵与行列式	参数的最小二乘估计	第 1 章行列式、 第 2 章矩阵及其运算
线性方程组	投入产出分析	第 3 章矩阵的初等变换与线性方程组
向量组的线性相关(无关)性	变量多重共线性诊断	第 4 章向量组的线性相关性
特征值与特征向量	主成分分析(PCA)	第 5 章相似矩阵及其二次型
二次型与正定矩阵	风险度量(协方差矩阵)	第 5 章相似矩阵及其二次型
线性变换	生产函数变换	第 6 章线性空间与线性变换

2.2. 专业案例设计示例

案例 1: 线性回归模型中参数的最小二乘估计

在经济学领域中有一个非常经典的模型——线性回归模型:假设研究对象 Y 有若干个影响因素 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 经过初步分析,假设变量间是线性关系,则其关系式可写为

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \dots + \alpha_n X_{ni} + \mu_i \tag{1}$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 为待估参数, μ_i 是误差项。 i 表示第 i 个样本, $i = 1, \dots, m$ 。将样本值代入,上述方程可写为矩阵的形式

$$Y = X\alpha + \mu$$

其中,

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{1m} & \cdots & X_{nm} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

由最小二乘法的原理,参数矩阵的求解公式为

$$\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \tag{2}$$

此处要完成参数矩阵的求解,涉及矩阵乘法运算、矩阵加法运算,转置运算、逆矩阵运算等一系列

矩阵的基本概念与计算方法。

案例 2：变量间多重共线性诊断

我国民航客运量的变化受到多种因素共同影响，影响因素有哪些？程度如何？依据经济学理论，以民航客运量作为因变量 y ，可选取国民收入 x_1 、民用汽车拥有量 x_2 、铁路客运量 x_3 、民航航线里程 x_4 、来华旅游入境人数 x_5 这 5 个自变量作为影响民航客运量的主要影响因素[4]。在建立因果关系模型时，涉及一个问题：5 个变量都需要引入模型吗？变量间是否有相互影响的关系？是否能相互取代？

我们在课前，提出问题并发布给学生思考。

课堂上，我们引入向量线性相关(无关)的概念：若向量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 线性相关，则至少有一个向量，可以表示成其余向量的线性组合，这意味着矩阵 X 的某列取值可以用其余列线性表示，结合本例子，在民航客运量的若干影响因素中，有某两个或两个以上变量存在线性相关关系，即某经济变量可以用其余部分变量线性表示，在经济学领域，这叫变量间存在多重共线性。第 2 步，我们引出第 2 个问题，在变量间存在多重共线性的情况下，参数估计会出现什么问题？引导学生发现若 $X^T X$ 不可逆则无法由最小二乘估计公式(2)给出参数的估计值！进而，逐步给出“矩阵 X 不满秩，不可逆！”的结论。最后，引出第 3 个问题：如何解决该参数估计问题？

引出极大无关组的概念！找出这 5 个变量中的一个极大无关组，将极大无关组中的对应变量保留在回归模型中，从回归模型(1)中去掉能用极大无关组表示的变量即可。

课后，布置扩展练习，让学生找寻样本，借助软件，完成该案例中模型的参数估计。

案例 3：多因素综合评价——特征值与特征向量的应用

在经济领域，常常需要对企业经济效益进行综合评价。一个企业的效益可以用很多指标刻画，比如：净利润率 X_1 、毛利润率 X_2 、净资产收益率 X_3 、资产负债率 X_4 、流动比率 X_5 、存货周转率 X_6 、应收账款周转率 X_7 和总资产周转率 X_8 等等。假设 X_{ij} 为第 i 个企业在第 j 个指标上的取值。

问题分析：该案例指标数量较多，并且指标之间存在某种程度的相关关系，直接用全部指标对企业经济效益进行评价，工作量巨大，通常的想法是将较多的指标在不损失主要信息的情况下，将较多的指标综合成少数指标，以此实现对目标的评价，经济学上，常用的方法是主成分分析法。主成分分析法的思想是：对样本做一个变换，在消除指标样本之间的相关关系的同时，保持样本主要信息量，提取少量有代表性的主要指标用于分析即可。这一方法，本质上是线性代数中求对称阵的特征值与特征向量的思想。

考察以上 8 个指标相互之间两两线性相关关系，得协方差矩阵如下

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_8) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_8) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(X_8, X_1) & \text{cov}(X_8, X_2) & \dots & \text{cov}(X_8, X_8) \end{pmatrix}$$

对相关系数矩阵 Σ 做变换消除变量之间的相关关系，这等价于将上述协方差矩阵变为对角阵 Λ ，即主对角线上元素不为零，其余位置元素为零。注意到，协方差阵是对称阵，由线性代数中实对称阵的性质：对于对称矩阵，必存在可逆阵 P ，使得

$$P^T \Sigma P = \Lambda,$$

其中对角阵 Λ ，对角线上的元素就是实对称矩阵 Σ 的特征值 λ_j ， P 为实对称矩阵 Σ 的特征向量构成的矩阵。

也就是说，只需求出对称矩阵 Σ 的特征值及特征向量，就可以在不损失原矩阵信息的基础上，将信息变换至主对角线，得矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_8 \end{pmatrix}$$

最后，计算各主成分的贡献率

$$b_j = \lambda_j / \left(\sum_{i=1}^8 \lambda_i \right) \quad j=1, \cdots, 8$$

按照准则

$$\sum_{j=1}^K \lambda_j / \left(\sum_{i=1}^8 \lambda_i \right) \geq 85\%$$

提取前 K 个主成分，且第 j 个主成分为

$$Z_i = P_i^T X,$$

P_i^T 为矩阵 P 的第 i 个特征向量的转置。

若变量间存在相关关系，则 K 通常可取 2 或 3，相比原来的 8 个变量，可以实现在损失极少主体信息的条件下，用少数 K 个指标即可评价企业的经济效益。

3. 线上线下混合教学模式的构建与实施

在实践中，结合线上教学平台，将案例教学融入“线上预习 - 线下深化 - 课后拓展”的三阶段循环结构，对应课前、课中、课后三个环节：课前学生阅读案例素材，该阶段学生自主安排学习进度，平台记录学习时长与频次，学生可以带着问题等老师在课堂上解答，学有余力的同学也可进一步学习案例涉及到的概念及方法；课堂上，教师精讲知识点并对案例展开详细剖析；课后，学生可将所学的新知识和方法迁移至拓展案例，完成选做的项目作业，也可以在平台上和同学反思讨论。下面以“方阵的特征值和特征向量”为例展示教学过程。

- (1) 学习“方阵的特征值和特征向量”前，在线上平台发布案例“多因素综合评价——特征值与特征向量的应用”，学生阅读背景材料，观看案例动画演示，初步感知知识的应用场景，思考预留问题：1、如何将对称阵转换为对角阵？2、可逆阵 P 如何找？3、对角阵上的元素如何求？
- (2) 课堂学习。结合所给案例数据，由公式 $P^T \Sigma P = \Lambda$ （此处说明 Σ 为对称阵，有 $P^{-1} \Sigma P = \Lambda$ ）倒推出表达式 $\Sigma P = P \Lambda$ ，进而得到 $\Sigma P_i = \lambda_i P_i$ ，最终一步步引出特征值与特征向量的求法。
- (3) 拓展案例研究。经过线下课程的学习后，学生自主选择 1 个综合应用型或创新探究型案例，完成案例分析报告。例如，利用 PCA 对某真实数据集进行降维分析，撰写包含数据描述、建模过程、结果解释、结论建议的完整报告。

4. 教学评价体系改革及教学效果

与教学模式相对应，教学评价方式也做了相应的修改，引入了线上学习的评价以及课后拓展的评价[5]，构建了相对应的多元化评价体系，见表 2：

Table 2. Composition of ordinary grades
表 2. 平时成绩构成

评价维度	权重	具体内容	评价方式
平时表现	10%	平时线下作业、考勤	教师评分

续表

线上学习表现	5%	微课观看时长、素材的下载次数	平台数据自动记录
案例作业	5%	案例分析报告质量、	教师观察 + 同伴互评
段考	10%	指定学习内容	教师评分
阶段性测验	10%	在线单元测试(概念理解 + 计算能力)	平台自动批改
期末考试	60%	所有知识点	闭卷考试

评价设计突出三大转变：从“重结果”到“重过程”、从“重计算”到“重计算、兼顾应用”、从“教师单一评价”到“多元主体评价”。

问卷调查结果显示 100%的学生认为这种“案例 + 混合式教学模式”提高了他们学习线性代数的主动性和对专业知识的理解，在完成案例作业的练习后，80%以上的学生表示对经济学专业领域问题的数学建模能力得到了显著提升。

5. 结语

本文从学科交叉视角出发，系统探讨了线性代数教学案例库的建设路径与线上线下混合教学模式的实施方案。通过构建涵盖经济学学科的案例库，将抽象的线性代数概念锚定于真实问题情境，有效回应了“为何学”与“如何用”的学生关切；通过“线上 - 线下 - 课后”的混合式教学设计，实现了知识传授与能力培养的有机统一，促进了学生从被动接受者向主动建构者的角色转变。

未来研究会进一步开展教学改革的效果实证研究，通过对照实验、学习分析等方法，量化评估案例库与混合式教学对学生学业成就、学习动机、高阶思维能力的影响，为线性代数课程改革的深入推进提供循证依据。

基金项目

本文系广西大学优质本科课程(线性代数)倍增计划立项项目资助(项目编号：2024YZKC4)。

参考文献

[1] 石章智, 等. 线性代数课程与材料学科交叉融合的探索[J]. 大学数学, 2026, 42(2): 42-47.

[2] 姚珊珊, 叶玲娟, 赵新超, 等. 跨学科视角下线性代数课程应用案例库建设与教学模式改革研究[J]. 高教教学与实践, 2026(6): 25-28.

[3] 同济大学数学科学学院. 线性代数[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[4] 金玉兰, 沈元蕊. 管理决策模型与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2019.

[5] 刘建熙, 等. 线上线下混合式教学的大学生平时成绩评价体系探索——以线性代数课程为例[J]. 大学数学, 2026, 42(1): 50-58.