

面向材料专业的概率统计课程 案例教学设计

——以陶瓷材料强度数据的两个教学实例为例

杨萱铃

北京化工大学数理学院, 北京

收稿日期: 2026年9月20日; 录用日期: 2026年10月17日; 发布日期: 2026年10月23日

摘 要

概率论与数理统计作为公共数学课程面向不同专业授课时, 通用例题虽便于说明定义和计算方法, 却难以充分呈现课程内容与后续专业学习的联系。本文以材料专业学生为对象, 选取美国国家标准与技术研究院公开的陶瓷强度数据, 设计两个连续教学实例。实例一将单件陶瓷强度视为连续型随机变量, 在正态模型下完成事件表达、标准化和质量阈值概率计算; 实例二继续使用同一数据中的两个材料批次, 通过两独立正态总体均值检验和置信区间分析批次平均强度差异。两个实例把正态分布、参数估计和假设检验依次置于同一材料质量问题中, 形成由个体概率到总体推断的递进关系。教学借鉴基于问题的学习理念, 先由小组讨论提出分析思路, 再结合案例学习与Excel数据分析, 形成对材料强度表现的综合判断。该设计重在保持数据情境连续, 使学生理解概率模型与统计推断的不同作用, 并明确模型假设与结论边界。

关键词

概率论与数理统计, 材料专业, 案例教学, 正态分布, 假设检验

Case Teaching Design of Probability and Statistics for Materials Majors

—Taking Two Teaching Examples of Ceramic Material Strength Data as Examples

Xuanling Yang

School of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: September 20, 2026; accepted: October 17, 2026; published: October 23, 2026

Abstract

When probability and statistics is taught as a public mathematics course across different majors, generic examples can explain definitions and calculations but often fail to show how the methods connect with subsequent disciplinary study. Focusing on materials majors, this paper develops two linked teaching examples using an open ceramic-strength data set from the National Institute of Standards and Technology. The first models the strength of an individual specimen as a continuous random variable and uses a normal model, event notation, and standardization to calculate the probability of meeting a quality threshold. The second continues with two material batches from the same data set and uses a two-sample t test and a confidence interval to analyze their mean-strength difference. Placing the normal distribution, parameter estimation, and hypothesis testing in one materials-quality context creates a progression from individual probability to population inference. Drawing on problem-based learning, students first discuss possible approaches in groups, then use case-based learning and Excel analysis to assess the strength performance of the two batches. The design emphasizes continuity of context, the distinct roles of probability modeling and statistical inference, and the limits imposed by model assumptions.

Keywords

Probability Theory and Mathematical Statistics, Materials Majors, Case Teaching, Normal Distribution, Hypothesis Testing

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为面向多个工科专业开设的公共数学基础课，概率论与数理统计既要讲清概念和方法，也应帮助学生理解这些知识的专业用途。摸球、掷骰子等经典例题便于引入定义，但情境与专业学习距离较远，学生完成公式计算后，仍可能不清楚所学方法可以解决什么专业问题。本文以材料专业为对象。材料强度具有随机性：单件试样是否达到技术下限属于概率问题，两个生产批次的平均强度是否存在总体差异则属于统计推断问题。两个问题对应课程的不同任务，又共享材料质量这一专业背景，因而可以组织为一组连续案例。

已有研究从课程内容整合和案例设计等方面探索概率统计与专业学习的衔接[1]-[4]；面向工科教学的研究还强调结合专业需求培养数据分析与应用能力[5][6]。这些工作为专业案例进入公共数学课堂提供了思路。在此基础上，本文进一步关注一个具体的教学组织问题：能否利用同一份真实材料数据，把个体风险计算与总体差异推断连接起来，避免学生把正态分布、参数估计和假设检验理解为彼此独立的计算程序。

基于这一考虑，本文选取美国国家标准与技术研究院(NIST)公开的陶瓷强度案例数据，构造“单件强度达标”和“两个材料批次平均强度比较”两个教学实例。前者由样本信息建立正态工作模型并计算质量风险，后者继续使用同一数据中的两个批次完成均值差异检验和区间估计。两个实例以同一数据为基础，由单件产品的概率问题逐步转向批次总体的统计推断。本文将讨论具体的教学设计、计算结果及评价方案。

2. 课程知识与案例结构

2.1. 问题设置与知识衔接

本设计借鉴基于问题的学习(Problem-Based Learning, PBL)理念，在介绍陶瓷强度数据时提出共同任务：“评价两个批次的强度表现，仅比较平均强度是否足够？还需要考虑哪些方面？”各组先提出初步判断，列出需要的数据和待解决的问题。教师结合讨论，引导学生将任务聚焦于单件试样能否达标及两个批次的总体平均强度是否不同，再分别引入相应方法。涉及的课程知识和学习任务见表 1，教师还可从概率统计实验与应用案例教材中选取补充练习[7]。

Table 1. Correspondence between course knowledge points and case tasks

表 1. 课程知识点与案例任务的对应关系

实例	课程模块	核心知识点	案例中的学习任务
实例一	随机事件与概率	事件、频率与概率	写出所要求事件并区分观测频率与模型概率
	随机变量及其分布	连续型随机变量、正态分布	建立单件陶瓷强度模型并完成标准化计算
实例二	参数估计	总体参数、点估计、区间估计	由两个批次样本估计总体平均强度及其差异范围
	假设检验	原假设、统计量、 P 值	检验两个材料批次的总体平均强度是否相同

围绕上述任务，实例一从单件试样出发，将达标要求转化为随机事件，并在正态模型下计算合格概率；实例二转向批次总体，判断样本均值差异能否仅由随机抽样波动解释。两个实例分别回应质量评价中的不同问题，使学生在同一数据情境中区分个体事件与总体参数，理解概率计算和统计推断各自的作用。

2.2. 数据来源与教学化处理

本文数据来自美国国家标准与技术研究院电子统计手册中的“Ceramic Strength”案例。该研究包含实验室、材料批次、加工速度、砂轮粒度和加工方向等变量。本文采用其中的纵向试样子集，共有 480 个强度观测，两个材料批次各 240 件，样本信息见表 2。两个实例始终使用这 480 个观测及其批次标识。

Table 2. Sample information for two material batches in the NIST ceramic strength data

表 2. NIST 陶瓷强度数据中两个材料批次的样本信息

材料批次	样本量	样本均值	样本标准差
批次 1	240	688.999	65.549
批次 2	240	611.156	61.854

课堂数据表仅保留试样编号、材料批次和强度三列，其他加工条件保存在数据说明中。实例一把样本均值和样本标准差作为正态工作模型的参数估计；实例二使用两个批次的样本量、样本均值和样本方差构造检验统计量。数据字段的简化降低了整理负担，但两个实例均保留原始强度观测及批次信息，使前后计算可以相互核对。明确这一数据处理方式后，课堂即可从单件试样的质量风险进入第一个实例。

3. 教学实例一：正态分布与单件强度达标

3.1. 从工程语句到随机事件

教师给出问题：从某一批次随机抽取一件陶瓷试样，其强度不低于 600 的可能性有多大？学生首先

要完成三步翻译。第一，研究对象是随机抽取的一件试样；第二，用连续型随机变量 X 表示其强度；第三，把“合格”写成事件 $A = \{X \geq 600\}$ 。只有在随机变量和事件明确后，才能选择概率模型。这样可把“随机试验 - 样本空间 - 随机事件 - 随机变量”的概念放入同一个材料情境。

本例采用正态分布作为强度分析的工作模型。教师随后给出批次 1 的模型 $X_1 \sim N(688.999, 65.549^2)$ 。学生通过标准化把强度单位转化为标准正态变量的取值，计算过程为：

$$A = \{X_1 \geq 600\}, P(A) = 1 - \Phi((600 - 688.999)/65.549) = 0.9127,$$

其中 Φ 表示标准正态分布函数。因此，在给定正态模型下，随机抽取一件批次 1 试样，其强度不低于 600 的概率约为 91.27%，不合格概率 q_1 约为 8.73%。批次 2 对应的标准化值为 -0.1804，合格概率约为 57.16%，不合格概率 q_2 约为 42.84%。这里必须保留“在给定模型下”这一限定，因为概率结论依赖分布类型和参数，而不是由质量下限 600 单独决定。

3.2. 相关知识的课堂衔接

得到合格概率后，教师不必立即更换题目，而可围绕同一质量下限回扣相关概念。合格事件 A 与不合格事件 $\bar{A}$ 互为对立事件，故 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ；若把 600 提高到 650，学生需要重新写出事件并解释风险变化，而不是只替换计算器中的数字。教师还可追问正态随机变量恰好取 600 的概率，由连续型随机变量在单点处概率为 0，说明 $P(X \geq 600)$ 与 $P(X > 600)$ 相同。

在此基础上，任务单可设置三个层次。基础层给定总体均值 μ 、总体标准差 σ 和强度下限，完成标准化与查表；提高层给定目标合格概率，反求相应的强度分位点；拓展层固定质量下限，分别改变 μ 和 σ ，比较提高平均强度与降低波动对合格概率的影响。三个层次沿用同一材料问题和同一正态分布公式，分别训练正向概率、分位数理解和参数敏感性分析。

3.3. 频率与概率的辨析

真实数据中，批次 1 的 240 件试样有 220 件达到 600，观测频率为 91.67%；正态模型给出的概率为 91.27%。两者接近但概念不同：频率是该批次既有观测中的比例，概率是模型对重复随机抽取的刻画。教师可以先让学生预测样本量增大后频率是否必然单调接近概率，再结合大数定律说明“趋于稳定”不等于每增加一个观测误差都会缩小。这一讨论可把真实数据与概率的统计定义联系起来。

本实例容易出现三类错误：把参数 μ 写成某一件产品必然具有的强度；把 91.27% 解释为 240 件中一定有 219 件合格；看到样本频率与模型概率接近，就断言强度严格服从正态分布。教师可要求学生在答案末尾分别写一句“概率结论”和“模型限制”，把计算正确与表达严谨同时纳入评价。至此，单件质量风险已经得到回答，但数据中还存在一个尚未解决的问题：批次 1 的样本均值比批次 2 高 77.843，这一差异是否足以说明两个总体的平均强度不同？这一问题构成实例二的起点。

4. 教学实例二：两个材料批次的均值差异检验

4.1. 从样本差异到总体问题

实例二承接上述问题，仍使用 2.2 节介绍的两个材料批次。教师先让学生判断 $688.999 > 611.156$ 能否直接推出两个批次的总体平均强度不同。学生需要意识到，样本均值本身具有随机性；统计推断关注的不是两个数谁大谁小，而是 77.843 的样本差异相对于抽样波动是否足够大。

记第 i 个批次的总体均值为 μ_i ，样本量为 n_i ，样本均值为 $\bar{x}_i$ ，样本方差为 s_i^2 ，其中 $i=1, 2$ 。将课堂问题表述为：在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，现有数据是否足以认为两个总体的平均强度不同？由此建立双侧原假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 和备择假设 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。教师应特别强调，假设描述的是总体参数，而不是断言两个已经

观测到的样本均值相等。

4.2. 检验统计量与计算结果

完成假设表述后，再确定检验所需的模型条件。这里把两个批次视为相互独立的正态总体。首先按课程中常见的等方差情形，假设两个总体方差相等但未知，记 s_p^2 为合并方差，则：

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 4061.316, s_p = 63.728,$$

其中 s_p 为合并标准差。以 T 表示等方差检验统计量，在原假设 H_0 成立时，其理论分布及本例计算结果为：

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = 13.381, H_0: T \sim t(n_1 + n_2 - 2) = t(478),$$

其中 $t(k)$ 表示自由度为 k 的 t 分布，因此 T 的自由度为 $n_1 + n_2 - 2 = 478$ ，双侧 P 值约为 6.62×10^{-35} ，远小于 0.05，故拒绝 H_0 。在上述模型下，数据提供了充分证据表明两个材料批次的总体平均强度存在差异。

若课程使用 P 值法，可要求学生完整写出“假设 - 统计量 - P 值 - 决策 - 专业结论”五个环节；若采用临界值法，则应根据所选统计量使用相应自由度的双侧临界值。教师还可让学生说明： P 值并非原假设为真的概率，而是在 H_0 成立的条件下，检验统计量取得当前观测值或更极端值的概率。

4.3. 置信区间与差异大小

假设检验回答了“是否有差异”，但没有直接回答“差异有多大”。为了回答这一问题，可考虑两个总体方差相等但未知假设下的区间估计，即沿用前面的结果，可构造 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 置信区间：

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2} \approx [66.411, 89.274].$$

该区间不含 0，与双侧检验拒绝 H_0 的结论一致；同时，它给出了总体平均强度差异的可能范围，使学生看到检验与估计是对同一问题的两种表达。

材料工程中的实际判断还需要技术标准。如果工艺人员认为平均强度差异小于 20 个单位没有实际意义，那么当前区整体高于 20，既具有统计显著性，也超过了这一预设的实际差异界限。反之，即使大样本得到很小的 P 值，若区间只围绕一个很小的差异，也不应夸大工程价值。由此可把“统计显著”和“实际显著”明确区分。

4.4. 模型假设与结论边界

原始试验同时记录了实验室和加工条件，按材料批次合并分析不能排除这些因素的影响，因此观察到的均值差异不能仅归因于材料批次。本例以正态、独立和等方差为工作假设；样本标准差接近或某一阈值处的频率与模型概率接近，均不足以证明相应假设成立。将这些条件与结果一并讨论，有助于学生理解模型选择与结论适用范围的关系。

5. 教学实施与结语

在教学进度上，实例一可安排在正态分布单元，用 25 分钟完成：5 分钟讨论共同任务，5 分钟识别随机试验、随机变量和事件，8 分钟标准化计算，7 分钟讨论频率、概率和模型限制。实例二可安排在两正态总体均值检验之后，用 30 分钟完成：5 分钟提出总体问题，10 分钟构造统计量，8 分钟解释 P 值和置信区间，7 分钟讨论统计显著性、实际显著性及混杂因素。两个实例不必连续讲授，但第二次使用数据

时应先回顾实例一的变量和结论,以保持问题链完整。教师根据各组提出的问题讲解关键方法,并引导学生随学习进度完善初步分析思路。

两个实例完成后,各组回到最初的质量评价任务,依据前期讨论拟定分析方案,使用 Excel 整理全部 480 个观测,综合运用合格频率、模型概率、均值检验和置信区间形成判断,并说明各项结果回答了什么问题。教师可进一步追问:保留全部观测,仅将质量下限由 600 提高到 650,为什么合格情况发生变化,而均值差异的检验结果不变?学生据此辨别达标要求与总体均值比较的不同含义。最终各组提交保留计算过程的 Excel 工作表及简短报告,并在后续课堂说明最终判断与初步判断有何不同、依据是什么。教师依据计算准确性、方法与问题的对应关系及结论表达进行评价,并组织学生讨论报告中的共性问题,完善分析结论。

本文围绕同一份 NIST 陶瓷强度数据设计了两个连续案例,分别回答“单件产品的风险有多大”和“批次均值差异是否超出随机波动”,在数据、变量和专业问题上保持一致。这一设计以数据情境的连续性为主要特点,将正态分布下的概率计算与总体均值的统计推断相衔接,为材料专业学生提供一条难度适中的分析路径。Excel 支持的小组分析与课堂交流进一步帮助学生将公式计算落实为对材料质量问题的解释,并说明结论成立所依赖的模型条件。

参考文献

- [1] 田苗,陈俊英,王福顺. 概率论与数理统计课程“四合三联”创新性教学体系探索[J]. 中国大学教学, 2022(8): 63-67.
- [2] 方茹,田波平,王勇. 谈案例教学法在概率论与数理统计教学中的应用[J]. 大学数学, 2014, 30(s1): 59-62.
- [3] 臧鸿雁,刘林,张志刚. 概率论与数理统计教学案例研究[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 39-44.
- [4] 程凤,陈暄. “概率论与数理统计”多角度案例教学设计[J]. 教育进展, 2022, 12(6): 1843-1848.
- [5] 姜冬青,王利,李季. 新工科背景下“概率论与数理统计”教学改革研究[J]. 教育进展, 2023, 13(7): 4375-4379.
- [6] 丁芳清,汪忠志,方益. 工程教育认证背景下工科院校概率论与数理统计课程教学改革与实践[J]. 安徽工业大学学报(社会科学版), 2024, 41(6): 51-53.
- [7] 孙强,袁修久. 概率统计数学实验与应用案例分析[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2025.