Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 629-638
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112424

Hans汉斯

工程案例、可视化技术与人工智能融合的高等数学教学实践

杨雅荀，张元元

西南科技大学数理学院，四川 绵阳

收稿日期：2026年10月4日；录用日期：2026年11月3日；发布日期：2026年11月10日

摘　要

为解决高等数学传统教学中概念抽象、学用脱节所导致的学生认知难度大与学习动力不足的痛点，本文以定积分几何应用中的核心内容“旋转曲面的面积”为载体，进行教学模式的改革创新。在情境导入、方法构建环节，借助真实工程场景及参数、GeoGebra软件动图演示，有效解决学生工程建模弱、空间想象困难的问题，从而使学生深度内化微元法思想。在问题解决环节，通过对比分析人工智能工具与数学软件的计算结果，发现前者可以提供解决问题的方法，然而计算结果却未必可靠，据此引导学生合理使用人工智能、避免对人工智能产生盲从心理。

关键词

高等数学，微元法，旋转曲面的面积，GeoGebra，人工智能辅助教学

Integrating Engineering Cases, Visualization Technology, and Artificial Intelligence into Higher Mathematics Teaching Practice

Yaxun Yang, Yuanyuan Zhang

School of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan

Received: October 4, 2026; accepted: November 3, 2026; published: November 10, 2026

Abstract

To address the pain points of students' high cognitive difficulty and insufficient learning motivation caused by abstract concepts and the disconnect between learning and application in traditional higher mathematics teaching, this paper takes the area of surfaces of revolution, a core topic in the

文章引用: 杨雅荀, 张元元. 工程案例、可视化技术与人工智能融合的高等数学教学实践[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 629-638. DOI: 10.12677/ae.2026.16112424

geometric applications of definite integrals, as a vehicle for reforming and innovating the teaching model. In the stages of contextual introduction and method construction, real engineering scenarios with parameters and GeoGebra animation demonstrations are employed to effectively address students' weaknesses in engineering modeling and difficulties in spatial imagination, thereby enabling students to deeply internalize the idea of the infinitesimal method. In the problem-solving stage, by comparatively analyzing the computational results of artificial intelligence tools and mathematical software, it is found that while the former can provide methods for solving problems, their computational results are not necessarily reliable. Accordingly, students are guided to use artificial intelligence rationally and avoid blind conformity to it.

Keywords

Higher Mathematics, Infinitesimal Method, Surface Area of Revolution, GeoGebra, AI-Assisted Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

《关于加快建设发展新工科实施卓越工程师教育培养计划 2.0 的意见》[1]明确要求打通数理理论与工程实践壁垒，众多教学研究开始引入工程案例开展跨学科融合教学。同时，依据《教育强国建设规划纲要（2024—2035 年）》[2]、《关于加快推进教育数字化的意见》等顶层部署，国家大力推动信息技术与基础数学课程深度融合。现有大量实证研究表明，动态绘图软件凭借可视化优势，可有效化解高等数学课程中学生对抽象概念认知困难的教学痛点[3]-[6]。伴随《“人工智能 + 教育”行动计划》[7]落地实施，人工智能辅助演算逐步应用于高数课堂。现有研究大多单独使用工程案例、可视化软件与 AI 工具，尚未构建三者协同联动的一体化教学方案。同时，鲜有文献辨析 AI 在数值计算方面存在的不确定性，如何引导学生规范、辩证地运用人工智能工具仍有待深入探究。

从理论上看，本研究的设计主要依托认知负荷理论与情境认知理论。认知负荷理论强调，教学应降低无关认知负荷，优化内在认知负荷，促进生成性认知负荷。GeoGebra 动态演示将抽象的“分割、近似、求和、取极限”过程可视化，正是为了降低学生因空间想象不足而产生的无关负荷；而将复杂积分计算交给工具处理，则有助于学生把认知资源集中于微元法思想和建模过程。情境认知理论认为，知识应在真实或拟真的情境中生成与运用。本文以华龙一号核电冷却塔、聚光式太阳灶等工程情境为载体，使数学知识不再孤立呈现，而是嵌入工程问题解决过程之中，从而增强学习的意义感与迁移性。

高等数学作为理工科各专业不可或缺的核心基础课程，承载着培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力及实际问题解决能力的重要使命。该课程不仅能够为学生后续专业课程的学习奠定必要的知识基础，还能引导学生运用微积分思想分析并解决专业领域实际问题，为其成长为行业高素质复合型技术人才夯实理论基础。然而，高等数学的概念抽象、理论性强，传统课堂案例更新滞后、工程实际关联不足，已难以满足新时代对复合型技术人才“厚基础、强应用、善创新”的培养要求。如何将数学知识与工程实践有机融合，如何借助数字化手段突破概念抽象的教学瓶颈，如何用 AI 解决问题已成为当前高等数学教学改革亟须探讨的核心议题[8]-[10]。

旋转曲面的面积是定积分几何应用模块的知识点，是理论与实际联系的桥梁，这部分内容能为学生

在几何求解、工程问题分析等方面奠定基础。在教学设计中，对标土木专业大一学生设计的案例是冷却塔，通过介绍“华龙一号”核电技术及廉江核电基地冷却塔引出旋转曲面的面积计算问题，将数学知识点与工程问题相融合，激发学生学习欲望，培养学生跨学科融合意识；在推导旋转曲面面积公式时，通过 GeoGebra 动图演示，直观展示面积微元的几何形状，深化学生对微元法的理解；在建模后，指导学生分别用人工智能工具与数学软件计算复杂的定积分，培养学生的应用创新思维与批判性思维。

2. 旋转曲面面积的教学设计

2.1. 情景导入：通过实际工程问题引出旋转曲面的面积计算问题

通过播放“华龙一号”的相关视频，介绍我国自主研发的第三代核电技术，向学生展示大国重器的工程实景。其中，广东廉江核电基地作为我国第三代核电技术批量化建设的重要工程之一，其庞大的冷却塔极具辨识度，引导学生观察“腰部收窄、顶部微张”的几何特征，继而以“为什么冷却塔要做成旋转单叶双曲面形状？”设问，从结构强度(薄壳结构)和通风效率(烟囱效应)两个角度揭示其设计原理。在激发学生兴趣的同时，顺势提出本节课的核心问题：如何精确计算这座巨型冷却塔的侧面积(外侧)？该计算结果不仅关系到材料用量、施工成本，更直接影响冷却塔的结构稳定与散热性能，具备极强的工程实用价值。

随后引导学生从工程问题中抽象出数学问题，精准剖析冷却塔外侧表面的几何构成，从而顺利完成从工程实物到数学模型的转化。通过收集廉江冷却塔的官方数据(塔顶标高 218.7 米、喉部标高 164 米、塔顶直径 96.8 米、零米直径 174.6 米)，建立合适的平面直角坐标系：以塔的中心对称轴为 z 轴，以喉部水平截面与中心对称轴的交点为坐标原点 O，yoz 平面即为冷却塔过对称轴的竖直截面。分析位于 yoz 平面右半平面上的母线，母线上的最高点坐标为 $(48.4,54.7)$，最低点坐标为 $(87.3,-164)$，设双曲线(母线)方程为 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 将最高点和最低点的坐标代入方程，解得 $b\approx 41, c\approx 87$，则双曲线方程为

$$\frac{y^2}{41^2}-\frac{z^2}{87^2}=1\text{。}$$

设计意图：通过介绍“华龙一号”核电技术和广东廉江核电基地的冷却塔，引导学生聚焦到冷却塔的侧面积(外侧)计算问题，以国家重大科技工程为情境，拉近课程和实际应用的距离，激发学生的民族自豪感与学习兴趣。引导学生建立冷却塔的双曲面数学模型，将数学理论与工程问题相联系，培养学生的学科交叉融合意识。从情境认知理论的视角看，真实工程情境为抽象的数学概念提供了“锚点”，使学生在有意义的任务驱动下主动建构知识，而非被动接受符号化的公式。同时，从认知负荷理论的视角看，以具体可感的工程实物替代纯粹的符号定义作为认知起点，有效降低了学生初次接触旋转曲面概念时的外在认知负荷，为后续公式推导预留了充足的工作记忆资源。

2.2. 方法构建：以 GeoGebra 动态演示具象化微积分思想

问题 1：回忆由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周得到旋转体的体积如何计算？回忆微元法求旋转体体积的方法：分割、近似得体积微元(图 1)，再求和(图 2)、取极限得体积的定积分表达式。其中体积微元为圆柱体体积。

问题 2：设平面光滑曲线 C 的方程为 $y=f(x)$ (不妨设 $y=f(x)\geq 0$)，其中 $x\in[a,b]$，这段曲线绕 x 轴旋转一周得到旋转曲面，如何运用微元法求旋转曲面的面积？

微元法的具体操作：首先，将旋转曲面分割为窄的旋转曲面(图 3)。然后，用方便计算面积的曲面近似代替窄的旋转曲面，得到旋转曲面面积微元。最后求和、取极限得旋转曲面面积的定积分表达式。

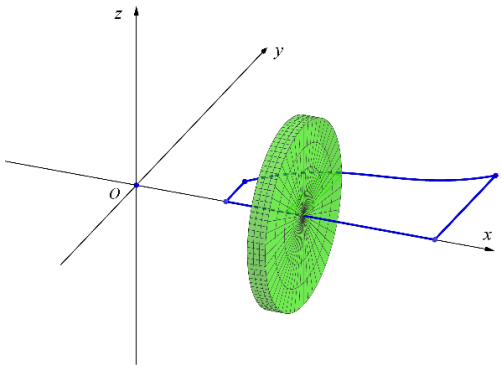


Figure 1. Revolution volume element
图 1. 旋转体体积的微元

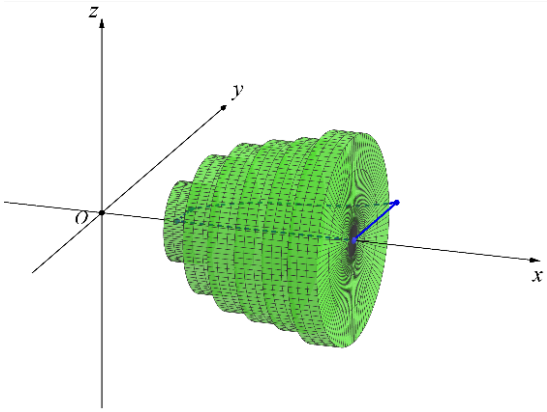


Figure 2. Volume of a solid of revolution via Riemann sum
图 2. 旋转体体积的微元求和

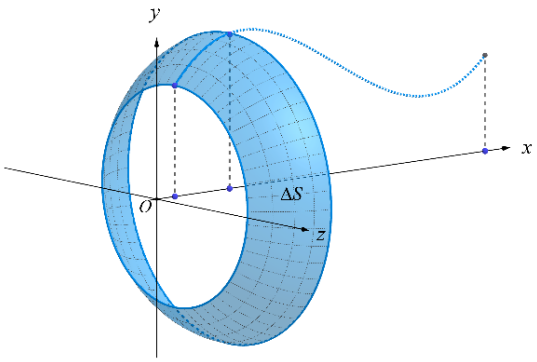


Figure 3. Partition of the surface of revolution
图 3. 旋转曲面的分割

问题 3：将窄的旋转曲面近似为哪一种方便计算面积的曲面呢？

学生容易想到将窄的旋转曲面近似为圆柱面。通过观察 GeoGebra 动图可以看到：圆台侧面(特殊的旋转曲面)的面积与圆台侧面的母线倾斜程度密切相关，因此近似为圆柱面不合理(图 4)。接着引导学生回忆平面曲线的弧长微元(切线段近似代替曲线弧段)，从而得到用圆台侧面近似代替窄的旋转曲面(图 5)。

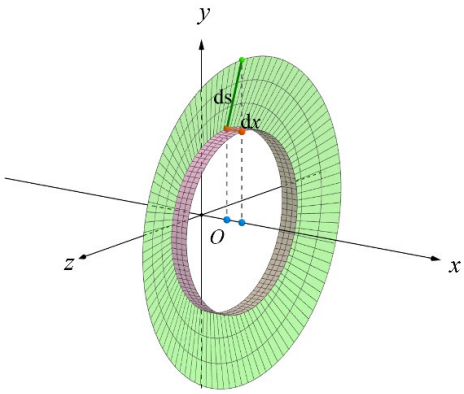


Figure 4. Cylindrical approximation of narrow revolution surface
图 4. 窄旋转曲面的圆柱面近似

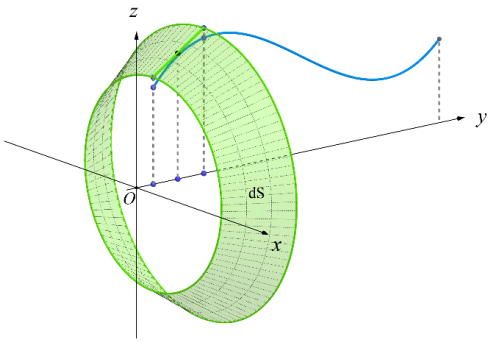


Figure 5. Surface area element of the surface of revolution
图 5. 旋转曲面的面积微元

问题 4：旋转曲面的面积微元(圆台侧面的面积) (图 6)的表达式？

根据圆台侧面的面积计算公式，得面积微元如下

$$\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\mathrm{d}s,$$

其中，$\mathrm{d}s = \sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 为弧微分，表示圆台侧面的斜高(图 7)。

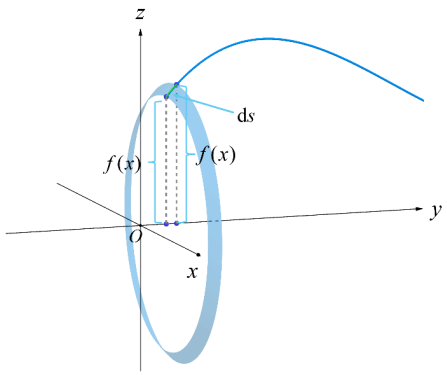


Figure 6. Surface area element of the surface of revolution (Frustum lateral approximation)
图 6. 旋转曲面的面积微元(圆台侧面积近似)

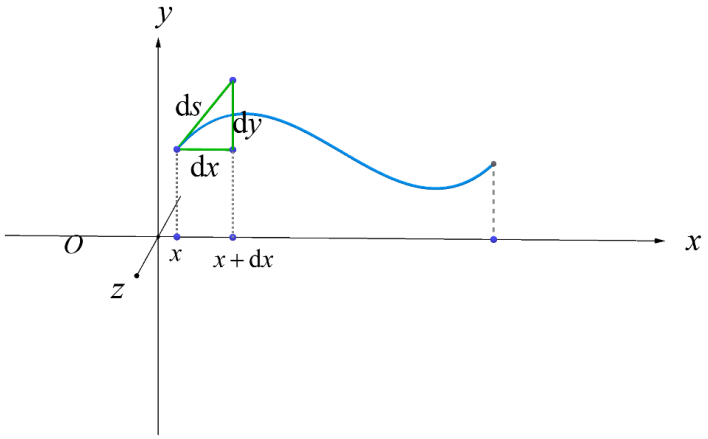


Figure 7. Derivation of the arc differential formula
图 7. 弧微分公式的推导

问题 5：旋转曲面的面积表达式？

通过观察 GeoGebra 动图(图 8、图 9)：对$[a,b]$进行无限细分时，圆台侧面的面积和便无限地接近旋转曲面的面积。这样一来，将面积微元在$[a,b]$求定积分便可以得到整个旋转曲面的面积。

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x\text{。}$$

设计意图：搭建从已知的旋转体体积到未知的旋转曲面面积间的认知桥梁，降低新知识的陌生感，并强调微元法的普适性与强大性。从认知负荷理论的视角看，将原本需要学生在头脑中完成的空间想象过程外显为可视化的动态表征，引导学生直观理解“无限分割并近似为微小圆台侧面”的几何意义，有效降低内在认知负荷，使学生得以将有限的工作记忆资源集中于理解微元法的核心逻辑而非空间构型的想象。从情境认知理论的视角看，问题 1 至问题 5 构成一条层层递进的问题链情境，学生在“回忆旧知→类比迁移→辨析修正→推导微元→归纳公式”的探究过程中逐步建构知识，体现了知识在情境中生成的核心理念。

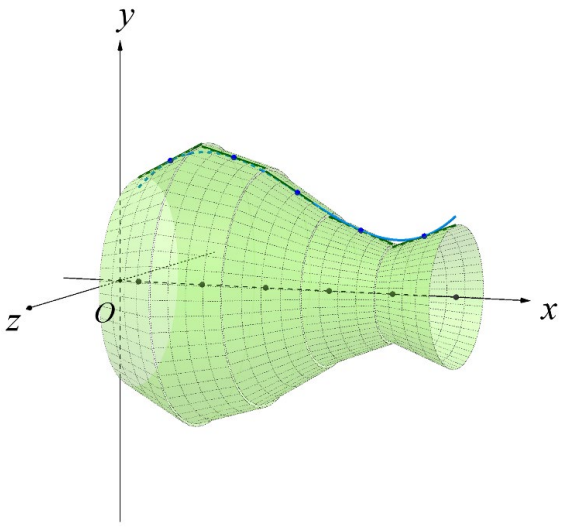


Figure 8. Approximate sum
图 8. 近似和

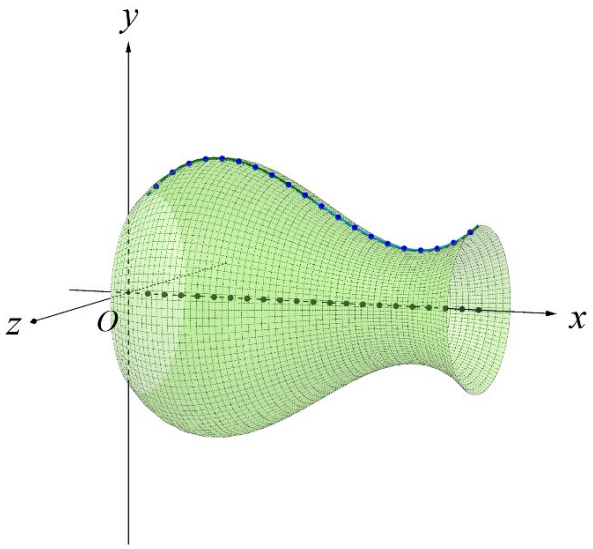


Figure 9. Taking the limit
图 9. 取极限

2.3. 问题解决：AI 工具与数学软件协同培养创新精神与批判性思维

结合 1.1 的母线方程 $\frac{y^2}{41^2}-\frac{z^2}{87^2}=1,-164\le z\le 54.7,$ 及 1.2 所推到出的旋转曲面面积公式 $S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$，我们需先将母线方程显化

$$y=\frac{41}{87}\sqrt{87^2+z^2}\left(-164\le z\le 54.7\right),$$

再将显化后的方程代入旋转曲面面积公式中，得

$$S=\frac{82\pi}{87^2}\int_{-164}^{54.7}\sqrt{87^4+\left(87^2+41^2\right)z^2}\mathrm{d}z,$$

利用积分表中的积分公式 $\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$，通过变量代换法，得定积分的计算结果

$$S=\frac{82\pi}{87^2}\left[\frac{z}{2}\sqrt{87^4+9250z^2}+\frac{87^4}{192}\ln\left(96z+\sqrt{87^4+9250z^2}\right)\right]_{-164}^{54.7}\approx 78979\ \ \mathrm{m}^2。$$

为确保手动计算结果的可靠性，教学设计中引入积分计算验证实践。

首先，要求学生使用至少三种手机端 AI 工具分别对以上积分进行求解，并详细记录各平台输出的结果及计算过程，以此直观呈现 AI 在复杂符号计算中存在结果不确定性，从而引导学生认识到当前 AI 工具尚且无法保证数学计算的精确性。然后，引入专业数学软件(如 GeoGebra)进行规范计算，若学生尚未掌握该软件的操作，可将 AI 作为软件“操作顾问”，即由 AI 提供具体指令与步骤说明，学生据此完成软件环境下的计算，并记录 GeoGebra 给出的标准结果。最后，在课堂中组织小组代表汇报上述多源数据的对比情况(表 1)，师生共同归纳 AI 在复杂符号运算中的常见问题，并以此强化“人机协同”的理念——工具仅起辅助作用，数学原理与推理能力才是判断与建构的根本依据。

设计意图：本环节采用“AI 工具 + 专业数学软件”双轨求解模式，通过多款 AI 工具求解积分，让

学生直观感受 AI 在复杂符号计算中的结果不确定性，破除对人工智能工具的盲目信赖；同时将 AI 定位为操作顾问而非答案提供者，强化人在人机协同中的主导地位。从认知负荷理论的视角看，AI 工具充当认知脚手架，将繁琐的操作指令等外在认知负荷转移给工具承担，使学生得以将认知资源聚焦于理解计算原理与判断结果合理性。从情境认知理论的视角看，“多工具求解→结果对比→发现差异→反思原因”构成一个真实的探究情境，学生在亲历质疑－验证－判断的过程中自然生成批判性思维。

Table 1. Comparison of three AI results with GeoGebra
表 1. 三种 AI 计算结果与 GeoGebra 计算结果对比

计算工具	积分计算结果	与基准值的差值	相对偏差
DeepSeek	78987.00	−2.00	−0.0025%
本地计算	78989.60	0.60	0.0008%
千问	79002.60	13.6	0.0172%
GeoGebra	78989.00	0.00	基准值

2.4. 拓展与应用

理论拓展：让学生自行推导其他表达形式下的母线绕坐标轴旋转一周而成的旋转曲面的面积公式，完善表 2。

Table 2. Surface area formulas for a surface of revolution with different generatrices
表 2. 不同母线形式下的旋转曲面面积公式

母线形式	绕 x 轴旋转的旋转曲面面积公式
显函数 $y=f(x)(a\le x\le b)$	$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$
参数方程 $\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$	$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$
极坐标 $r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$	$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

应用拓展案例：聚光式太阳灶(旋转抛物面)

聚光式太阳灶的镜面采用旋转抛物面设计——将抛物线绕其对称轴旋转一周而成。平行光沿主轴射向抛物面时，经反射后汇聚于焦点，从而实现聚光加热。设计太阳灶时，需要计算太阳灶镜面实际曲面面积，用于估算表面反光材料用量。

取抛物线顶点在原点，对称轴为 x 轴，抛物线方程为 $y^2=4px$，其中 p 为抛物线焦距。抛物线绕 x 轴旋转得到旋转抛物面(聚光式太阳灶)。设镜面轴向深度为 h，对应开口半径为 R，则抛物线方程为 $y^2=\dfrac{R^2}{h}x, x\in[0,h]$。

若需要计算镜面的实际曲面面积，则需用旋转曲面面积计算公式：$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 其中 $y=y(x), x\in[a,b]$ 为母线方程。将抛物线方程代入旋转曲面面积公式中，

$$S=\pi\frac{R}{h}\int_0^h\sqrt{4hx+R^2}\mathrm{d}x,$$

计算此积分为 $S=\dfrac{\pi R}{6h^2}\left[\left(R^2+4h^2\right)^{\frac{3}{2}}-R^3\right]$。

设计意图：理论拓展通过对比三种曲线表示形式下的旋转曲面面积公式，引导学生回归微元法本质($\mathrm{d}S=2\pi r\mathrm{d}s$)，构建结构化的知识体系；应用拓展以聚光式太阳灶为载体，完整呈现“实际问题→数学建模→结果解读”的工程思维链条，帮助学生完成从理论到应用的转化。从认知负荷理论的视角看，表 1 将三种形式统一于同一微元结构之下，以结构化对比替代逐一记忆，有效降低了内在认知负荷。从情境认知理论的视角看，太阳灶案例为学生提供了与冷却塔不同的新情境，促使学生将已习得的建模方法迁移至新情境中加以应用，实现知识的深层迁移。

3. 教学效果

通过近两年工程案例、可视化与 AI 融合教学模式在本人授课班级的实施，结合课堂效果和问卷调查，所作的旋转曲面的面积教学设计，不仅传授了课程知识，而且从多维度提高了教学质量，实现了教学改革的目标。

为更客观地评估教学效果，笔者在实施该教学设计的两个教学班(实验班，共 108 人)与采用传统讲授法的两个平行班(对照班，共 105 人)之间进行了对比分析。在旋转曲面的面积专题结束后，对两班学生进行了同一套测试(满分 100 分)，内容涵盖公式推导、建模应用与计算验证三个层次。结果显示：实验班平均分为 82.6 分，对照班平均分为 71.3 分；在建模应用类题目上，实验班得分率(78.4%)显著高于对照班(56.2%)，表明工程案例与可视化手段对学生将实际问题转化为数学模型的能力提升效果明显。此外，课后问卷调查(有效回收率 93.5%)显示：89.7%的学生认为工程案例让我感受到数学的实用价值，85.2%的学生认为 GeoGebra 动图帮助我理解了微元法的几何含义，76.8%的学生表示通过 AI 与数学软件的对比，我认识到不能盲目依赖 AI 的计算结果。

上述数据从三个维度印证了教学改革的成效。其一，学习动力显著增强。工程案例贯穿教学始终，学生切实感受到数学工具在专业领域的有用性，学习由被动接受转为主动探究。其二，认知深度有效提升。可视化技术将极限、积分、级数等抽象概念直观呈现，有效化解了空间想象障碍，学生对核心原理的理解更为透彻。其三，综合素养稳步提高。学生能主动借助 AI 工具辅助数学推导与建模，初步建立起“数学建模－工具求解－工程反馈”的思维范式，实现了从学数学到用数学的转变。

4. 结束语

高等数学作为理工科专业的重要基础课程，其教学改革始终是提升人才培养质量的关键环节。本文以旋转曲面的面积为载体，构建了“情境锚定－可视化建构－人机协同验证”三阶段教学模式：以真实工程问题为认知起点，建立工程需求→数学问题的映射；借助 GeoGebra 等动态数学软件将抽象的数学过程外显为可交互的视觉表征，降低认知负荷；引导学生分别使用 AI 工具与专业数学软件求解，通过结果对比培养批判性思维，确立人为主体、工具为辅助的人机协同理念。实践表明，该模式能够有效激发学生的内在学习动机，促进微元法等核心数学思想的深度内化，并初步建立起解决复杂问题的工程思维范式。

该模式具有良好的可迁移性。例如：在高等数学曲率的教学中，以铁路弯道设计为工程情境引出如何定量刻画曲线弯曲程度的核心问题，借助 GeoGebra 动态演示曲率圆随动点移动而连续变化的过程以化解空间想象障碍，再通过 AI 工具与数学软件的对比计算深化理解、培养批判性思维。类似地，该模式亦可推广至二重积分、级数等其他核心章节的教学设计中。

展望未来，我们将持续探索数字化工具与人工智能在数学教学中的深度赋能路径，不断优化教学资源与评价体系，致力于实现从知识传授向能力培养的全面转型，为培养具有扎实数学功底和创新实践能力的高素质应用型人才贡献更多力量。

基金项目

西南科技大学教育评价改革研究专项课题：数字教育背景下《高等数学》教学范式创新与实践探索研究(219-25PJGG20)；西南科技大学教育教学改革与研究项目：《高等数学》积分学 GeoGebra 动态可视化教学资源的开发与实践(2026XN44)。

参考文献

[1] 教育部 工业和信息化部 中国工程院关于加快建设发展新工科实施卓越工程师教育培养计划 2.0 的意见[EB/OL]. https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2018-12/31/content_5443530.htm, 2026-06-22.

[2] 中共中央国务院. 教育强国建设规划纲要(2024-2035 年) [N]. 人民日报, 2025-01-20(006).

[3] 罗健宇. 基于 GeoGebra 深度融合的可视化高等数学教学研究[J]. 数学通报, 2019, 59(2): 23-26.

[4] 许小勇. 基于 GeoGebra 软件的一元函数微分与积分中值定理可视化[J]. 电脑知识与技术, 2025, 21(3): 142-144.

[5] 高芹. GeoGebra 软件在高等数学教学中的实践研究——以“导数的概念”教学为例[J]. 科技风, 2026(25): 22-24.

[6] 谢婉秋. 基于 GeoGebra 的高等数学可视化教学研究[J]. 教育创新与实践, 2026(5): 5-8.

[7] 教育部等五部门关于印发《“人工智能+教育”行动计划》的通知[EB/OL]. https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/202604/content_7065138.htm, 2026-06-22.

[8] 钱龙霞, 王正新, 束慧. 基于多学科交叉融合的数学建模案例设计与分析[J]. 大学数学, 2023, 39(6): 94-101.

[9] 张学莹, 高志辉, 杨永富. 强基背景下数学类拔尖创新人才的多维度选培模式探究[J]. 大学数学, 2023, 39(5): 40-44.

[10] 李继成. 人工智能时代大学数学课程教学守正与创新的思考[J]. 大学数学, 2026, 42(2): 1-5.