Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 891-897
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112455

Hans汉斯

以数学概念为载体发展抽象素养

——以“曼哈顿距离”教学为例

胡媛媛

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年10月6日；录用日期：2026年11月5日；发布日期：2026年11月12日

摘　要

数学抽象素养是新课标中明确提出的六大核心素养之一。在实际课堂教学中，教师往往不够重视抑或甚至忽视了对学生数学抽象素养的培养，学生的抽象素养水平还有待提高。研究者以“曼哈顿距离”为素材，设计一例指向数学抽象素养培养的概念教学案例。

关键词

数学抽象素养，高中数学教学案例，曼哈顿距离

Developing Abstraction Competency through Mathematical Concepts

—A Case Study of the Teaching of “Manhattan Distance”

Yuanyuan Hu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: October 6, 2026; accepted: November 5, 2026; published: November 12, 2026

Abstract

Mathematical abstraction competency is one of the six key competencies explicitly specified in the new curriculum standard. In practical classroom teaching, teachers tend to attach insufficient importance to, or even neglect, the cultivation of students’ mathematical abstraction competency, and students’ proficiency in this competency remains to be improved. Taking the “Manhattan distance” as the material, the researcher designs a conceptual teaching case oriented toward developing students’ mathematical abstraction competency.

文章引用: 胡媛媛. 以数学概念为载体发展抽象素养[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 891-897.
DOI: 10.12677/ae.2026.16112455

Keywords

Mathematical Abstraction Competency, Senior High School Mathematics Teaching Case, Manhattan Distance

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 问题的提出

《普通高中数学课程标准日常修订版(2017 年版 2025 年修订)》(以下简称“新课标”)将数学抽象素养排在六项核心素养之首，并指出“数学抽象是数学的基本思想，是形成理性思维的重要基础”[1]。而在实际课堂教学中，教师往往不够重视抑或甚至忽视了对学生数学抽象素养的培养，这种现象有悖于“数学抽象是数学的基本思想”的重要观点。

数学概念具有高度的抽象性、系统性和逻辑性[2]。数学概念作为数学知识体系的基石，是培养学生数学抽象素养的重要载体。数学概念是数学知识的重要组成部分，掌握数学概念是学好数学的基础[3]。新课标明确提出，“获得数学概念和规则”是数学抽象素养重要的表现之一[1]。因而，如何在“数学概念的获得和运用”过程中，实现对学生数学抽象素养的培养，便成为数学概念教学的重要任务。

湘教版高中数学必修二第 6 章第 4 节是关于概念“曼哈顿距离”的内容，其源于城市普遍存在的“纵横街道”的情境。从“纵横街道”的熟悉情境抽象出数学概念“曼哈顿距离”，是体现“数学概念是培养学生数学抽象素养的重要载体”的典型案例。因此，本文以“曼哈顿距离”为素材，设计一例指向数学抽象素养培养的概念教学案例。基于“教学理论”抽象而“教学设计”具体，通过具象的“教学设计”能够对“以数学概念为载体培养学生数学抽象素养”的重要观点提供一种可模仿、可操作、可迁移的教学设计。

2. 指向数学抽象素养培养的“曼哈顿距离”教学思路

数学抽象素养的内涵表明，数学问题、概念、性质和方法等是通过抽象过程获得的不同表现形式的“数学抽象物”。通过研读新课标和教科书可以确定，“曼哈顿距离”教学过程中蕴含的不同表现形式的“数学抽象物”依次为“数学概念”“数学性质”“几何图形”“数学方法”等。这些不同表现形式的“数学抽象物”的数学抽象过程如图 1 所示。

据此，指向数学抽象素养培养的“曼哈顿距离”教学思路如下：

1) 通过创设熟悉的情境抽象出数学问题：如何表示出特殊点按“直角拐弯”的方式行走的距离。由特殊到一般，抽象出曼哈顿距离的概念，获得数学抽象物：数学概念(数学概念的命名，用文字语言、符号语言以及图形语言表征的曼哈顿距离的概念)、数学方法(一般化)和数学问题。引导学生在理解曼哈顿距离的概念过程中，体会用数学的眼光观察现实世界、用数学的思维思考现实世界、用数学的语言表达现实世界。

2) 通过仿照欧氏距离满足的三角形不等式，类比研究曼哈顿距离是否也满足三角形不等式，从而抽象出曼哈顿距离下的三角形不等式，获得数学抽象物：曼哈顿距离的性质(非负性、对称性、最短性)、数学方法(类比)。

3) 通过利用曼哈顿距离的概念与性质解决具体问题，促进学生对抽象的数学概念与性质的具象

化理解。例如，引导学生类比欧氏距离下圆、椭圆、双曲线的定义、方程及图形，研究曼哈顿距离下“圆”“椭圆”“双曲线”的定义、方程及图形；利用曼哈顿距离的性质研究曼哈顿距离下的“费马点”。获得数学抽象物：数学问题、数学方法(类比)和数学建模思想，实现培养学生数学抽象核心素养目标。

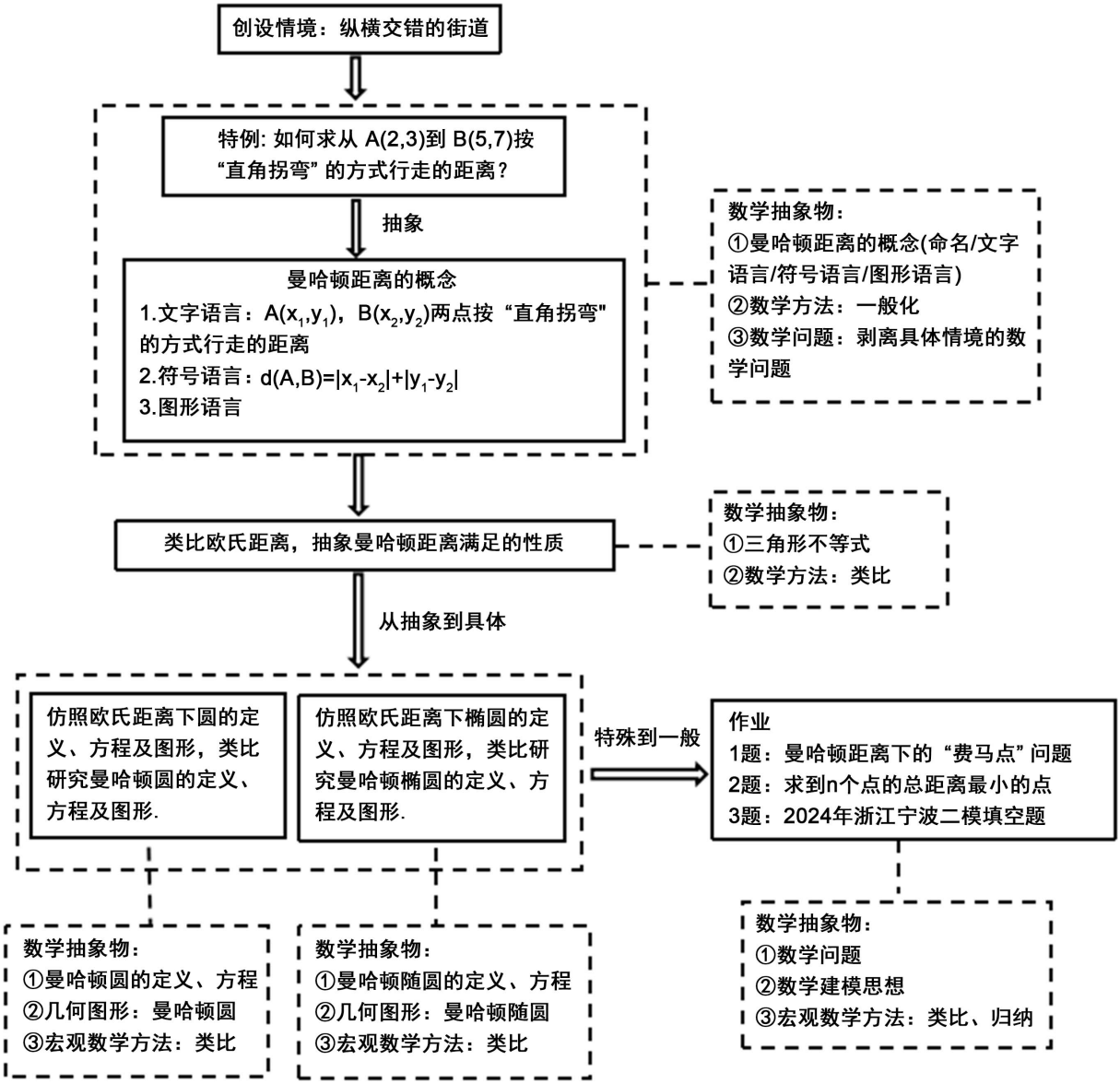


Figure 1. Mathematical abstraction process of “mathematical abstract objects” with different manifestations
图 1. 不同表现形式的“数学抽象物”的数学抽象过程

3. 指向数学抽象素养培养的“曼哈顿距离”教学案例

3.1. 创设熟悉情境，获得曼哈顿距离的概念

数轴上 A、B 两点的坐标分别为 x_1 和 x_2，则 A 到 B 的距离为 $d(A,B)=|x_1-x_2|$。

许多城市的街道是相互垂直或平行的，人们需要通过“直角拐弯”的方式行走才能到达目的地。

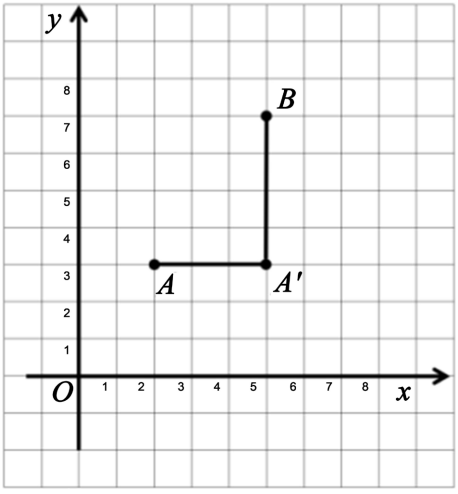


Figure 2. Distance of the special “right-angle turn”
图 2. 特殊的“直角拐弯”距离

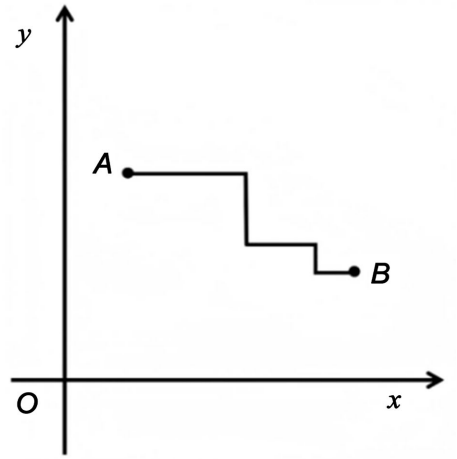


Figure 3. Distance of the general “right-angle turn”
图 3. 一般的“直角拐弯”距离

问题 1：若按街道的纵横方向建立直角坐标系，试着画出从 $A(2,3)$ 到 $B(5,7)$ 按“直角拐弯”的方式行走的距离，并用数学符号语言表示(图 2)。一般地，试着画出从 $A(x_1,y_1)$ 到 $B(x_2,y_2)$ 按“直角拐弯”的方式行走的距离，并用数学符号语言表示(图 3)。

学生 1：图 2 是其中一种从 $A(2,3)$ 到 $B(5,7)$ 按“直角拐弯”的方式行走距离的画法，用符号语言表示为：$d(A,B)=|2-5|+|3-7|=7$；图 3 是其中一种从 $A(x_1,y_1)$ 到 $B(x_2,y_2)$ 按“直角拐弯”方式行走的距离，用符号语言表示为：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$。

教师追问：能试着给这种按“直角拐弯”方式行走的距离命名吗?

学生 2：可以称之为“直角拐弯距离”“直角距离”“转弯距离”。

教师：美国曼哈顿街区呈现出纵横交错的结构，因此数学家把从 $A(x_1,y_1)$ 到 $B(x_2,y_2)$ 按“直角转弯方式”行走的距离称为“曼哈顿距离”，用数学符号语言表示为：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$。

设计意图 创设熟悉的情境，引导学生表示出两个特殊点之间按“直角拐弯”方式行走的距离，获得数学抽象物：数学问题(剥离具体情境的数学问题)。由特殊到一般，抽象出曼哈顿距离的概念，获得数学

抽象物：曼哈顿距离的概念(曼哈顿距离的命名及文字语言、图形语言和符号语言的表征)、数学方法(一般化)。

3.2. 类比欧氏距离，抽象曼哈顿距离的性质

教师：同学们是否思考过一个问题，之所以把这种按“纵横相加”方式计算的结果叫作“距离”而不是“数值”，它一定满足距离的底层规则。请同学们思考距离的底层规则是什么呢?

学生1：距离不可能是负数。

教师：很好，说明距离需要满足非负性。

学生2：从A到B的距离和从B到A的距离是一样的。

教师：从A到B的距离等于从B到A的距离，即$d(A,B)=d(B,A)$，表明“距离”要满足对称性。

学生3：我认为之所以把这种按“纵横相加”方式计算的结果也称为“距离”，一个最重要的原因是它一定最短。就好比初中学的“两点之间线段最短”，所以才把“线段”称为两点之间的距离。

教师：这位同学的想法很好，点赞!

教师：只有最短的才可能是距离，这条性质可称之为“最短性”。也就是如果从A到B不按这种方式行走，而是经过了一个中途点C，那么“从A经过C，再到B”，一定不小于“从A直接到B”。用数学符号语言表述为

$$d(A,C)+d(C,B)\geq d(A,B)。$$

教师：这个不等式就是距离需要满足的第三条重要底层规则，它类似三角形中的“两边之和大于第三边”，所以也把它称为三角形不等式。

学生活动：请同学们试着证明曼哈顿距离满足的这个三角形不等式。

学生汇报：设$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$，则

$$d(A,C)=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|;\ d(C,B)=|x_3-x_2|+|y_3-y_2|;\ d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|。$$

要证明曼哈顿距离满足三角形不等式$d(A,C)+d(C,B)\geq d(A,B)$，只需证明

$$|x_1-x_3|+|y_1-y_3|+|x_3-x_2|+|y_3-y_2|\geq|x_1-x_2|+|y_1-y_2|。$$

而上式显然成立。

教师总结：这样就从底层规则出发，讨论了“距离”需要满足的三条性质：① 非负性；② 对称性；③ 最短性。换言之，只有当一个结果满足这三条底层规则，它才可能成为“距离”。

设计意图 引导学生思考距离的底层规则，类比欧氏距离的性质研究曼哈顿距离的性质。基于距离需要满足最短性，引导学生仿照欧氏距离满足的三角形不等式，证明曼哈顿距离下的三角形不等式。在此过程中学生获得数学抽象物：曼哈顿距离的性质(非负性、对称性和最短性)、数学方法(类比)。

3.3. 曼哈顿距离的具象化：运用曼哈顿距离研究曼哈顿圆、曼哈顿椭圆

曼哈顿距离的概念是对具体事物的抽象概括，理解并掌握抽象的数学概念需要经历漫长的过程。“一个例子胜过一打说明”，借助具体的问题可将抽象的数学概念具象化，实现“从思维的抽象发展到思维的具体”。

问题2：为了让曼哈顿距离也能“看得见，摸得着”，请同学们类比普通距离中圆的定义、形状和方程，尝试研究“曼哈顿圆”的定义、形状和方程。

学生1：在普通距离中，到定点的距离等于定长的点的轨迹称之为圆，其中定点为圆心，定长为半径。所以曼哈顿圆的定义是：到定点的曼哈顿距离等于定长的点的轨迹，其中定点为“圆心”，定长为“半径”。

学生2：“曼哈顿圆”的形状不太好画，我们可以先求它的方程。设曼哈顿圆的“圆心”为$P(x_0,y_0)$，“半径”为r，那么它的方程就是$|x-x_0|+|y-y_0|=r$。

学生活动：画出曼哈顿圆的图形，并汇报。

学生汇报：曼哈顿圆$|x-x_0|+|y-y_0|=r$的形状是如图4所示的一个正方形。

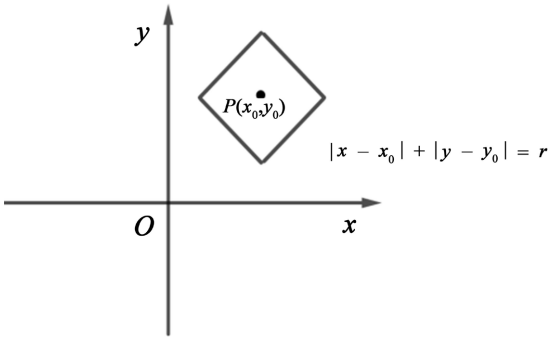


Figure 4. Manhattan circle
图4. 曼哈顿圆

教师：“曼哈顿圆”名字里带“圆”，是因为它和普通圆一样，都是“到定点的距离等于定长的点的轨迹”。而其形状却是正方形，又体现了曼哈顿距离的特殊性。

教师：请同学们类比普通距离中椭圆的定义、形状和方程，尝试给出“曼哈顿椭圆”的定义、形状和方程。

学生1：在普通距离中，平面内到两定点F_1,F_2的距离之和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作椭圆，这两个定点叫作椭圆的焦点，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距。所以曼哈顿椭圆的定义是：平面内到两定点F_1,F_2的曼哈顿距离之和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹，这两个定点叫作曼哈顿椭圆的“焦点”，两“焦点”间的曼哈顿距离叫作曼哈顿椭圆的“焦距”。

学生2：根据定义可知“曼哈顿椭圆”的形状和大小只与“焦距”、到两定点F_1,F_2的曼哈顿距离之和有关，但直接画曼哈顿椭圆是困难的，可以先求它的方程。设“焦距”为$2c$，到F_1,F_2的曼哈顿距离之和为$2a(a>c>0)$。基于对称性建立平面直角坐标系，那么$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，则曼哈顿椭圆的方程为：$|x+c|+|x-c|+2|y|=2a$。

学生活动：画出曼哈顿椭圆的图形，并汇报。

学生汇报：曼哈顿椭圆$|x+c|+|x-c|+2|y|=2a$的形状是如图5所示的一个六边形。

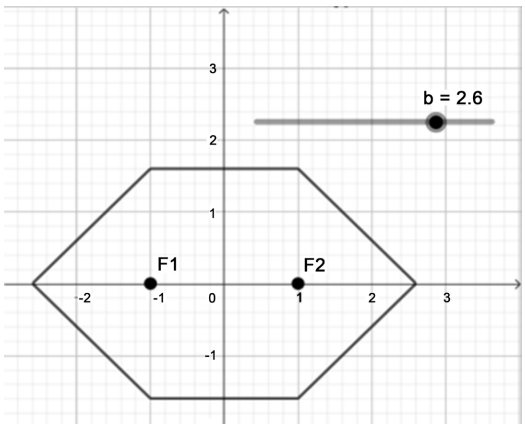


Figure 5. Manhattan ellipse
图5. 曼哈顿椭圆

教师：请同学们课后继续研究“焦点”在 y 轴上的曼哈顿椭圆的方程及图形，并类比曼哈顿圆、曼哈顿椭圆的研究方法尝试研究曼哈顿双曲线。

设计意图 引导学生仿照欧氏距离下圆的定义、方程及图形，类比研究曼哈顿距离下“圆”“椭圆”“双曲线”的定义、方程及图形，体会通过具体问题将抽象的曼哈顿距离的概念具象化的过程。获得数学抽象物：数学问题(曼哈顿圆、曼哈顿椭圆、曼哈顿双曲线)、数学方法(类比法)、数学建模思想。

4. 课后作业

1) 某地三个新建居民区的位置分别位于三点 $A(3,20)$、$B(-10,0)$、$C(14,0)$ 处。现计划在 x 轴上方区域(包含 x 轴)内的某一点 P 处修建一个文化中心，试确定点 P 的位置，使其到三个居民小区的曼哈顿距离最小。

2) 工作效率相同的 n 台机器位于一条直线上，每台机器生产的零件均需送到同一个检验台上检验，检验合格后才能进入下一道工序。已知零件在这条直线上的传递速度均相同，问检验台的位置设在哪里可以使得零件传送时总的距离最小？

3) (2024 • 浙江宁波 • 二模)在平面直角坐标系 xOy 中，定义 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点间的“曼哈顿距离”。已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，点 P,Q,R 在椭圆 C 上，$PQ\perp x$ 轴。点 M,N 满足 $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{MP},\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{NQ}$。若直线 MQ 与 NR 的交点在 x 轴上，则 $d(R,Q)$ 的最大值为_____。

5. 结语

数学概念是培养学生数学抽象素养的重要载体。教师可以利用学生熟悉的生活情境设计出具有探究意义的教学活动来引导学生经历数学概念的抽象过程，在“数学概念的获得和运用”过程中培养学生的数学抽象素养。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准日常修订版(2017 年版 2025 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2025.

[2] 章建跃. 章建跃数学教育随想录[M]. 杭州: 浙江教育出版社, 2017: 519-520, 786-787.

[3] 唐绍友. 论数学抽象素养的培养途径[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 33-37.