

极值图论课程提升研究生综合素质的改革路径

彭 兴, 胡夫涛

安徽大学数学科学学院, 安徽 合肥

收稿日期: 2026年9月26日; 录用日期: 2026年10月22日; 发布日期: 2026年10月29日

摘 要

针对研究生极值图论课程中数学抽象度高、英文文献进入门槛高以及课堂知识与科研任务衔接不足等问题, 本文以36学时《极值图论(双语)》为载体, 构建“一核双链四阶”教学框架。课程以研究能力形成为核心, 使“对象-定理-方法-问题”数学认知链与“术语-命题-论证-交流”学术语言链同步推进, 并通过双语导学、证明重构、专题探究和成果表达实现能力递进。教学内容围绕Turán型问题、正则性与消去方法、Ramsey理论、依赖随机选择及极值集合论重组, 以多证法比较、量词结构转述、论文片段研读和微型研究任务协同训练数学推理、学术英语、创新迁移与协作表达。进一步建立以学习档案为证据的评价-反馈-再评价闭环。首轮课程材料与科研转化个案显示, 该路径能够打通经典理论学习与前沿问题探索; 其普遍成效仍需通过后续多届学生评价持续检验。

关键词

极值图论, 双语教学, 研究生教育, 研究型教学, 综合素质

Reform Pathways for Enhancing Graduate Students' Comprehensive Competencies through an Extremal Graph Theory Course

Xing Peng, Futao Hu

School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei Anhui

Received: September 26, 2026; accepted: October 22, 2026; published: October 29, 2026

Abstract

To address the high level of mathematical abstraction, difficulties in engaging with English-language literature, and limited connections between classroom learning and research tasks in

graduate-level extremal graph theory, this paper develops a teaching framework comprising “one core, two chains, and four stages” for a 36 teaching hours bilingual course in Extremal Graph Theory. With the development of research competence at its core, the framework advances two learning chains in parallel: a mathematical cognition chain of “objects - theorems - methods - problems” and an academic language chain of “terminology - statements - argumentation - communication”. Progressive competence development is supported through four stages: guided bilingual learning, proof reconstruction, thematic inquiry, and presentation of outcomes. Course content is reorganized around Turán-type problems, regularity and removal methods, Ramsey theory, dependent random choice, and extremal set theory. Comparing multiple proofs, paraphrasing quantified statements, closely reading excerpts from research papers, and undertaking small-scale research tasks are integrated to develop mathematical reasoning, academic English proficiency, the creative application of knowledge in new contexts, and collaborative communication. An assessment-feedback-reassessment cycle is further established, with learning portfolios serving as the evidence base. Materials from the first course offering, together with case studies of the application of course learning to research, suggest that this approach can connect the study of classical theory with the exploration of frontier problems. Its broader effectiveness, however, requires continued evaluation across subsequent student cohorts.

Keywords

Extremal Graph Theory, Bilingual Education, Graduate Education, Research-Oriented Teaching, Overall Competence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 改革缘起：把双语课程从“专业术语讲授”转向“研究生综合能力提升”

极值图论研究在给定禁用子图、度数、色数或其他相关参数约束下，图的某些结构参数所能达到的最大或最小规模。问题往往由一句简短条件提出，却要求学习者同时完成对象抽象、极端构造、上界证明、等号情形刻画与反例检验。这一研究链条把优化思想、组合构造与严密论证自然联结起来，因而适合承担研究生阶段的科研素养训练：学生不仅要理解定理陈述，还要在约束与目标之间反复权衡，判断何种构造能够逼近界、何种论证能够封死改进空间。

与此同时，该领域的新结果主要通过英文论文形式发表。定理中的量词顺序、渐近符号、等号成立条件以及方法的适用范围，都依赖于精确的语言表达；任何不合适的表述都会改变命题的强度。因此，双语教学若只是把中文课件逐句译成英文，语言转换的负担容易遮蔽数学结构本身；若仅在课后追加英文文献阅读，则专业学习、语言训练与科研活动仍彼此分离，学生难以在课堂现场同步获得表达与推理的双重训练[1]。

《极值图论(双语)》是安徽大学组合与图论方向的研究生学位课程，面向硕士研究生，并向相关博士生及高年级本科生开放。课程于2023年春季首次开设，首轮8人修读，共36学时、18次课，自开设之初即采用讲授、互动与小组讨论相结合的方式。基于这一轮课程实践，本文并不把提高英文授课比例本身当作改革目标，而是提出三个可以检验的问题：双语如何直接服务于数学推理？经典定理如何转化为可操作的研究任务？数学、语言、创新与合作等素质，又如何由学习证据加以评价？对这些问题的回答，构成后文讨论课程设计、实施过程与学习成效的基本线索。

2. 以极值问题为轴重构课程内容

2.1. 从章节目录转向“对象 - 定理 - 方法 - 问题”

原有 18 讲覆盖 Mantel 定理与 Turán 定理[2]、Erdős-Stone-Simonovits 定理[3]、Szemerédi 正则性引理[4]、消去引理、完全二部图与奇偶圈的 Turán 数[5]、广义与超图 Turán 问题、Ramsey 理论、依赖随机选择[6]以及极值集合论，具体的教学安排见表 1。改革不删减学术主体，而是按研究行为重新聚类：先确定对象和极值参数，再猜测极值图构造；继而选择计数、对称化、稳定性、正则性或概率工具；最后追问等号、推广与失效边界。由此，学生看到的是方法之间的迁移关系，而不是 18 个互不相关的结论。

Table 1. Competency-oriented restructuring of the 36-hour course content
表 1. 36 学时教学内容的能力导向重构

模块与学时	数学主线	双语学习任务	综合素质指向
精确极值 4 学时	Mantel、Turán、极值数与等号构型	比较 theorem statement 与中文释义；用英文说明假设、结论和 equality case	抽象建模、双计数、构造意识与证明表达
正则性与消去 6 学时	Erdős-Stone-Simonovits、regularity lemma、removal lemma	拆解多重量词；绘制“引理 - 嵌入 - 结论”证明图；辨认 exact 与 asymptotic	逻辑层级、宏观结构化、跨领域迁移
图与超图专题 10 学时	完全二部图、奇偶圈、decomposition family、广义与超图 Turán 问题	研读英文论文片段；区分 bound、order of magnitude 和 open problem	工具选择、边界判断、问题生成
Ramsey 与概率方法 12 学时	Ramsey 数、dependent random choice、size-/anti-Ramsey 问题	小组重构递推或概率论证；用英文回应反例质疑	不确定性推理、协作论证、学术问答
极值集合论 4 学时	Sperner、Erdős-Ko-Rado、Kruskal-Katona 定理	把图论中的极值语言迁移到集合族；撰写一页 research memo	类比迁移、统一视角、研究写作

2.2. 让公式成为研究过程的入口

对固定图 H ，Turán 数不是孤立符号，而是把“限制条件 - 优化目标 - 候选构造”压缩为一个研究对象：

$$\text{ex}(n, H) = \max \{e(G) : |V(G)| = n, H \not\subset G\}.$$
 (1)

课堂首先要求学生分别用中英文解释 $\max$ 的自变量、 H -free (不含 H 作为非诱导子图)的含义以及为何必须固定顶点数；继而用小规模图检验猜测。这样，英文术语不再是标签，而与定义中的逻辑角色绑定。Mantel 定理提供第一个完整范例：若 G 不含三角形，则

$$\text{ex}(n, K_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor, \text{ 且极值图为 } K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}.$$
 (2)

证明问题不直接展示标准答案，而把论证拆为三个动作。对每条边 uv ，三角形自由性给出 $d(u) + d(v) \leq n$ ；对全部边求和得到 $\sum d(v)^2 \leq ne(G)$ ；再由 Cauchy 不等式 $\sum d(v)^2 \geq 4e(G)^2/n$ 推出 $e(G) \leq n^2/4$ 。学生需要说明每一步的计数对象，并用英文回答“Where is the triangle-free assumption used?”。等号分析再迫使其把不等式取等条件转换为平衡完全二部结构。由此一次任务同时留下推理、

表达和结构识别三类证据。

随后把同一问题链推广到 Turán 定理。若 $n = qr + s$, $0 \leq s < r$, 则平衡完全 r 部图 $T_r(n)$ 满足

$$\text{ex}(n, K_{r+1}) = e(T_r(n)) = C(n, 2) - sC(q+1, 2) - (r-s)C(q, 2). \quad (3)$$

学生分别以归纳或对称化解释上界, 再比较两种证明在“发现极值构型”和“刻画等号”上的作用。课程继续追问: 当禁图不再是完全图时, 精确答案为何迅速变难? Erdős-Stone-Simonovits 定理给出层级转换: 对 $\chi(H) \geq 3$,

$$\text{ex}(n, H) = \left[1 - 1/(\chi(H) - 1) + o(1) \right] n^2 / 2. \quad (4)$$

这里的教学重点不是背诵式(4), 而是准确区分 exact result、asymptotic result 与 order of magnitude, 并解释色数为何控制一阶密度。对于正则对 (A, B) , 再让学生把“只要 $|X| \geq \varepsilon|A|$ 、 $|Y| \geq \varepsilon|B|$, 就有 $|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon$ ”改写为完整英文量词句, 并构造一个不正则的反例。语言任务因此直接检验了学生是否真正理解定义, 而非另设一套普通英语练习。

3. “一核双链四阶”的教学实施

3.1. 一核：以可迁移的研究能力为中心

课程的核心产出不是学生记住多少定理, 也不是能否流利朗读英文, 而是能否面对一个新的禁形问题, 辨认变量与约束, 提出候选极值构造, 选择可能有效的方法, 识别当前论证的缺口, 并把结果准确传达给同行。所谓综合素质并非数学、英语、创新和合作四项分数的简单相加, 而是在完成真实数学任务时形成的整合能力: 定义若不准确, 英文再流畅也无效; 想法若有价值但表述含混, 则需要语言支架把它转化为可检验的论证。

3.2. 双链：数学认知链与学术语言链同步推进

数学认知链依次处理“对象 - 定理 - 方法 - 问题”: 从 $\text{ex}(n, H)$ 、 $R(s, t)$ 等对象出发, 理解定理的适用域, 复原证明方法, 再把条件变换为可研究的新问题。学术语言链依次处理“术语 - 命题 - 论证 - 交流”: 先建立高频搭配, 如 forbidden subgraph、extremal construction、sharp bound、stability; 再准确转述量词与渐近关系; 继而用 because、therefore、it remains to show 等连接证明; 最后在报告和质询中解释假设、回应反例。两条链在同一任务上汇合, 而不是先教完数学、再补英语。

这一设计与 CLIL 的 4Cs 框架(内容、沟通、认知、文化)高度一致, 本文将其学科化为“数学认知链 $\times$ 学术语言链”的并行推进, 可视为 CLIL 在数学研究生双语课堂中的具体应用与修正。

3.3. 四阶：从双语导学到成果表达

第一阶为双语导学。课前只提供一页概念地图、原始英文定理和三个诊断问题, 不做全文翻译, 学生标出不理解的量词与术语。第二阶为证明重构。课堂轮换“主证者 - 反例检验者 - 英文报告者 - 审稿者”角色, 同一定理经历问题引入、补全证明、多证法比较和同伴质疑。第三阶为专题探究。完全二部图、奇偶圈、超图 Turán 数以及 size-/anti-Ramsey 问题被转化为小组文献任务, 每组必须区分已知结论、可用工具与未解决部分。第四阶为成果表达。学生提交一页 research memo, 固定包含 problem、known results、attempted method、obstruction 和 next question, 并据反馈形成修订稿。

以 Ramsey 递推 $R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$ ($s, t \geq 2$) 为例, 学生先依据一个顶点的红、蓝邻域重构证明, 再用英文解释鸽巢原理如何触发两种分支。审稿者必须追问边界值是否达到, 反例检验者则准备反

例的加强策略。待基本递推闭合后，教师再引入概率下界和依赖随机选择，使学生看到确定性递推、概率构造与局部大的公共邻域方法解决的是不同层次的问题。这种纵向组织比按术语逐项讲授更能揭示方法的适用边界。

四类角色各司其职：主证者补全证明，反例检验者构造反例并核对边界，英文报告者转述论证并回应质询，审稿者核查正确性，教师按此四要点记录入档。多证法比较卡片以 Mantel 计数证明与 Turán 归纳、对称化证明为样本，从极值构型、等号刻画、可推广性三维度对照。

4. 以学习成果驱动综合素质评价

4.1. 建立“目标 - 任务 - 成果 - 改进”闭环

首轮课程已有讲授、互动和小组讨论，但申报材料未形成双语考核细则。本文据此提出形成性评价方案：数学理解与证明 35%，方法迁移与问题解决 25%，微型研究任务 20%，学术英语表达 10%，协作与反思 10%。权重只规定关注点，真正的评价单元是“初稿 - 质疑 - 核验 - 修改稿 - 同构新题”。初稿暴露理解边界，同伴评议检验可读性，教师负责核验数学证明，修改稿呈现学习增量，新题则检查是否真正掌握了这些方法。闭环不是多评一次，而是要求评价结果真实改变下一轮任务。综合素质的观测点、任务、证据与达成标准见表 2。

Table 2. Tasks, evidence, and attainment criteria for comprehensive competencies
表 2. 综合素质的任务、证据与达成标准

维度	代表性任务	学习证据	达成标准与反馈
数学推理	证明重构、多证法比较、等号分析	证明札记、板书答辩、返修稿	陈述完整、依据明确、推理闭合；按“定义错误/逻辑跳步/工具误用”归因返修
学术英语	论文精读、定理转述、双语报告	术语库、英文摘要、问答记录	中英文数学语义一致；先改数学含义，再改句法和表达
创新迁移	变换条件、提出推广、设计反例	文献矩阵、问题说明书、研究备忘录	区分已知与拟研究内容；问题可证伪、尺度适当；必要时缩小参数
协作表达	角色轮换、同行评议、专题答辩	分工记录、评议意见、共同修改稿	贡献可追踪，能复述异议并据质疑修订论证；课后完成任务复盘

4.2. 数学正确性与语言表现实行双轴判定

双语课程最容易出现两种误判：一是把英语流畅等同于专业学习优秀，二是因口语迟滞而低估有效的数学想法。故评分量规必须把数学正确性和表达准确性分开记录。证明存在致命缺口时，语言得分不能替代数学得分；论证正确但语言不足时，应保留其数学判断，同时指定术语、句型和问答层面的修订任务。对英语基础较弱的学生，允许先用中文搭建证明骨架，再逐步替换关键定义和逻辑连接；对基础较强，则要求直接研读原文并主持英文质询。分层支架保证课程的难度来自数学研究，而不是无关的语言淘汰。

5. 实践观察、证据边界与持续改进

现有材料可支持的判断主要来自课堂观察、学生与同行的质性反馈以及一个科研转化个案。反馈集

中肯定推导清晰、例子能够化解抽象概念、课程联系数学和计算机领域, 并认可前沿成果进入课堂。更具辨识度的个案是: 一名修课研究生在课程中接触并掌握 Simonovits 分解族方法, 随后与任课教师合作研究完全二部图奇圈膨胀的 Turán 数, 成果发表于《Journal of Graph Theory》107 卷 1 期(2024), 181~199 页[7]。该案例说明“经典方法-具体问题-论文表达”的培养链条具有现实可行性, 但单个案例不能证明课程对所有学生产生普遍因果效果。

首轮仅 8 人且尚无统一前测、量表和跨届对照, 因此不应虚构成绩增幅或满意率。后续建设应利用课程每两年开设的特点建立纵向学习档案: 保存同一学生的概念诊断、证明初稿与修改稿、英文摘要、口头问答记录和微型研究报告; 在课程结束后追踪其能否在新问题中选择方法、说明边界并规范引用。教师端则统计高频错误类型。若多数学生会复述结论却不能解释等号结构, 下一轮增加稳定性和极值构造训练; 若英文摘要语法无误却混淆 exact bound、asymptotic bound 与 order of magnitude, 则调整专业语料而非泛化为普通英语补习。

资源建设也应围绕证据链展开, 而非简单堆积录像。已有教学大纲、初步讲义和国际课程资源可进一步加工为四类可复用材料: 中英术语与常用搭配库、经典定理多证法卡片、前沿论文片段及问题背景、匿名化优秀作业与修订示例。智慧教室的录制条件主要用于截取关键证明、学术问答和同伴评议片段, 供学生自我复盘; 其价值取决于是否改变后续学习, 而非视频总时长。

6. 结语

研究生极值图论双语改革的关键, 不是把英语覆盖到每一分钟, 而是让两种语言共同承担数学发现、论证与交流。“一核双链四阶”框架以真实极值问题为实例, 把定义、构造、证明、反例、文献和表达组织为连续任务, 使抽象思维、方法迁移、学术英语、协作质疑和科研规范在同一成果中接受检验。首轮实践与科研个案证明这一路径值得继续, 但其有效性必须由跨届学生的科研成果、修订轨迹和迁移任务来累积证据。这样形成的双语课程才不只是知识的第二种语言版本, 而是研究生进入国际学术共同体并开展独立问题研究的训练场。

7. 局限性与推广边界

本模式的有效实施有明确边界: 要求教师兼具图论研究经验与双语授课能力, 宜采用小班研讨(20 人以内), 且受益程度与学生前期代数、组合基础相关。首轮实践中, 学生英语基础差异显著, 部分学生初期依赖中文支架而延后英文产出; 小组角色负担不均, 个别学生长期充当审稿者而缺少主证训练。后续将以动态轮换角色、分层支架和跨届纵向档案加以应对, 并在更大样本上检验其可推广性。

基金项目

安徽省教育厅 2024 年度新时代育人质量工程项目“极值图论(双语)”(2024qyw/sysfkc006)。

参考文献

- [1] Macaro, E., Curle, S., Pun, J., An, J. and Dearden, J. (2018) A Systematic Review of English Medium Instruction in Higher Education. *Language Teaching*, **51**, 36-76. <https://doi.org/10.1017/s0261444817000350>
- [2] Turán, P. (1941) On an Extremal Problem in Graph Theory. *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48**, 436-452.
- [3] Erdős, P. and Stone, A.H. (1946) On the Structure of Linear Graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52**, 1087-1091. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1946-08715-7>
- [4] Szemerédi, E. (1978) Regular Partitions of Graphs. In: *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, CNRS, 399-401.
- [5] Kővári, T., Sós, V. and Turán, P. (1954) On a Problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium Mathematicum*, **3**, 50-57.

<https://doi.org/10.4064/cm-3-1-50-57>

- [6] Fox, J. and Sudakov, B. (2011) Dependent Random Choice. *Random Structures & Algorithms*, **38**, 68-99.
<https://doi.org/10.1002/rsa.20344>
- [7] Peng, X. and Xia, M. (2024) Turán Number of the Odd-Ballooning of Complete Bipartite Graphs. *Journal of Graph Theory*, **107**, 181-199. <https://doi.org/10.1002/jgt.23118>