

GeoGebra环境下基于APOS理论的高中圆锥曲线概念教学设计研究

——以椭圆的概念为例

余蕊洁, 莫宏敏

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2026年9月14日; 录用日期: 2026年10月15日; 发布日期: 2026年10月21日

摘 要

圆锥曲线概念教学长期存在学生机械记忆定义与方程以及“重结论、轻过程”的问题。本文依据高中数学课程标准对信息技术与数学课程深度融合的要求,以APOS理论的活动、过程、对象、图式四阶段为框架,结合GeoGebra图形、代数多重表征实时联动的优势,研究圆锥曲线概念教学设计。首先梳理国内外相关研究,分析GGB与APOS理论融合的理论逻辑与实践逻辑,构建“操作体验、反思内化、对象抽象、图式整合”的教学流程;进而以椭圆概念为例设计教学案例,借助航天情境、数学史与Dandelion双球模型,引导学生在动态探究中自主归纳椭圆定义、推导标准方程并整合知识体系。研究表明,该设计有助于突破机械记忆弊端,深化学生对椭圆几何本质的理解,也为信息技术环境下圆锥曲线概念教学提供了参考。

关键词

GeoGebra, APOS理论, 圆锥曲线

Research on Teaching Design of High-School Conic Section Concept Based on APOS Theory in GeoGebra Environment

—A Case Study of the Concept of Ellipse

Ruijie Yu, Hongmin Mo

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: September 14, 2026; accepted: October 15, 2026; published: October 21, 2026

文章引用: 余蕊洁, 莫宏敏. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的高中圆锥曲线概念教学设计研究[J]. 教育进展, 2026, 16(10): 1458-1471. DOI: 10.12677/ae.2026.16102250

Abstract

Problems such as students' rote memorization of definitions and equations, alongside the phenomenon of "emphasizing conclusions while neglecting processes", have long existed in the teaching of conic section concepts. In accordance with the requirements of in-depth integration of information technology and mathematics curriculum specified in the General High-School Mathematics Curriculum Standards, this paper adopts the four-stage framework of APOS Theory, namely Action, Process, Object and Schema, and combines the strengths of GeoGebra in real-time linkage of multi-representations between graphics and algebra to investigate the teaching design for conic section concepts. Firstly, relevant domestic and international studies are reviewed, and the theoretical and practical logics underlying the integration of GeoGebra and APOS Theory are analyzed. A teaching procedure consisting of "operational experience, reflective internalization, object abstraction and schema integration" is constructed. Furthermore, a teaching case is designed taking the concept of ellipse as an example. With the aid of aerospace contexts, history of mathematics and Dandelion's two-sphere model, students are guided to induce the definition of ellipse independently, derive its standard equation and integrate knowledge systems through dynamic inquiry. The research indicates that the proposed teaching design helps to overcome the drawbacks of rote learning, deepen students' understanding of the geometric essence of ellipses, and provide references for conic-concept teaching under information-technology-enhanced environments.

Keywords

GeoGebra, APOS Theory, Conic Sections

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着《教育信息化 2.0 行动计划》[1]的全面推进与《普通高中数学课程标准（2017 年版 2025 年修订）》[2]对信息技术与数学课程深度融合的明确要求，借助动态软件优化概念教学已成为高中数学改革的重要方向。当前圆锥曲线教学普遍存在“重结论、轻过程”的问题，学生多停留在机械记忆定义与方程的层面，而传统教学手段难以有效解决。GeoGebra (以下简称 GGB)能够以可视化、交互性的方式呈现抽象概念的动态演变过程，而 APOS 理论则从活动、过程、对象、图式四个阶段系统展示了数学概念的认知建构路径。本文以 APOS 认知发展规律为核心，结合 GGB 的技术优点，遵循数学概念教学原则，分析理论逻辑。再依据 APOS 概念教学的四阶段探究 GGB 融合的实践逻辑，围绕活动阶段、过程阶段、对象阶段和图式阶段分析，给出概念教学流程图。最后依据 APOS 的四阶段教学模式以及 GGB 辅助教学，设计椭圆概念教学案例。旨在扩展数学概念的研究方向，为一线高中数学教师开展融合式概念教学提供参考。

2. 研究现状

2.1. GGB 环境下数学教学的国内外研究现状

2.1.1. 国外研究现状

GGB 由奥地利数学家马库斯·霍恩瓦特(Markus Hohenwarter) [3]于 2001 年研发，是一款免费开源的

动态数学软件。目前最早关于 GGB 的文献是 2007 年 Markus Hohenwarter 发表的, 该文章主要介绍了 GGB 的几个研究主题, 包括交互式教材软件的评价反馈等。对国外文献进行梳理, 可以发现 GGB 环境下数学教学的研究主要表现在三个方面。

基于 GGB 的数学课堂优化研究。例如 Liburd Kendale Kashiem Dario [4] 等人用态度量表和测试题对 35 名高中生进行对照实验, 发现使用 GGB 辅助教学比传统教学效果更好。

基于 GGB 的学生数学核心素养培育研究。例如 Ni Made Dwijayani [5] 以 30 名学生为样本, 采用定量研究的方法对其进行对照实验, 结果发现使用 GGB 辅助教学能提高学生在课堂上解决问题的能力。

GGB 与主要教学理论、模式结合的研究。例如 Gede Suweken [6] 将 GGB 与 STEM 结合, 发现通过 GGB 进行探索性的数学教学, 学生能够自主建构知识。

从研究脉络看, 国外相关研究多集中于中学几何、函数、三角与大学微积分等领域, 方法上普遍采用“准实验 + 问卷或访谈”的组合, 结果较一致地表明 GeoGebra 对学业成绩、学习态度、几何直观与问题解决能力具有正向影响; 但多数研究侧重于教学效果的比较, 对概念形成的认知机制以及某一认知理论的完整落实关注较少, 将 GGB 嵌入 APOS 等理论并针对圆锥曲线概念开展研究的成果仍不多见。

2.1.2. 国内研究现状

国内对 GGB 的研究起步稍晚, 2009 年底, 黄福坤与左台益教授及其团队将 GeoGebra3.2 版本教程译为中文, 广大中国数学教师与研究者才得以系统了解该软件。2010 年, 左晓明等发表《基于 GeoGebra 的数学教学全过程优化研究》, 较早将 GGB 与几何画板等传统教学软件进行比较, 指出 GGB 在几何与代数联动、开源免费、界面友好和动态开放性等方面具有明显优势, 并讨论了其优化数学教学全过程的可能性, 被视为国内 GGB 研究的发端之作。2011 年 5 月, 在曹一鸣教授的领导下, 中国 GGB 研究院正式成立。此后, 许多学者对此展开进一步研究。截至目前, GGB 的研究方向主要集中在三个方向:

一是关于 GGB 可行性与优势研究。例如, 2012 年, 张志勇[7]结合 GGB 软件特性并对比几何画板, 依据 APOS 理论设计高中数学教学案例, 提出六大教学原则, 得出 GGB 适配全学段数学教学、结合 APOS 理论开展教学可助力学生建构数学概念、推动数学课堂教学转型的结论。

二是关于 GGB 辅助数学教学设计研究。例如, 吴华与周鸣[8]于 2013 年以导数概念为案例, 结合 APOS 理论并借助 GGB 设计四阶段教学流程开展研究, 得出该模式可突破学生认知局限、提升中小学数学概念教学效果的结论。

三是关于 GGB 与不同教学理论结合的应用研究。例如, 张焕枝[9]以认知负荷理论为指导, 选取高中生开展问卷、访谈与对照实验, 探究 GGB 在高中立体几何教学的应用, 得出该软件可调控学生三类认知负荷、提升学习效率与几何水平, 同时给出软件融合教学相关原则与建议的结论。

综合国内文献可以看出, 研究大体经历了“软件引进与优势论证、具体内容的教学设计和教学理论与实证检验相结合”三个阶段, 研究对象覆盖函数、导数、立体几何、解析几何等主题, 研究类型兼有期刊论文与学位论文。不过, 多数成果仍以教学策略或单课例设计为主, 针对圆锥曲线概念教学、并以 APOS 四阶段完整统摄设计与实施的研究还比较薄弱。

2.2. APOS 理论下数学概念教学的国内外研究现状

2.2.1. 国外研究现状

20 世纪 80 年代, 美国数学教育家杜宾斯基(Ed Dubinsky)联合北美本科数学教育研究团队(RUMEC), 结合大量高等数学教学实践, 正式提出 APOS 理论模型。1991 年, 杜宾斯基在《高级数学思维》中系统阐释理论框架, 奠定了 APOS 理论在数学教育中的学术地位。自 APOS 理论提出以来, 许多学者对此展开进一步研究。

目前, 国外研究呈现两大趋势: 一是将单一概念变为综合图式与核心素养。例如 Arnawa I M [10] 团队基于 APOS 理论研究线性代数教学, 逐步完成对抽象线性代数概念的心理建构, 结果表明 APOS 理论方法能显著提升学生证明能力与概念理解深度。二是 APOS 理论与动态技术的深度融合。例如 Baye Mulat Gebeyehu [11] 等在 APOS 理论框架下开展极限教学研究, 通过 GGB 动态可视化工具搭建“活动-过程-对象-图式”的认知阶梯, 将抽象的语言转化为可交互的图形与数值变化, 研究结果发现能有效深化埃塞俄比亚大学生对极限概念的理解。

2.2.2. 国内研究现状

国内对 APOS 理论的研究始于 20 世纪 90 年代末, 2001 年起进入系统引介与本土化探索阶段, 核心围绕高中数学概念教学展开。乔连全[12]作为国内首次系统阐述 APOS 理论的学者, 在《APOS: 一种建构主义的数学学习理论》中明确 APOS 四阶段内涵、反思性抽象机制及国外应用案例, 奠定国内研究起点。

张奠宙、宋乃庆[13]在《数学教育概论》中将 APOS 纳入国内数学教育体系, 以“一元一次方程”为案例, 提出图式阶段即“概型阶段”的本土化表述, 强化理论与课标衔接。戚艳兴[14]将 APOS 理论与数学核心素养相融合, 发现不仅能测试数学教师的教学内容及方案设计是否合理, 还能掌握学生对知识点的理解状况, 从而教师能根据结果进行针对性的调整。濮安山、史宁中[15]以高中函数概念为例, 依据 APOS 理论制作测评工具, 发现多数高中生对函数概念的建构仅停留在活动与过程阶段, 无法顺利对概念进行迁移。林梅、余泉[16]则以对数函数为例构建“四阶段八步”GGB 融合教学模型, 通过操作 GGB 强化学生对概念理解的深度。

总的来说, 国内学者对 APOS 理论的研究主要分为四类。第一类: APOS 理论融入教学设计与模式构建。第二类: APOS 理论与信息技术融合研究。第三类: 利用 APOS 理论进行学生认知诊断。第四类: APOS 理论与其他教学理念、理论的交叉整合。

2.3. 数学概念教学的研究现状

在新课标的要求下, 许多学者改变传统教学模式, 尝试探索新方法。目前主要的概念教学模式有: 概念同化、概念形成、APOS 四阶段等。大部分教师习惯使用概念同化, 因为这种方法过程比较简单, 也是学生获取概念的基本方法。章颖和章肖[17]指出, 数学概念的教学需要经历: 概念的引入, 揭示概念的本质属性以及概念的练习和应用这三个部分。也有教师尝试新方法, 例如陈惠勇[18]在《数学史观下的数学概念教学新模式》中提出在数学史的观点下融入 APOS 理论进行教学。在学习策略方面, Frank W. Mitchell [19]曾就“教学”概念的分析提出建议, Rudy H. Liveritte [20]则对“教学”与“学习”概念的教育研究进行了分析, 为概念教学研究提供了教育学视角的参照。

综上所述, 数学概念研究比较成熟, 但是将信息技术融入概念教学的研究比较少, 有待深入研究。

3. GGB 融入 APOS 理论教学的逻辑分析

GGB 动态数学软件与 APOS 理论教学的深度融合, 存在一套完整、分层的融合运行逻辑。本章将从理论逻辑、实践逻辑两大板块逐层剖析, 其中, 理论逻辑旨在依据 APOS 活动、过程、对象、图式四阶段, 从认知规律与软件技术特质层面, 论证二者适配性, 解释融合教学的学理支撑; 实践逻辑则立足高中课堂, 探讨在真实课堂情境中, 如何将这种理论上的契合转化为可操作的教学路径与行为准则。

3.1. GGB 融入 APOS 理论教学的理论逻辑

3.1.1. 活动阶段

活动阶段是概念建构的起点, 指的是通过亲身动手操作和外部实践, 来积累对概念最直观的感性经

验。其核心是依据外部动手操作形成具体感知, 为后续抽象概念积累素材。传统圆锥曲线课堂仅依靠板书和纸质作图, 动点轨迹、距离约束等条件无法动态演示, 学生缺少可自主探究的载体, 只能被动接收定义, 违背建构主义“做中学”的基本要求。

从多元表征理论视角看, GGB 可同步生成动点、定点、线段长度数值、轨迹草图多重可视化元素, 学生能够自主拖动动点、调整定点位置、修改距离参数, 实时观测图形与数值同步变化。这种可交互操作将抽象的文字转化为动态的、可操控的具象活动, 适配 APOS 活动阶段对外部操作行为的要求。

3.1.2. 过程阶段

过程阶段是将外部的操作步骤内化并反思, 使之成为头脑中可自主运行的心理程序。其核心是脱离外部实物操作, 在大脑中反复回顾活动流程, 提炼不变的等量约束关系, 完成操作经验的反思与内化, 形成稳定的内部思维程序。学生不再依赖具体的数字或外部指令, 而是能在脑海中构想整个操作流程, 并能预测结果。

在 GGB 中拖动动点, 两定点距离、动点到定点距离之和差、轨迹曲线、对应代数关系式可以同步刷新。学生无需手动计算、描点, 可快速对比多组参数下不变的等量关系, 自主归纳圆锥曲线的特点。学生能够脱离具体数值, 将自变量视为一个“变量符号”来运行程序。GGB 将零散、重复的外部操作简化为连贯的动态变化过程, 降低学生反思概括的认知负荷, 加速外部活动向内部思维程序转化。

3.1.3. 对象阶段

对象阶段是将动态的过程压缩封装为一个静态、完整的实体, 使其能被赋予定义并参与高阶运算。其核心认知任务是将内化完整的思维过程压缩为独立、可研究的数学对象, 能够对轨迹图形进行拆分、变换、性质探究、代数转化等运算操作。传统教学中曲线轨迹依赖作图, 学生难以将椭圆、双曲线、抛物线视作独立研究实体, 容易混淆概念。

GGB 可以让概念变得形式化与符号化。学生能够赋予概念一个准确的数学定义并能对这个对象施加新的、高阶的操作。从认知建构角度来看, GGB 可以让学生从多角度认识理解数学概念, 有助于学生生成概念意象。

3.1.4. 图式阶段

图式阶段是将新概念与已有知识纵横联结, 整合成一个能灵活调用、自我调节的完整认知网络。单独分课时讲解椭圆、双曲线、抛物线时, 学生容易混淆三类曲线的约束条件与图像特征, 难以建立统一的圆锥曲线认知框架。

GGB 支持多窗口、多轨迹同步展示, 可在同一界面分别生成椭圆、双曲线、抛物线的动态生成过程, 同步对比三者定点数量、距离约束、图像形态、参数变化带来的图形改变。借助统一可视化平台, 学生能够横向辨析三类曲线的异同, 整合分散知识点, 构建完整的圆锥曲线认知图式。GGB 环境下基于 APOS 理论的概念教学四阶段可以用图 1 流程来表示。

3.2. GGB 融入 APOS 理论教学的实践逻辑

3.2.1. 搭建操作情景, 积累直观经验

APOS 理论的活动阶段是学生建构数学概念的起点, 核心依赖外部动手操作形成感性认知。传统圆锥曲线教学仅依靠静态板书、纸质草图, 无法动态展示轨迹生成过程, 学生缺少自主操作载体, 只能被动接收定义, 难以形成直观感受。

GGB 具备动点拖拽、轨迹追踪、滑动条调节、长度数值实时显示等交互功能, 能够搭建沉浸式动态几何操作场景, 为活动阶段提供探究支撑。教师提前制作预设模板, 设置可移动定点、可变参数、实时

更新的距离数据, 让学生亲手拖动动点、调整焦点间距、修改距离定值, 自主观察图形随参数改变产生的形态变化, 在反复实操中积累曲线生成的直观素材。

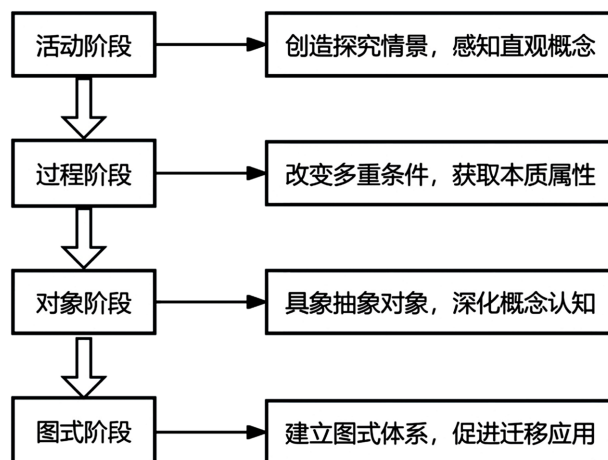


Figure 1. Concept teaching process based on APOS theory in GeoGebra environment

图 1. GGB 环境下基于 APOS 理论的概念教学过程

3.2.2. 自由探索过程, 加速思维内化

APOS 过程阶段要求学生脱离外部实物操作, 将动手操作的经验内化、反思, 在大脑中形成稳定的心理思维程序。传统课堂学生手动描点计算工作量大, 难以快速对比多组实验现象, 不利于提炼不变规律。

在 GGB 中, 学生可不受纸笔限制自由开展多组对照探索, 仅拖动滑动条就能批量更换参数, 软件同步联动图形、数值、代数表达式, 快速呈现多组实验结果, 大幅降低重复操作带来的认知负担。学生在自主对比、观察动态变化的过程中, 自主脱离无关变量, 捕捉恒定不变的几何等量关系, 逐步脱离具象工具, 在脑海中复现轨迹生成全过程, 完成外部操作向内部思维程序的转化, 加速概念内化。

3.2.3. 具象抽象对象, 深化概念认知

APOS 对象阶段的核心任务是将动态的生成过程压缩封装为独立、完整的数学实体, 使学生能够对曲线开展性质探究、代数转化、图形变换等高阶研究。传统教学割裂几何图像与代数方程, 学生容易将轨迹运动和曲线本身割裂, 无法把圆锥曲线视作独立研究对象。

GGB 实现几何图形、数值、代数方程三重表征同步联动, 在学生内化生成规律后, 一键呈现曲线标准方程, 将动态运动过程转化为标准化数学对象; 同时软件内置作图、变换、计算工具, 支持对曲线进行平移、伸缩、作切线、计算距离等操作, 引导学生从“观察动点运动”转向“研究曲线本身”, 提炼定义、几何特征与方程规律, 完成从过程到对象的认知升级, 深化对概念本质的理解。

3.2.4. 整合知识体系, 生成图式概念

APOS 图式阶段强调整合新概念与已有知识, 构建相互关联、可灵活调用的结构化认知网络, 实现知识综合迁移。分课时单独讲解椭圆、双曲线、抛物线时, 学生易混淆三类曲线的约束条件与图像特征, 难以建立统一的圆锥曲线知识框架。

GGB 支持多窗口分栏同步展示三类曲线动态模型, 共用一套参数调节滑动条, 拖动参数时椭圆、双曲线、抛物线同步变化, 便于学生横向对比三者定点数量、距离约束、图像形态、方程形式的异同; 同时可叠加直线、定点、动圆等元素, 搭建轨迹、最值、定点定值等综合题型探究场景, 串联直线、圆、函数等旧知, 将分散的单一概念整合为完整的圆锥曲线知识体系, 帮助学生灵活调用相关知识解决综合问题,

实现知识迁移拓展。

4. GGB 环境下基于 APOS 理论的高中椭圆概念教学设计

4.1. 整体思想

APOS 理论将数学概念教学分成了活动、过程、对象以及图式四个阶段。教师以中国航天背景和古希腊历史引入椭圆，利用 GGB 演示 Dandelion 球，学生能直观了解椭圆的由来，初步感知椭圆。再由教师一系列的提问，学生逐步深入学习椭圆的特征、定义以及标准方程。GGB 的融入，丰富了教学课堂，激发学生自主探究的内在动力，避免传统教学中直接抛出定义、死记硬背标准方程的灌输式弊端，帮助学生真正掌握椭圆的几何本质，为后续双曲线、抛物线的概念学习搭建可迁移的探究方法框架。

4.2. 教学流程

教学流程可见图 2。

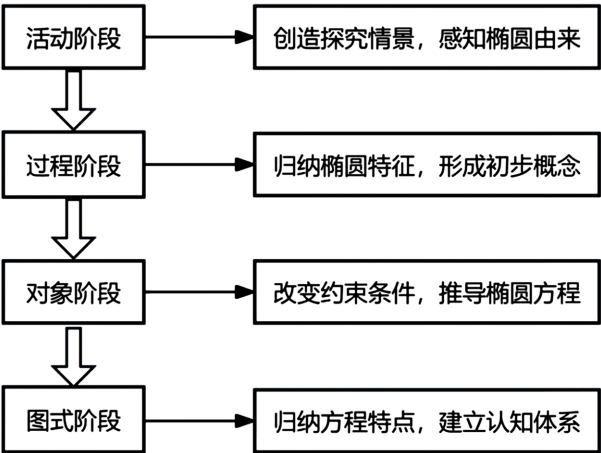


Figure 2. Instructional design diagram
图 2. 教学设计图

4.3. 教学过程

1) 活动阶段：创设情境，引入新知(10 分钟)

情境 1：教师播放神舟飞船发射视频，并询问飞船执行任务所成轨迹(见图 3)是什么图形？



Figure 3. Trajectory diagram of Shenzhou spacecraft
图 3. 神舟飞船轨迹图

情境 2：教师问生活中有哪些椭圆(见图 4)？举例说明并提问是否为标准椭圆。

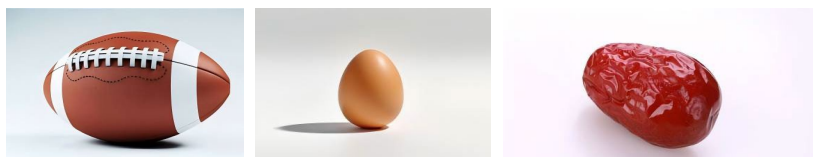


Figure 4. Ellipses in daily life

图 4. 生活中的椭圆

情境 3: 古希腊时期, 阿波罗尼奥斯利用一个平面去截两个对顶的圆锥, 通过改变平面的角度, 从而得到几种不同的曲线。教师用 GGB 展示利用不同倾斜度的平面去截图的情境, 得到椭圆, 双曲线和抛物线(见图 5)。

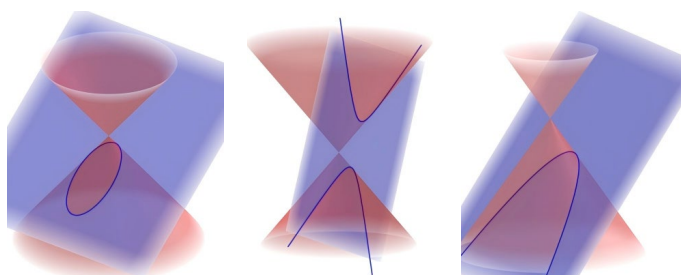


Figure 5. Plane cutting a double cone

图 5. 平面截对顶圆锥

【设计意图】根据航天时事、生活实例与经典数学史三个不同维度的情境, 从熟悉的航天工程实例切入, 引发学生的探究兴趣, 让学生感受到圆锥曲线在现实科技中的应用价值; 从生活中的椭圆出发, 可以联结学生的日常感知, 同时借助“是否为标准椭圆”的提问引发认知冲突, 为后续探究标准椭圆的几何本质铺垫; 借助古希腊截圆锥的经典情境, 能够还原圆锥曲线名称的本源, 帮助学生建立对三类圆锥曲线的整体初步印象。三个情境从现实到历史、从生活到数学逐步递进, 自然引出本节课核心研究对象, 为后续动手探究椭圆概念做好情境铺垫。

2) 过程阶段: 探究新知, 深入定义(15 分钟)

探究 1: 教师展示 Dandelion 球(见图 6), 并显示平面与两个球的截面所交点 F_1 和 F_2 , 在椭圆上任取一点 P , 连接 PF_1 , PF_2 。

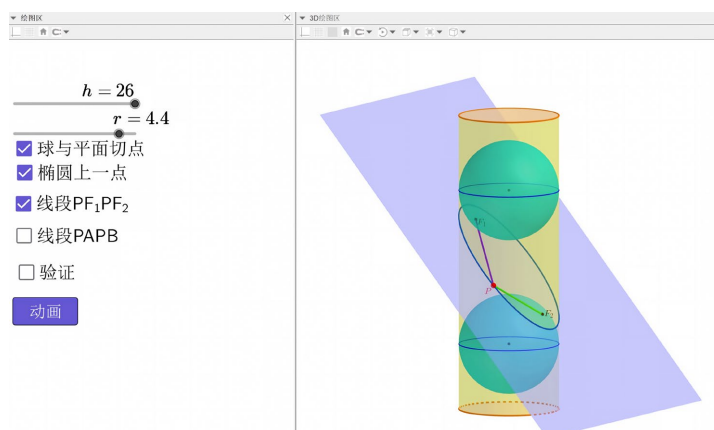


Figure 6. Dandelion two-sphere model (1)

图 6. Dandelion 双球模型(1)

问题 1: $|PF_1 + PF_2|$ 是定值吗?

问题 2: 如何证明 $|PF_1 + PF_2|$ 是定值?

教师给出提示, 过 P 点做出圆锥母线, 交两球于 A 点和 B 点, 连接 PA 和 PB

问题 3: PF_1 、 PF_2 、 PA 和 PB 之间有什么关系?

拖动 P 点(见 图 7), 学生观察可知, 利用圆的切线长定理, 可知 $|PA| = |PF_1|$, $|PB| = |PF_2|$, 那么 $|PF_1| + |PF_2| = |PA| + |PB| = |AB|$ 。

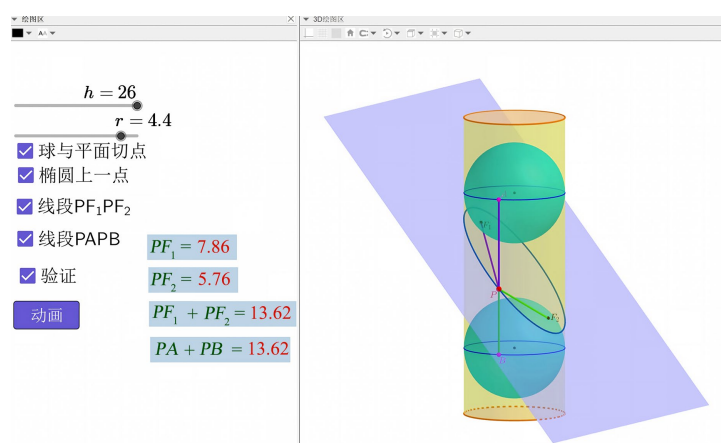


Figure 7. Dandelion two-sphere model (2)

图 7. Dandelion 双球模型(2)

【设计意图】

借助 GGB 拖动点 P 在椭圆上自由移动, 可直观呈现 PF_1 、 PF_2 长度随 P 位置变化而变化, 但 $PF_1 + PF_2$ 始终保持不变, 让学生在动态观测中率先形成对定值关系的直观感知, 再结合切线长定理完成逻辑推证, 兼顾了直观感知与理性证明, 提取出椭圆最核心的几何约束条件, 在信息技术帮助下完成从具体操作活动到内部思维认知的转化。

探究 2: 利用 GGB 在三维中展示 Dandelion 球模型, 学生很容易感知椭圆上的点到定点 F_1 、 F_2 的距离和为定值。接下来将在平面内继续探究椭圆定值问题。教师用 GGB 展示椭圆绘制过程, 学生以小组为单位, 利用绳子画椭圆(见 图 8), 并上台展示。可以发现移动的笔尖(动点)到两个定点的距离和等于绳长(定值), 并且由三角形三边关系可以得到绳长大于两定点之间的距离, 也就是 $|PF_1| + |PF_2| > |F_1F_2|$ 。

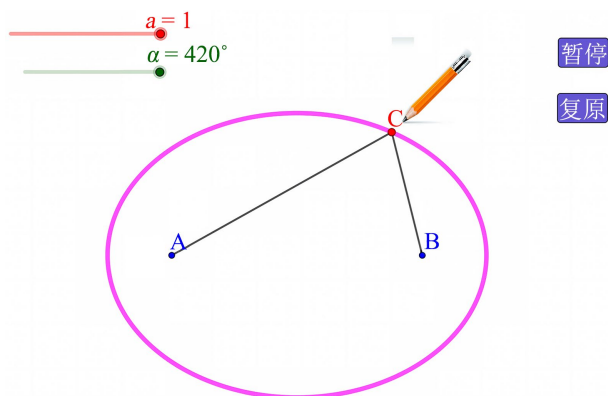


Figure 8. Explanation of the first definition of an ellipse

图 8. 椭圆第一定义说明

思考 1: 如果绳长等于 $|F_1F_2|$, 动点 P 的轨迹还是椭圆吗?

当绳长等于 $|F_1F_2|$, 动点 P 的轨迹是线段 F_1F_2 。

思考 2: 如果绳长小于 $|F_1F_2|$, 动点 P 的轨迹还是椭圆吗?

当绳长小于 $|F_1F_2|$, 动点 P 的轨迹不存在。

思考 3: 我们能否给椭圆下一个定义?

我们把平面内与两个定点 F_1F_2 的距离的和等于常数 $2a$ (大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做椭圆。其中, 两个定点 F_1F_2 叫做椭圆的焦点, 两焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 叫作焦距, 用 $2c$ 表示。

【设计意图】

从三维转向二维, 通过对绳长与两定点间距三种大小关系的分类讨论, 帮助学生完整厘清椭圆定义中的约束条件, 在小组合作探究中逐步完成外部操作到内部认知的转化, 深化对椭圆定义核心本质的理解, 为后续推导椭圆标准方程、探究椭圆性质奠定基础。

3) 对象阶段: 推导方程, 巩固知识(10 分钟)

探究 3: 遵循圆锥曲线的研究思路, 学习完定义后, 我们要继续推导标准方程。

思考 4: 请同学们回顾求曲线方程的步骤。

第一步(建系): 根据曲线的几何特征建立适当的坐标系。

第二步(设点): 写出曲线上点的坐标。

第三步(列式): 列出有限制关系的几何等式。

第四步(代换): 将轨迹所满足的条件用含 x 、 y 的代数式表示。

第五步(化简): 化简并检验方程。

思考 5: 椭圆有几条对称轴? 几个对称中心?

类比圆的标准方程推导过程, 我们以 F_1F_2 的中点为圆心, 直线 F_1F_2 为 x 轴, 中垂线为 y 轴, 设 $M(x, y)$ 为椭圆上的任意一点(见 图 9), 设焦距为 $2c$ ($c > 0$), 则 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 。动点 M 满足的约束条件是 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, 坐标化为: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ 。

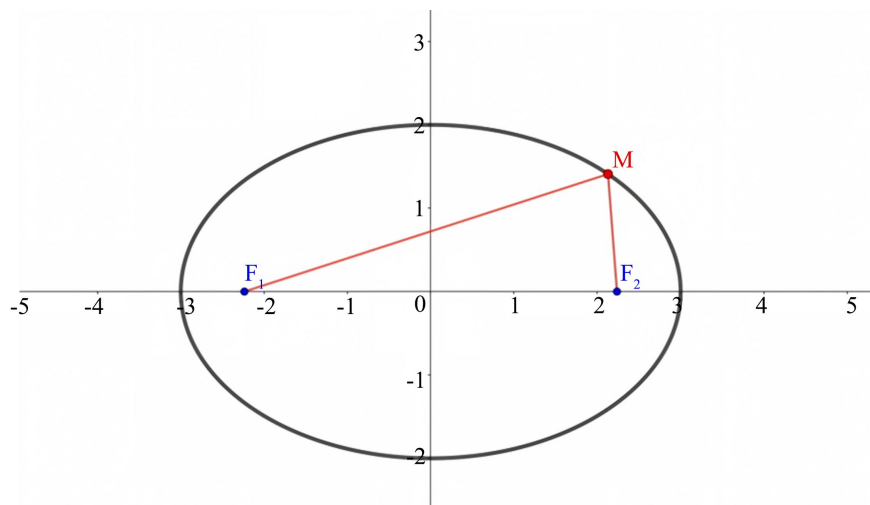


Figure 9. Ellipse

图 9. 椭圆

再利用 GGB 对等式进行化简(见 图 10)。

1	$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ $\rightarrow \sqrt{y^2+(c+x)^2} + \sqrt{y^2+(-c+x)^2} = 2a$
2	$\sqrt{y^2+(c+x)^2} = 2a - \sqrt{y^2+(-c+x)^2}$ $\rightarrow \sqrt{y^2+(c+x)^2} = 2a - \sqrt{y^2+(-c+x)^2}$
3	$y^2 + (c+x)^2 = \left(2a - \sqrt{y^2+(-c+x)^2}\right)^2$
4	展开(\$3\$) $\rightarrow c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2}a + c^2 - 2cx + x^2 + y^2$
5	$\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2}a = a^2 - cx$ $\rightarrow a\sqrt{c^2 + x^2 + y^2 - 2cx} = a^2 - cx$
6	$a^2(c^2 + x^2 + y^2 - 2cx) = (a^2 - cx)^2$
7	$a^2(c^2 + x^2 + y^2 - 2cx) = (a^2 - cx)^2$ 展开: $a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
8	$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ $\rightarrow a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$

Figure 10. Simplification of the elliptic equation

图 10. 椭圆方程的化简

化简可得: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, 令 $a^2 - c^2 = b^2$, 得出椭圆的标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

教师展示椭圆, 拖动滑动条改变 a 和 b 的值, 观察焦点变化, 可以得出焦点在 y 轴上的标准方程为:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ (见图 11)}.$$

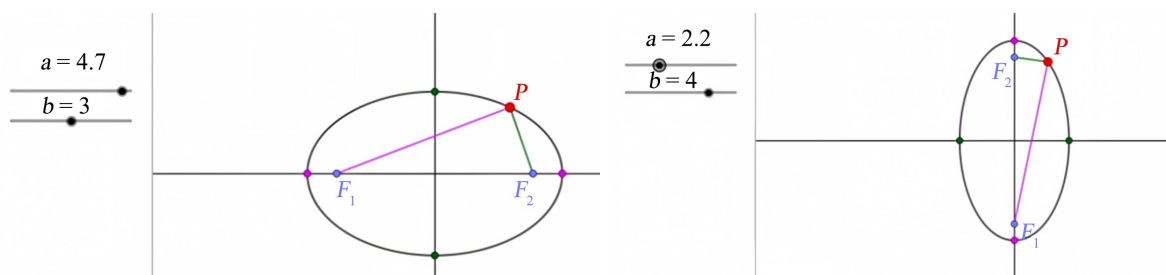


Figure 11. Comparison of ellipses with different focal positions

图 11. 焦点位置不同的椭圆对比

问题 4: 为什么 $a > b > 0$?

学生指出 $a^2 = c^2 + b^2$, 因此 $a > b$, 并且当椭圆上的动点运动到 y 轴正半轴时, 此时 $OF_2 = c$, 由

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 可知 $PF_2 = a$, 由 $a^2 - c^2 = b^2$ 得 $OP = b$, 即 $a > b > 0$ 。在椭圆中 a 最大, b 和 c 不分大小

问题 5: 如何判断焦点在哪个轴上?

学生例举 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$, 因为 $a^2 > b^2$, 所以当焦点在 x 轴上的时候, x^2 下面的常数要大于 y^2 下面的常数。因此 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点在 x 轴, $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 的焦点在 y 轴。

【设计意图】

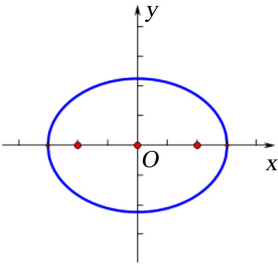
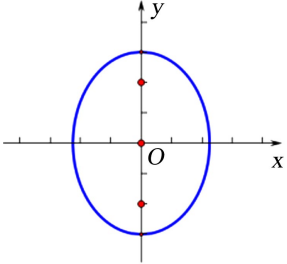
教师依据 GGB 的动态代数化简功能, 将原本烦琐易错的根式化简过程分步直观呈现, 帮助学生清晰观察每一步变形的依据与结果, 学生能够从定义出发, 化简得出标准方程, 深化对椭圆概念本质的理解。GGB 的合理运用, 节省了课堂的繁杂计算时间, 提高课堂效率。

4) 图式阶段: 对比综合, 整合应用(10 分钟)

用表格整理两种椭圆方程(见表 1):

Table 1. Comparison between two types of elliptic equations

表 1. 两种椭圆方程对比

图像		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
交点坐标	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
a, b, c 关系	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$

教师设计基础题、变式题两层练习, 通过 GGB 课件展示, 学生独立解答后, 教师进行讲解和验证:

基础题: 已知椭圆的两个焦点为 $(-2, 0), (2, 0)$, 并且经过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$, 求它的标准方程。

变式题: 椭圆中心在原点, 焦点在坐标轴上, 焦距为 4, 且经过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$, 求椭圆的标准方程。

探究题: 学校要在操场旁建一个椭圆形花坛, 设计图上它的长轴长为 10 m、短轴长为 8 m。施工时, 师傅先确定两个焦点并钉桩, 再用一根长 10 m 的绳子绷紧绕桩, 画出花坛的轮廓。

1) 建立适当的平面直角坐标系, 求两个焦点的坐标和轮廓所在椭圆的标准方程。

2) 在 GGB 中画出这个椭圆, 拖动动点验证: 轮廓上任意一点到两个焦点的距离之和是否恒等于绳长? 如果把绳长依次改为 8 m 和 6 m, 画出的图形分别是什么?

3) 若把这个花坛按长轴沿 y 轴的方向摆放, 标准方程会发生什么变化? 请对照表 1 说明判断焦点位置的依据。

【设计意图】

通过分层设置不同难度的练习, 由浅入深帮助学生逐步掌握椭圆定义与标准方程的核心知识: 基础

题聚焦焦点位置确定的常规计算, 强化学生对标准方程基本求解思路的掌握; 变式题增加焦点位置不确定的讨论环节, 引导学生养成分类讨论的思维习惯; 探究题结合真实的校园工程情境, 将抽象的椭圆知识回归现实应用, 既呼应了本节课开篇的航天情境设计, 又能让学生在动手操作、计算验证的过程中, 进一步深化对椭圆定义中“定值”约束条件的理解, 同时明晰坐标系建立方式不同对椭圆标准方程形式的影响, 巩固判断焦点位置的方法。三层练习整合了定义、方程、几何性质的核心知识, 帮助学生将碎片化的认知串联成完整的知识网络, 完成对椭圆知识从概念理解到应用转化的认知升级, 落实本节课的知识与技能目标。

4.4. 教学评价

过程性: 以课堂观察和即时反馈为主, 评价贯穿活动、过程、对象三个阶段。教师记录学生拖动动点、调节参数、记录数据的行为, 关注其操作的主动性与规范性; 借助提问与小组汇报, 判断学生能否用数学语言描述“点到两焦点的距离之和不变”这一现象, 能否在由定义推导方程的过程中说明每一步的依据。评价的重点不在结论对错, 而在学生是否真正经历了“操作-反思-抽象”的过程, 教师据此即时调整提问的梯度与等待时间, 为不同层次的学生提供脚手架。

结果性: 以基础题、变式题和探究题三层练习为载体。基础题检测学生对焦点坐标与标准方程的直接运用; 变式题检测焦点位置不确定时分类讨论的严谨性; 花坛施工放线的探究题检测学生在真实情境中建模、求解并用 GGB 验证的能力。教师依据作答情况判断学生对定义、方程以及 a, b, c 关系的掌握程度, 并借助 GGB 的动态演示对典型错误当场辨析, 使评价结果直接反馈到讲评与后续教学中。

反思性: 指向学生对自己认知过程的回顾。课末, 学生用表格或概念图梳理椭圆与圆、直线、函数等已有知识的联系, 说明椭圆在圆锥曲线知识体系中的位置; 结合探究题中绳长改变引起轨迹变化的讨论, 反思椭圆定义中为什么必须强调绳长大于两焦点之间的距离。教师则反思 GGB 的介入时机是否恰当、探究任务的难度是否适切, 并把反思结果用于下一轮教学设计。

5. 总结与展望

本研究依据新课标对信息技术与数学课程深度融合的要求, 针对圆锥曲线概念教学“重结论、轻生成”的问题, 以 APOS 理论的活动、过程、对象、图式四阶段为框架, 结合 GGB 在多表征实时联动方面的优势, 构建了“操作体验、反思内化、对象抽象、图式整合”的教学流程, 并以椭圆概念为例完成课例设计, 为双曲线、抛物线的概念教学提供了可迁移的思路。

研究仍有不足。其一, 本研究以理论分析与课例设计为主, 尚未进入课堂开展实证检验, 设计对学习效果的实际影响还缺少数据支撑; 其二, 案例只涉及椭圆概念, 结论向其他圆锥曲线内容推广时需要进一步验证; 其三, 设计效果依赖 GGB 设备条件与教师的信息技术素养, 在不同学校条件下的适应性有待考察。

后续研究可结合真实课堂开展准实验或行动研究, 收集学业成绩、课堂观察与访谈等多方面证据, 检验并修正该教学流程; 同时把课例拓展至双曲线与抛物线, 比较不同内容中 GGB 支持作用的差异, 形成较为完整的圆锥曲线概念教学设计体系。

致 谢

感谢莫宏敏老师对本篇论文的指导和帮助。

基金项目

吉首大学研究生校级科研项目(Jdy26011)。

参考文献

- [1] 教育部关于印发《教育信息化 2.0 行动计划》的通知[J]. 中华人民共和国教育部公报, 2018(4): 118-125.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2025 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2025.
- [3] Hohenwarter, M. (2007) GeoGebra—Didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, **28**, 76-77. <https://doi.org/10.1007/bf03339335>
- [4] Liburd, K.K.D. and Jen, H. (2021) Investigating the Effectiveness of Using a Technological Approach on Students' Achievement in Mathematics—Case Study of a High School in a Caribbean Country. *Sustainability*, **13**, Article 5586. <https://doi.org/10.3390/su13105586>
- [5] Dwijayani, N.M. (2020) Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Mahasiswa dengan Menggunakan Geogebra. *Jurnal Pendidikan Matematika*, **11**, 110. <https://doi.org/10.36709/jpm.v11i1.10045>
- [6] Suweken, G. (2020) STEM Oriented Mathematics Learning with Geogebra. *Proceedings of the 3rd International Conference on Innovative Research Across Disciplines (ICIRAD 2019)*, Bali, 20-21 September 2019, 258-263. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.200115.042>
- [7] 张志勇. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的数学教学研究[C]//全国数学教育研究会. 全国数学教育研究会 2012 年国际学术年会论文集. 常州: 江苏省常州市第五中学, 2012: 1225-1246.
- [8] 吴华, 周鸣. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的数学概念教学研究——以导数概念为例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(2): 87-90.
- [9] 张焕枝. GeoGebra 软件环境下认知负荷理论在高中数学教学中的实践研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2022.
- [10] Arnawa, I.M., Yanita, Ginting, B., Yerizon, and Nita, S. (2020) Improvement a Positive Attitude Towards Abstract Algebra through APOS Theory Approach. *Journal of Physics: Conference Series*, **1503**, Article 012008. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1503/1/012008>
- [11] Baye, M.G., Ayele, M.A. and Wondimunch, T.E. (2021) Implementing GeoGebra Integrated with Multi-Teaching Approaches Guided by the APOS Theory to Enhance Students' Conceptual Understanding of Limit in Ethiopian Universities. *Heliyon*, **7**, e07012. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e07012>
- [12] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001(3): 16-18.
- [13] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 100-125.
- [14] 戚艳兴. 基于核心素养与 APOS 理论的高中生函数的概念学习进阶研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2020.
- [15] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007(2): 48-50.
- [16] 林梅, 余泉. 基于 APOS 理论的“四阶段八步”概念教学设计——以“对数函数”为例[J]. 数学教学研究, 2023, 42(2): 15-19+54.
- [17] 章颖, 章肖. 小学数学概念教学的意蕴指向与实践路径——基于经验改造的视角[J]. 上海教育科研, 2024(2): 62-66+72.
- [18] 陈惠勇. 数学史观下的数学概念教学新模式[J]. 高等数学研究, 2007, 10(5): 58-62.
- [19] Mitchell, F.W. (1966) Some Notes on the Concept of Teaching. *Journal of Teacher Education*, **17**, 162-171. <https://doi.org/10.1177/002248716601700206>
- [20] Liveritte, R.H. (1976) Educational Research and the Concepts of Teaching and Learning. *Studies in Philosophy and Education*, **9**, 230-275. <https://doi.org/10.1007/bf00367792>