

# 一道高考数学题的多种解法探究及思考

## ——以2025年全国新课标II卷第17题为例

靳旭华\*, 关晋瑞#

太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

收稿日期: 2026年9月9日; 录用日期: 2026年10月10日; 发布日期: 2026年10月16日

### 摘 要

在高中数学知识体系里, 立体几何是考查学生空间想象能力、逻辑推理能力及数学建模素养的关键内容, 高考中的立体几何题常因综合性强、解法灵活而成为区分学生思维层次的典型题型。以2025年全国新课标II卷第17题为例, 探究其多种解法。研究发现, 不同解法在构建解题桥梁时存在依赖坐标系、辅助线构造要求高、延长线探索随机性强等局限, 反映出工具应用与数学本质失衡的问题。由此得出教学中需平衡“代数运算”与“几何直观”训练, 解题策略应注重“转化思想”渗透的启示。

### 关键词

高考数学题, 一题多解, 立体几何

# Research and Reflections on Multiple Solutions to a College Entrance Examination Mathematics Problem

## —A Case Study of Question 17 in the 2025 National New Curriculum Standard Volume II

Xuhua Jin\*, Jinrui Guan#

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: September 9, 2026; accepted: October 10, 2026; published: October 16, 2026

\*第一作者。

#通讯作者。

## Abstract

Within the knowledge system of senior high school mathematics, solid geometry serves as a core component for examining students' spatial imagination ability, logical reasoning capability, and mathematical modeling literacy. Solid geometry questions in the National College Entrance Examination have always been typical items for differentiating students' thinking levels due to their strong comprehensiveness and flexible solution approaches. Taking Question 17 of the 2025 National New Curriculum Standard Volume II as the research object, this paper explores its multiple solving methods. The research results indicate that different solutions present distinct limitations when building bridges for problem solving, including excessive reliance on coordinate systems, high requirements for auxiliary line construction, and strong randomness in extended line exploration, which reflect the imbalance between tool application and the essence of mathematics. Accordingly, this paper concludes that mathematics teaching should balance the training of algebraic operation and geometric intuition, and problem-solving strategies should emphasize the infiltration of transformation thinking.

## Keywords

Mathematics Problems in College Entrance Examination, Multiple Solutions to One Problem, Solid Geometry

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在高中数学知识体系中,立体几何作为兼具抽象性与逻辑性的重要内容,始终是考查学生空间想象能力、逻辑推理能力及数学建模素养的关键载体[1]。这类问题通过“线面关系”“空间角与距离”等核心考点,将抽象的几何概念与直观的图形分析相结合,不仅要求学生具备扎实的理论基础,更需掌握转化问题、分类讨论等多元解题策略。从高考命题视角看,立体几何题往往以综合性强、解法灵活的特点成为区分学生思维层次的典型题型,其解题过程对深化学生数学思维品质、提升知识迁移能力具有不可替代的意义[2]。

2025 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题(全国新课标 II 卷)中第 17 题,延续了高考命题对空间思维与逻辑推理的考查要求,其题干设置与问题设计兼具典型性与创新性。以该题为研究对象,系统探究多种解法的内在逻辑与思维路径[3],不仅能直观呈现立体几何问题的解题策略体系,更可通过解法对比揭示知识间的内在联系,为高中数学立体几何教学提供解题思路的范例参考。基于此,对该题的多解探究与深度思考,既有助于学生突破立体几何解题瓶颈,也能为习题教学提供实践层面的启示。

## 2. 试题呈现

如图 1, 四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $F$  为  $CD$  中点,  $E$  在  $AB$  上,  $EF \parallel AD$ ,  $AB = 3AD$ ,  $CD = 2AD$ 。将四边形  $EFDA$  沿  $EF$  翻折至四边形  $EFD'A'$ , 使得面  $EFD'A'$  与面  $EFCB$  所成的二面角为  $60^\circ$ 。

(1) 证明:  $A'B \parallel$  平面  $CD'F$ 。

(2) 求平面  $BCD'$  与面  $EFD'A'$  所成二面角的正弦值。

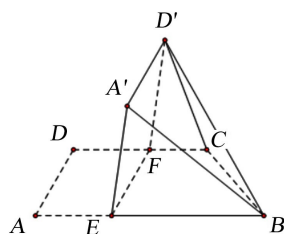


Figure 1. Question 17 of the 2025 National New Curriculum Standard Volume II  
图 1. 2025 年全国新课标 II 卷第 17 题

### 3. 解题探究

#### 3.1. 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$

**解法 1——双线面平行证面面平行**

【思路】：线面平行的核心判定逻辑是“若平面外一条直线与平面内某条直线平行，则线面平行”。但直接找线线平行有时较难，可借助面面平行传递性：若一个平面内两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行；当两平面平行时，其中一个平面内的直线必然平行于另一个平面。

本题中，翻折前后线段的平行关系是关键线索( $AB \parallel CD$  是原始平行，翻折后  $A'E$ 、 $D'F$  与  $AD$  保持平行关联)。计划先找到两条分别平行于平面  $CD'F$  的直线，构造出与平面  $A'EB$  平行的平面  $CD'F$  从而间接证明  $A'B \parallel$  平面  $CD'F$ 。

【解题方法过程】：

$\because AB \parallel CD, \therefore BE \parallel CF, BE \not\subset$  平面  $CD'F, CF \subset$  平面  $CD'F$

$\therefore BE \parallel$  平面  $CD'F$

$\because AB \parallel CD, \therefore AE \parallel DF, A'E \parallel DF, A'E \not\subset$  平面  $CD'F, D'F \subset$  平面  $CD'F$

$\therefore A'E \parallel$  平面  $CD'F$

$\because BE \cap A'E = E, \therefore$  面  $A'BE \parallel$  面  $CD'F, \therefore A'B \parallel$  平面  $CD'F$

**解法 2——构造平行四边形**

【思路】：“平行四边形对边平行”是传递线线平行的经典工具。本题可通过延长辅助线构造平行四边形，将  $A'B$  的平行关系转化为平行四边形对边的平行关系，再利用线面平行判定定理证明。

核心是观察到原始图形中  $AB \parallel CD$ 、 $EF \parallel AD$  的平行线索，翻折后  $A'D'$  与  $EF$  仍保持平行，通过延长  $FC$  构造出与  $BE$  平行的线段，进而搭建平行四边形桥梁，见图 2。

【解题方法过程】：

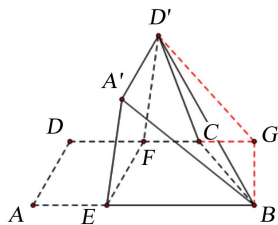


Figure 2. Solution 2 for part (1)  
图 2. 第(1)问解法 2

延长  $FC$  至  $G$ ，使得  $CG = FC$ ，连接  $GD'$ 、 $GB$

$\therefore FG \parallel BE$ ,  $\therefore$  四边形  $EFGB$  为平行四边形  
 $\therefore BG \parallel EF$ ,  $A'D' \parallel EF$ ,  $\therefore A'D' \parallel BG$   
 $\therefore$  四边形  $A'D'GB$  为平行四边形  
 $\therefore A'B \parallel DG$ ,  $A'B \not\subset$  平面  $CD'F$ ,  $D'G \subset$  平面  $CD'F$   
 $\therefore A'B \parallel$  平面  $CD'F$

### 3.2. 求平面 $BCD'$ 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值

#### 解法 1——空间向量法

【思路】：空间向量法是将立体几何“空间角”问题转化为“代数运算”问题的通用方法。核心逻辑是：若能建立空间直角坐标系，求出两个平面的法向量，则二面角的大小可通过两个法向量的夹角(或其补角)来求解。

本题中，翻折后  $EF \perp A'E$  且  $EF \perp EB$ ，天然形成两两垂直的直线，可作为坐标轴方向建系。计划通过“建系→赋值→求法向量→算夹角”的流程，利用向量点积公式计算二面角的正弦值，见图 3。

【解题方法过程】：

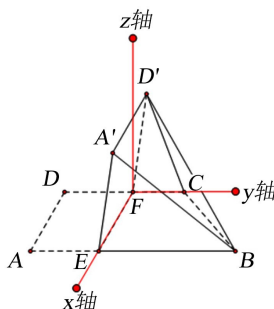


Figure 3. Solution 1 for part (2)

图 3. 第(2)问解法 1

由已知得  $\angle D'FC = \angle A'EB = 60^\circ$ ，以  $F$  为坐标原点，分别以  $EF$ 、 $FC$  为  $X$ 、 $Y$  轴，过  $F$  做面  $ABCD$  的垂线为  $Z$  轴。不妨设  $AD=1$  则  $E(1,0,0)$ ， $F(0,0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ， $B(1,2,0)$ ， $D'\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $A'\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

设面  $BCD'$  的法向量为  $m = (x_1, y_1, z_1)$ ，面  $EFD'A'$  的法向量为  $n = (x_2, y_2, z_2)$

$$CB = (1, 1, 0), \quad CD' = (0, -21, 23), \quad m = (-3, 3, 1)$$

$$FE = (1, 0, 0), \quad FD' = (0, 21, 23), \quad n = (0, 3, -1)$$

$$\therefore \cos \theta = |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

#### 解法 2——几何法(找平面角)

【思路】：几何法的核心是找到二面角的平面角，即通过线面垂直关系，构造出一个角，使其两边分别垂直于二面角的棱，从而该角就是二面角的平面角。

本题中，翻折后  $EF \perp$  面  $A'EB$  是关键垂直关系，可利用此推出  $A'B \perp$  面  $EFD'A'$ ，再通过作辅助线构造出平面角，最后利用直角三角形的边角关系求解正弦值，见图 4。

【解题方法过程】：

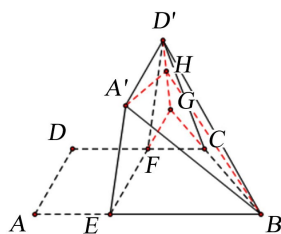


Figure 4. Solution 2 for part (2)

图 4. 第(2)问解法 2

延长  $EF$ ,  $BC$  交于点  $G$ , 连接  $D'G$ ;

设  $AD = 1$ ,  $DF = 1$ ,  $BE = 2$

$\therefore EF \perp A'E$ ,  $EF \perp EB$

$\therefore \angle A'EB$  为面  $EFD'A'$  与面  $EFCB$  所成二面角的平面角

$\therefore \angle A'EB = 60^\circ$ ; 又  $\therefore$  四边形  $DAEF$  为正方形

$\therefore A'E = 1$ ,  $A'B = 3$

$\therefore A'E^2 + A'B^2 = BE^2$ ,  $\therefore A'E \perp A'B$

又  $\therefore A'E \cap EB = E$ ,  $EF \perp$  平面  $A'EB$

$\therefore EF \perp A'B$ ,  $A'E \cap EF = E$ ,  $\therefore A'B \perp$  面  $A'EFD'$

在面  $EFD'A'$  中, 作  $A'H \perp GD'$  交延长线于点  $H$ , 连接  $BH$

$\therefore A'B \perp GD'$ ,  $A'H \cap A'B = A'$

$\therefore GD' \perp$  面  $A'BH$ ,  $\therefore GD' \perp HB$

$\therefore \angle A'HB$  为所求二面角的平面角

又  $\therefore A'H = 2$  且  $A'B \perp A'H$ ,  $\tan \angle A'HB = 6$

$\therefore \sin \angle A'HB = \frac{\sqrt{42}}{7}$

**解法 3——几何法(延长线构造 + 三角形边角关系)**

【思路】: 当空间几何关系复杂时, 延长线构造新交点可将分散的线段、角集中到三角形中, 利用三角形的余弦定理、正弦定理求解二面角。核心逻辑是: 通过延长线创造与二面角相关的三角形, 结合翻折后的垂直关系、已知二面角(如  $\angle A'EB = 60^\circ$ ), 将二面角的正弦值转化为三角形中边的比例关系。

本题中, 延长  $EF$ 、 $BC$  交于  $M$ , 连接  $D'M$ , 可构造出包含二面角关键信息的  $\triangle D'MB$ 。计划通过“延长线构造三角形→计算边长→利用正弦定理求高→推导二面角正弦值”的流程求解, 见图 5。

【解题方法过程】:

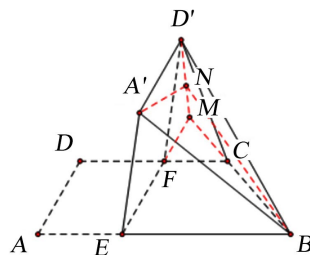


Figure 5. Solution 3 for part (2)

图 5. 第(2)问解法 3

延长  $EF$ ,  $BC$  交于点  $M$ , 连接  $D'M$

$\because BE \perp EF$  且  $A'E \perp EF$

$\therefore \angle A'EB$  为二面角  $A'-EF-B$  的平面角;  $\therefore \angle A'EB = 60^\circ$

又  $\because BE = 2A'E$ , 不妨设  $BE = 2$ ,  $A'E = 1$

$$A'B^2 = A'E^2 + BE^2 - 2A'E \cdot BE \cdot \cos 60^\circ = 3$$

$$\therefore A'B = \sqrt{3}; A'E^2 + A'B^2 = BE^2$$

$\therefore BA' \perp A'E$ ,  $\because EF \perp A'E$ ,  $EF \perp BE$ ,  $BE \cap A'E = E$

$\therefore EF \perp$  面  $A'EB$ ; 又  $\because A'B \subset$  面  $A'BE$ ,  $\therefore A'B \perp EF$

$\therefore A'B \perp$  面  $EFD'A'$ ; 三角形  $D'FM$  中  $D'M = \sqrt{2}$

同理得  $MC = \sqrt{2}$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ ,  $BD' = 2$

过点  $B$  作  $BN \perp MD$  垂足为  $N$ ;

$$\cos \angle D'MB = \frac{D'M^2 + MB^2 - D'B^2}{2D'M \cdot MB} = \frac{3}{4}, \sin \angle D'MB = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore BN = MB \cdot \sin \angle BMD' = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

设面  $BCD'$  与面  $EFD'A'$  二面角为  $\theta$

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{BA'}{BN} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

#### 4. 反思

从解题方法的实践来看, 三种方法的优势在于尝试构建代数与几何的解题桥梁, 通过坐标系建立将图形问题转化为数值计算, 借助辅助线构造拓展空间关系分析路径, 以延长线探索挖掘隐藏的几何关联, 这种多维切入的解题思路体现了对知识整合应用的探索意识, 也暗含了通过严谨计算验证几何结论的科学思维[4]。然而, 方法在实际应用中暴露出明显的局限性: 过度依赖坐标系会使解题陷入机械运算的窠臼, 忽略图形本身的对称性与位置关系本质; 辅助线构造对空间想象能力的高要求, 容易让学生因视角局限而陷入构造困境; 延长线方向的随机性则导致解题过程充满试错成本, 难以形成可迁移的解题策略, 这使得方法在普适性与效率性上存在明显不足。

从认知心理学视角看, 上述现象契合工具性理解与关系性理解的区分, 斯根普(Skemp)将数学理解划分为工具性理解与关系性理解: 工具性理解指学生只记住解题程序、操作步骤(例如记住建系求法向量的固定流程), 知道“怎么做”但不理解“为什么要这么做”; 关系性理解则是理解知识内在逻辑、图形本质与方法背后的数学意义[5]。不少学生使用空间向量法时仅停留在工具性理解层面, 把建系、求法向量当作一套固定操作, 弱化对空间位置关系的关系性理解, 造成“会算坐标, 看不懂图形”的认知割裂。

从数学哲学角度, 数学兼具“算法的可操作性”与“论证的思辨性”双重属性。立体几何解题中, 向量代数代表算法、程序化的一面; 综合几何代表直观、思辨推理的一面。如果教学片面推崇算法工具, 会造成学生对立体几何的认知窄化为坐标运算, 遮蔽立体几何培养直观想象、逻辑推理素养的本体价值。同时结合启发式教学理论, 辅助线、延长线并非孤立解题技巧, 每一条辅助线背后都对应着转化、化归的思维目的; 若缺少对问题结构的分析, 辅助线就变成无逻辑的试错行为, 这正是启发式教学所反对的“只教技巧, 不教思考路径”。

反思这些方法背后的教学导向, 其矛盾核心在于工具应用与数学本质的失衡: 当坐标系被当作万能解题工具时, 学生对几何直观的敏感度会被代数计算的机械性削弱; 辅助线构造若缺乏“为何构造”的逻辑溯源, 易沦为技巧记忆而非思维训练; 延长线探索若缺少对图形特征的系统分析, 便会成为无目的

的尝试。这种解题路径实际上弱化了对数学核心思想的渗透——化归思想应基于对图形本质关系的洞察[6], 而非依赖工具的形式转化; 模型构建应源于对问题结构的提炼, 而非停留在辅助线的随机尝试。

## 5. 启示

### 5.1. 教学中需平衡“代数运算”与“几何直观”的训练

在立体几何教学中, 平衡“代数运算”与“几何直观”训练至关重要。空间向量法作为代数运算的代表, 以建立坐标系、向量坐标运算为核心, 为解题提供标准化路径, 能精准解决复杂图形的定量问题。而几何法则依赖空间想象与逻辑推理, 通过辅助线、几何性质进行定性分析, 培养学生空间观念。

若只偏重向量法, 学生易形成机械计算思维, 忽视空间结构; 若只依赖几何法, 面对复杂图形又会束手无策。二者相辅相成, 代数运算为几何直观提供数据支撑, 几何直观为代数运算赋予空间意义——正如波利亚在《怎样解题》中强调的“化归思想”与“启发式问题清单”核心理念: “你能从已知量中得出一些有用的东西吗?” “你用到全部的条件了吗?” 这类引导既需几何直观构建空间模型, 又需代数运算精准刻画关系, 二者共同构成解题思维的双轨[7]。

落实到课堂教学层面, 教师可以设置“一题双路径”的课堂任务: 针对同一道立体几何题目, 要求学生先做几何层面的定性分析, 预判线面、二面角的位置特征, 再选用向量法完成定量计算; 完成计算之后, 再回归几何图形解释计算结果的几何含义。针对翻折类问题, 可组织对比探究活动, 引导学生独立辨析翻折前后哪些垂直、平行、长度关系保持不变, 哪些发生改变。同时课堂上要设置分层设问, 借助波利亚启发式问题链, 引导学生追问“为什么这里可以建系? 建系的条件是什么?” “这条辅助线是为了解决哪个矛盾而构造?” 以此推动学生从工具性理解走向关系性理解, 避免向量沦为纯粹的计算套路。在作业与测评设计上, 可适当设置不适合建系的立体几何小题, 倒逼学生调动几何直观, 避免学生形成“遇立体几何就建系”的思维定势。

### 5.2. 解题策略应注重“转化思想”的渗透

三种解法的核心均指向“转化”——向量法将空间角转化为代数运算, 解题策略中“转化思想”的渗透直接影响学生的解题能力。向量法将空间角、距离转化为代数运算, 用公式快速得出结果; 几何法把空间关系转化为平面图形问题, 降低思维难度。教学时, 教师需引导学生剖析题目条件, 找出“不变量”与“可转化元素”, 像面对翻折问题, 抓住平行、垂直关系的不变性。通过不断强化转化思想, 学生能突破单一思维局限, 依据题目特点灵活选择解法, 从被动解题转变为主动建模, 将实际问题抽象成数学模型, 从而有效提升数学核心素养与解决问题的能力。

在习题教学中, 要实现从“一题多解”走向“多解归一”。一题多解不能止步于展示多种解题方法, 更重要的是组织学生开展解法对比研讨, 追问不同解法背后共同的转化目标: 向量法是把空间几何问题转化为向量代数问题; 综合几何法是把空间问题向平面几何转化; 延长辅助线本质是把分散空间元素集中到同一个平面、同一个三角形中。无论哪种路径, 本质都是化归。针对翻折题型, 可建立专门的转化思维脚手架: 第一步识别翻折前后不变的度量、位置关系; 第二步识别翻折带来的新二面角; 第三步选择转化路径, 判断适合代数向量转化还是平面几何转化。同时教学中要重视对学生错解的分析, 收集学生“只会建系不会看图”“盲目作辅助线没有目标”的典型错误, 围绕错误开展课堂辨析, 让学生体会转化不是形式上的技巧变换, 而是基于题目条件的理性选择, 以此落实直观想象、逻辑推理等数学核心素养。

## 基金项目

太原师范学院基础教育专项课题(JCJY05)。

---

## 参考文献

- [1] 孙元勋, 李红庆. 从学生的“问题”出发审视空间向量内容的教学和育人价值[J]. 数学通报, 2022, 61(5): 20-22.
- [2] 葛丽婷, 郭玉峰, 郎春雨. 近十年高考立体几何试题直观想象素养考查研究: 表现及趋势[J]. 数学通报, 2021, 60(11): 41-49.
- [3] 张海营. 解题研究: 从“一题多解”到“多解归一”[J]. 中学数学教学参考, 2021(30): 50-51.
- [4] 程华. 从“一题多解”审思解题教学的思维培养[J]. 数学通报, 2020, 59(8): 50-54.
- [5] 马复. 试论数学理解的两种类型——从 R.斯根普的工作谈起[J]. 数学教育学报, 2001(3): 50-53.
- [6] 王燕荣, 韩龙淑, 屈俊. 基于启发式教学的数学思想教学设计——以“化归思想”为例[J]. 教学与管理, 2015(1): 57-59.
- [7] (美)波利亚. 怎样解题[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2007.