Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 426-438
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112402

Hans汉斯

HPM视角下高中数学概念教学的史料选择依据

——以导数的几何意义为例

梁蕊瑶，张　勇

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首

收稿日期：2026年10月3日；录用日期：2026年11月2日；发布日期：2026年11月9日

摘　要

概念教学中，教师面临的现实问题不是“要不要用数学史”，而是“面对一个具体概念，哪段史料值得用、凭什么判断它对应学生的认知障碍”。文章属于理论框架构建与单案例应用分析，在梳理HPM与历史相似性理论的基础上，提出由困难类型、发生环节、突破方式与教学可达性四条标准构成的史料选择依据与判定框架，并以“概念－历史事件－学生障碍－课堂任务”为分析单位。以导数的几何意义为案例：学生的“切线就是只有一个交点的直线”这一前概念，与历史上从静态切线定义走向割线极限定义的转折具有结构对应；通过候选史料逐项判定，确定静态定义作为困难的历史对应，罗伯瓦尔与牛顿的定义作为可转译的突破，并据此形成“课堂说明－情境导入－历史对话－数形结合－巩固小结”的教学设计示例。案例分析显示，该框架为教师判断史料的教学适用性提供了可参照的路径。

关键词

HPM，高中概念教学，史料选择依据，导数的几何意义

The Basis for Selecting Historical Materials in Senior High School Mathematics Concept Teaching from the Perspective of HPM

—A Case Study of the Geometric Meaning of the Derivative

Ruiyao Liang, Yong Zhang

School of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

文章引用: 梁蕊瑶, 张勇. HPM 视角下高中数学概念教学的史料选择依据[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 426-438.
DOI: 10.12677/ae.2026.16112402

Received: October 3, 2026; accepted: November 2, 2026; published: November 9, 2026

Abstract

In concept teaching, the practical problem teachers face is not "whether to use the history of mathematics", but "for a specific concept, which historical material is worth using and on what grounds it can be judged to correspond to students' cognitive obstacles". This paper is a theoretical framework construction with a single-case application analysis. Based on a review of HPM and the theory of historical similarity, it proposes a basis and judging framework for selecting historical materials, consisting of four criteria: the type of difficulty, the stage at which it occurs, the way it is overcome, and teaching accessibility, and takes "concept - historical event - student obstacle - classroom task" as the unit of analysis. In the case of the geometric meaning of the derivative, the students' prior conception that "a tangent is a line with only one common point" corresponds structurally to the historical transition from the static definition of the tangent to its definition as the limit of secants. Through item-by-item judgement of candidate materials, the static definition is identified as the historical counterpart of the difficulty, and Roberval's and Newton's definitions as translatable breakthroughs, on which a teaching design example is developed that consists of "classroom explanation - situational introduction - historical dialogue - combination of number and figure - consolidation and summary". The case analysis shows that the framework provides a referable path for teachers to judge the teaching applicability of historical materials.

Keywords

HPM, Senior High School Mathematics Concept Teaching, Basis for Selecting Historical Materials, Geometric Meaning of the Derivative

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

数学概念是高中数学知识结构的基本单位，概念教学要求学生理解概念的发生、发展与本质。然而，在实际课堂中，许多教师习惯于“先给定义、再讲例题”，学生学到的往往是可背诵却难以迁移的定义。HPM 研究为此提供了一条路径：将数学史转化为教学资源，让学生在历史情境中理解概念为什么这样定义[1]。但“用数学史”并不等于“随便用一段数学史”：教师首先需要判断某段史料是否真的对应学生的某个认知障碍。已有研究已经从两个方面作出推进：一是论证数学史的教育价值，并发展出附加式、复制式、顺应式、重构式等融入方式[2]；二是通过历史相似性实证，说明学生的某些理解困难与历史上数学家的困难具有相似性[3]。但这些研究更多回答“史料怎样进入课堂”，却较少回答一个更前置的问题：在具体概念上，凭什么判断一段史料与学生障碍形成对应，并且值得作为教学设计的依据？本文针对这一问题，以数学史与数学教育(HPM)为视角，以历史相似性为理论假设，构建了由困难类型、发生环节、突破方式与教学可达性四条标准组成的史料选择依据与判定框架，并以“概念－历史事件－学生障碍－课堂任务”为分析单位；进而以导数的几何意义为案例，逐项判定候选史料，确定古希腊的静态定义作为学生困难的历史对应，罗伯瓦尔的运动方向定义与牛顿的割线极限定义作为可转译的突破，给出由“课堂说明－情境导入－历史对话－数形结合－巩固小结”构成的教学设计示例，并讨论该框架的启示与边界。

2. 国内外文献与理论基础

2.1. HPM 研究述评

HPM 研究围绕“为何使用数学史”与“如何使用数学史”两条主线展开。Jankvist 将其概括为“whys”与“hows”[4]；Tzanakis 与 Arcavi 则提出提供直接历史信息、借鉴历史进行教学、发展数学文化意识三种运用路径[5]。国内研究形成了附加式、复制式、顺应式、重构式四种融入方式，并在函数、对数、几何等主题中开展课例研究[6]。这些研究主要回答“史料怎样进入课堂”，较少回答“为什么是这段史料”。

就导数主题而言，已有 HPM 研究已经从不同角度展开：吴甬翔与汪晓勤梳理了曲线切线的历史及其课堂转化[7]；王芳与汪晓勤设计了 HPM 视角下导数几何意义的教学[8]；陈睿滢等以课堂留白组织导数几何意义的教学[9]。这些研究注重“如何教”，为本案例提供了史料与设计参照。然而，本文要回答的是更前置的问题——“如何判断一段史料值得用”，两者研究问题不同。

就史料进入课堂的方式而言，已有研究大致区分出附加式、复制式、顺应式与重构式四种做法，它们的功能与代价并不相同。附加式将史料作为情境或背景补充，改动小、成本低，但史料与教学内容容易成为“两张皮”；复制式直接呈现历史材料或原始问题，能让学生接触真实史料，而对阅读与理解能力要求较高；顺应式对史料作教学化改造，在保留历史背景的同时降低难度，适合史料与当前教学内容方向一致的情形；重构式按学生的认知路径重新组织历史，将历史上的问题情境、论证与冲突转化为课堂任务序列，最有可能直接指向学生的认知障碍，但对教师的历史理解与设计能力要求也最高。本文所处理的是“学生障碍与史料的对应”问题，因此以重构式为主，在个别环节辅以顺应式与复制式。

2.2. 历史相似性理论

历史相似性理论认为，个体学习数学概念的认知过程与数学史上相关概念的发展存在一定相似性，其思想可追溯到“个体发展重演种族发展史”的假设，并经庞加莱、克莱因、弗赖登塔尔等引入数学教育[10]。这种相似性是有条件、分主题的，而不是严格重演。赵瑶瑶与张小明指出，应针对具体知识点比较历史困难与学生障碍的相似处与不同处。实证方面，任明俊与汪晓勤在函数概念上验证了学生理解与历史定义类型的相似性，但尚未形成适用于具体课例的判定程序。

这一理论自提出以来并非没有争议。主张者以“个体发展与科学史平行”为据[11]，认为历史上出现过的困难会在今天的学生身上重现，教学因此应当重走历史的关键步骤；质疑者则强调文化历史条件的差异[12]：今天的符号系统、课程安排与学习工具都已改变，学生在课堂上遇到的问题与数学家当年面对的问题并不等同，将历史困难直接搬进课堂，容易出现“历史上有、学生却没有”的错位。综合两方面的意见，较为稳妥的看法是：相似性只在一定条件下、针对特定知识点才成立。

据此，本文采取的是一种有条件、可检验的历史相似性立场：承认历史上的困难对学生困难具有提示作用，但不把它当作自动成立的前提——先由历史提示“学生可能在哪里遇到困难”，再通过文献诊断或前测加以核实；只有核实成立，才进一步讨论用哪一段史料去突破。

2.3. 史料筛选原则

在史料选择上，已有研究提出科学性、可学性、有效性、人文性、趣味性等原则，并强调史料要符合学生认知基础、服务于教学目标[13]。这些原则具有方向性，但多停留在“应当如何”的层面：它们能说明一段史料是否科学、有趣、适合学生，却不能直接回答“这段史料对应学生的哪个障碍、能否承担突破该障碍的功能”。本文所要补的，正是从原则到可操作判定之间的缺口。

2.4. 研究设计

本文采用文献分析、理论建构与单案例应用分析：先梳理 HPM、历史相似性与史料筛选研究，再建构判定框架，最后以导数几何意义为例说明判定与设计过程。案例中的学生障碍依据已有研究进行文献诊断，教学设计属于示例。

3. 史料选择依据与判定框架

3.1. 概念与分析单位

概念教学指围绕数学概念的引入、本质理解、表征转换与定义建构展开的教学；认知障碍则指源于概念意义、表征或推理结构的稳定理解困难，具有稳定性、理解性和结构性。

史料选择依据，指的是判断一段数学史能否用作突破某一学生认知障碍的教学依据的标准。它不评价史料是否真实、有趣，而评价史料与学生障碍之间是否存在可教学利用的对应关系。历史相似性为这种对应提供理论假设：学生的概念困难与历史困难可能在性质、环节和突破条件上相似。重构式史料运用则将历史的问题情境、论证和冲突重组为课堂任务序列。

本文以“概念－历史事件－学生障碍－课堂任务”四元组为分析单位：概念限定对象，历史事件提供比对素材，学生障碍来自诊断证据，课堂任务记录史料向学习活动的转化，四者缺一不可。

3.2. 判定标准与使用流程

四条标准的建构不是凭空提出：困难类型与发生环节来自历史相似性和认知障碍研究对“障碍”的界定；突破方式来自发生教学法对历史关键环节与障碍突破的强调[14]；教学可达性则来自前述 HPM 史料筛选原则中对可学性与有效性的要求。

四条标准依次回答：困难是否属于概念理解问题并位于概念生成的关键环节，历史是否提供可转译的突破，以及史料能否转化为学生可操作的任务。具体编码规则见表 1。

Table 1. Criteria for judging the basis of selecting historical materials and their coding rules
表 1. 史料选择依据的判定标准及编码规则

判定标准	判定问题	所需证据	通过示例	不通过示例
困难类型	这是概念理解困难，还是粗心、不熟练？	开放性任务、访谈解释、错误类型分析	学生难以解释“为什么这样定义”，同类困难反复出现	只是算错、忘记公式、熟练度不足
发生环节	困难在概念生成关键处，还是练习环节？	前后测、课堂观察、与历史关键节点对照	困难出现在概念引入、新旧衔接或方法转换处	只出现在习题变式或运算细节中
突破方式	历史上有没有可转译为课堂冲突的突破？	数学史文献、历史关键环节分析	新定义、新表征或新工具可转化为课堂任务	只是既有方法的逐步改良
教学可达性	史料能否变成学生可操作的任务？	教学设计草案、教师评审、试教记录	学生可操作、可讨论、可产生冲突	只能口头讲述或超出学生负荷

四条标准的组合规则如下：四条均通过，说明史料与障碍构成“结构相似”，可采用重构式设计；困难类型或发生环节不通过，说明这不是适合用历史解决的概念障碍，史料最多作为兴趣素材；困难类型、发生环节通过，而突破方式、教学可达性不通过，说明困难真实存在但这段史料帮不上忙，应另选史料或改用顺应式、复制式。需要强调的是，通过判定只说明史料具备教学使用的资格，能否真正突破障碍，仍取决于课堂实施与效果检验。

该框架适用于概念引入、定义建构与意义重建类课程，不适用于纯技能训练；应用流程为：诊断困

难→判定相似→选择并重构史料→设计任务→检验效果(见图 1)。

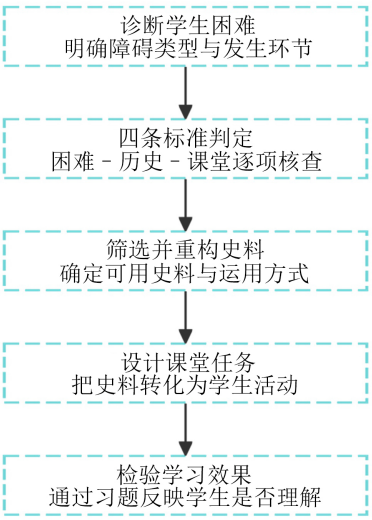


Figure 1. Flow of historical material judgement and teaching design
图 1. 史料判定与教学设计流程

4. 案例应用：导数的几何意义

4.1. 案例选择

选择导数的几何意义作为案例，因为切线是导数的几何入口，学生前概念稳定，且已有 HPM 课例与微积分史可供参照。本文属于文献层面的应用分析，学生障碍依据已有研究进行诊断，教学设计为示例。

4.2. 史料梳理

古希腊时期，切线是圆和圆锥曲线的静态几何对象。欧几里得在《几何原本》中将圆的切线定义为“与圆相接而不相交”的直线，即与圆只在一个点相遇、延长后不再穿过圆的直线；阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中将这一概念推广至椭圆、抛物线和双曲线，判断依据仍然是直线与曲线“只有一个公共点”。这类定义只数交点，不涉及运动，也不涉及极限，因此被称为静态定义。它在圆和圆锥曲线上十分直观，也正因为它直观，学生很容易将“只有一个交点”当成一切曲线切线的通用标准。

17 世纪，求切线成为微积分产生的重要推动力，静态定义的局限也随之暴露：一些直线与曲线只交于一点却不是切线，曲线在有些点的切线又会穿过曲线。费马用“准等式”方法逐步逼近切线斜率：在曲线上取一点，令横坐标增加一个很小的量 e，先写出一个近似的等式(他称之为“准等式”)，约去 e 之后再令 e 等于零，由此得到切线斜率；笛卡尔借助法线构造切线；而罗伯瓦尔(G. Roberval, 1602~1675)给出了另一种解释。他将曲线视为动点运动留下的轨迹，认为切线就是动点经过该点时运动方向所在的直线；通俗地说，如果一个小球沿曲线滚到这一点时突然脱离轨道，它飞出去的方向就是切线方向。切线由此第一次与“运动方向”联系起来，不再依赖交点个数来判断。

牛顿与莱布尼茨进一步将切线的斜率与增量比的极限联系起来：在曲线上取一个定点 P 和一个动点 Q，过 P、Q 作割线 PQ，两点纵坐标之差与横坐标之差的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就是割线 PQ 的斜率，牛顿称之为增量比；当 Q 沿曲线无限趋近 P 时，割线 PQ 所趋近的极限位置就是曲线在点 P 处的切线，增量比所趋近的值就是切线的斜率。切线由此从“与曲线交于一点”的静态直线，转变为割线位置的极限[15]。

这一转折为学生的认知冲突提供了历史对应物：前述 HPM 课例借助数学史与课堂留白，让学生经历从割线到切线的动态过程。切线概念的历史演进如图 2 所示。

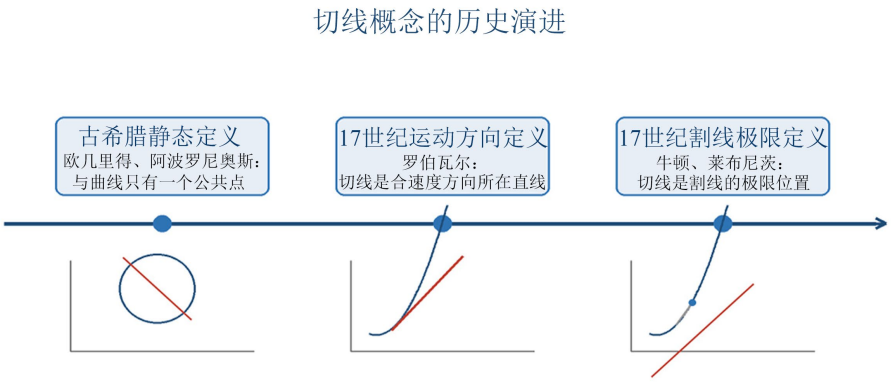


Figure 2. Historical development of the concept of tangent
图 2. 切线概念的历史演进

需要说明的是，切线概念的这段历史并不是一条整齐的直线。静态定义并未因新方法的出现而立刻退场，阿基米德仍以“公共点个数”定义螺线的切线；17 世纪的几种方法也几乎是并行出现的：费马与笛卡尔走的是代数路线，罗伯瓦尔走的是运动学路线，牛顿与莱布尼茨则将切线纳入一般的求变化率体系。它们各自针对不同的曲线、依赖不同的工具，谁也没有在当时“取代”谁。今天教科书中的“割线极限”定义，是这些路线在后来的极限理论中逐步汇合的结果，而不是某一位数学家的孤立发明。

基于这一认识，本文在史料梳理之后作了取舍：以罗伯瓦尔与牛顿的方法作为教学突破口，而不以费马或笛卡尔的方法为主线。理由有两点。其一，它们与学生的障碍形成结构对应：学生的困难集中在“从静态走向动态”这一步，罗伯瓦尔的运动方向定义先将切线还原为可以想象的运动方向，牛顿的割线极限定义再把这一方向转化为可以计算的斜率，两者恰好支撑了这一转化。其二，它们能被压缩为学生可操作的任务：小球脱离轨道的方向、GeoGebra 中动点沿曲线趋近，都是课堂上可以当场演示和讨论的活动。相比之下，费马的准等式法要求学生连续完成写出近似等式、约去 e、令 e 等于零这三步代数操作，学生难以说明“为什么可以令 e 等于零”，概念冲突也不足以引发讨论；笛卡尔借助法线构造切线，需针对具体曲线求解方程组，技术性强而普遍性弱；莱布尼茨的两点逼近与牛顿思路相近，却少了从静态到动态的过渡。因此，费马的准等式法在本设计中不作为突破口，而是在学生理解“割线极限”之后作为历史背景出现，用来对照“把增量抹掉”与“取极限”的区别。

4.3. 学生障碍诊断

依据前述 HPM 课例与已有课堂观察，学生在“导数的几何意义”上主要有四类困难：将切线理解为“与曲线只有一个交点的直线”；不能接受切线与曲线相交；难以理解割线无限趋近的极限过程；会求导却不能把导数 $f'(x_0)$ 与切线斜率联系起来。从概念学习理论看，这属于“概念意象”与“形式定义”的分离[16]。上述障碍主要依据已有研究判断。

本文的障碍判断主要依据已有 HPM 课例与相关认知研究，并结合教材文本与概念分析进行综合判断。

4.4. 逐条判定

判定前先筛选候选史料：只用欧几里得的静态定义，只能提供前概念对照，难以突破；只用费马的

准等式法，技术性强而概念冲突不足；只用莱布尼茨的两点逼近，缺少从静态到动态的过渡。最终选择静态定义作“困难的历史对应”，罗伯瓦尔与牛顿作“可转译的突破”，逐项判定见表 2。

Table 2. Item-by-item judgement and treatment of the candidate historical materials
表 2. 候选史料的逐项判定与处理

候选史料	困难类型	发生环节	突破方式	教学可达性	处理方式
欧几里得的圆切线定义	通过	通过	不通过	通过	作为学生前概念的历史对照
阿波罗尼奥斯圆锥曲线切线定义	通过	通过	不通过	通过	作为补充反例，不作主线
费马的准等式法	部分通过	通过	部分通过	待改造	作为方法性史料，供教学设计改造
罗伯瓦尔的运动方向定义	通过	通过	通过	通过	采用，作为静态到动态的过渡
莱布尼茨的两点逼近定义	通过	通过	通过	部分通过	采用，作为割线极限的补充
牛顿的割线极限与增量比	通过	通过	通过	通过	采用，作为主线突破

四条标准均通过：困难属于切线概念层面，处在静态定义向动态极限转换的关键处；历史上的运动方向定义与割线极限定义提供了可转译的突破；动态软件可将割线“动起来”。因此，历史相似性成立，宜采用重构式。案例分析要素见表 3。

Table 3. Analysis elements of the case of the geometric meaning of the derivative
表 3. 导数几何意义案例的分析要素

分析要素	内容
概念	导数的几何意义：曲线在某点切线的斜率与瞬时变化率
历史事件	古希腊的静态切线定义；17 世纪费马、笛卡尔、罗伯瓦尔的求切线方法；牛顿与莱布尼茨的增量比与极限
学生障碍	将切线等同于“只有一个交点”；不能接受切线与曲线相交；难以理解割线极限；切线与导数脱节(文献诊断)
判定结果	四项标准均通过，历史相似性成立，可采用重构式
课堂任务	比较“一个交点”与“割线极限”两种切线观；用动态软件演示割线趋近；由切线斜率连接导数定义
检验设想	能否用割线极限解释切线；能否由导数求切线斜率；能否识别“只有一个交点”并非切线定义

4.5. 教学设计示例

依据判定结果，参照已有 HPM 课例，本设计以“静态定义失效–动态定义登场”为主线，采用“情境 + 问题链 + 师生对话”的方式展开，分为五个环节：课堂说明交代本课要解决的问题，情境导入让学生用旧定义判断三个例子，历史对话借助三张定义卡比较三种解释，数形结合将割线趋近转化为可计算的斜率，巩固小结用反例检验新定义是否被接受。各环节的史料选择依据都在每节开头说明。

4.5.1. 课堂说明

设计说明：本环节不涉及具体史料，作用是在情境展开之前，由教师向学生交代本课要解决的问题，并将“切线就是与曲线只有一个交点的直线”这一前概念提前引出，为后面的判断与冲突做准备。

师：前面几节课我们学了导数，知道 $f'(x_0)$ 表示函数在 x_0 附近变化的快慢。你还记得导数是怎么算出来的吗？

生：先算平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，再让 Δx 趋近于 0。

师：很好。那$\frac{\Delta y}{\Delta x}$在函数图象上表示什么？我们回到图象上看：在曲线上取两点 P 和 Q，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$正好是直线 PQ 的斜率。当 Q 沿曲线不断靠近 P 时，直线 PQ 会趋于一个确定的位置，这个位置上的直线就是曲线在 P 处的切线，它的斜率正好是导数$f'(x_0)$。这就是我们这节课要研究的导数的几何意义。

师：不过在说明它之前，先要回答一个更基本的问题：什么样的直线才算切线？

生：和曲线只有一个交点的直线吧。

师：这是初中判断圆的切线时用过的说法，在圆上确实管用。可如果换一条曲线，比如抛物线，再比如$y=x^3$，它还成立吗？

师：先来看几个例子。

4.5.2. 情境导入

史料选择说明：本环节选择欧几里得的圆切线定义，是因为它对应学生“切线只有一个交点”的前概念，对应困难类型与发生环节两条标准。

教师依次展示图 3 中的三个例子：直线l_1与圆只交于最上面的一点；直线l_2与抛物线$y=x^2$只交于原点；直线l_3与曲线$y=x^3$也只交于原点，但它穿过了曲线。请学生判断：这三条直线中，哪些是曲线的切线？

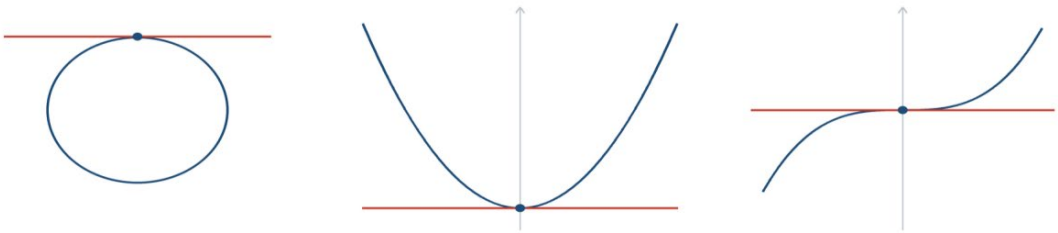


Figure 3. Three examples to be judged
图 3. 三个例子

师：图 3 中的这三条直线，哪些是曲线的切线？

生 1：l_1和l_2吧？它们和圆、抛物线都只交于一个点。

生 2：l_3也只交于一个点，可它穿过了曲线。

师：也就是说，“只有一个交点”能判断前两条，却无法解释第三条。那判断切线的标准，还缺什么？

4.5.3. 历史对话

史料选择说明：本环节选择古希腊静态定义、罗伯瓦尔的运动方向定义和牛顿的割线极限定义，是因为它们提供了解释力逐渐增强的三种历史方案，能够将学生的争论引向“再表征”的突破，对应突破方式标准。

教师发放三张定义卡(图 4)，每张卡上只写一条定义。第一张是古希腊的静态定义：切线是与曲线只有一个公共点的直线。第二张是罗伯瓦尔的运动方向定义：将曲线看成动点运动留下的轨迹，切线就是动点在该点运动方向所在的直线，如果小球沿曲线滚到这一点突然脱离轨道，它飞出去的方向就是切线方向。第三张是牛顿的割线极限定义：在曲线上取定点 P 和动点 Q，当 Q 沿曲线无限趋近 P 时，割线 PQ 所趋近的极限位置就是切线。教师请每位学生选择一张卡，并用前面的三个例子检验它。

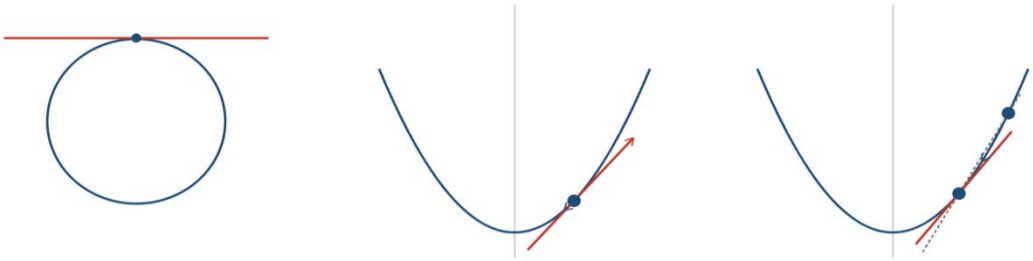


Figure 4. Schematic diagram of the three definitions of the tangent
图 4. 三种切线定义的示意图

师：这三张卡其实是三把尺子：一把数交点个数，一把看运动方向，一把看割线的极限位置。请你用自己选的这把尺子，去量刚才的三个例子。

生 3：我支持“只有一个交点”，因为圆和抛物线都能解释。

生 4：可是 $y=x^3$ 的切线穿过了曲线，这个定义解释不了。

师：那么另外两把尺子呢？请用运动方向和割线极限分别解释第三条直线。

生 5：运动方向可以。点沿曲线运动到(0, 0)时是水平经过的，因此切线就是那条水平的直线 $y=0$。

生 6：割线极限也可以。让另一个点沿曲线趋近(0, 0)，割线越来越接近 $y=0$，极限位置就是切线。

师：两种新定义都能解释第三条直线，而“只有一个交点”不能。这说明切线的定义经历了从“交点个数”到“运动方向”和“割线极限”的转变。

4.5.4. 数形结合

上一环节结束时，“割线极限”还只是一种定性的说法：学生知道让另一个点沿曲线趋近定点，割线就会趋近切线，但割线的斜率怎样随两点的靠近而变化、切线的斜率究竟等于多少，都还没有算过。本环节的任务就是将这句话变成可以计算、可以看见的量。

史料选择说明：本环节选择费马的准等式法(见图 5)和牛顿的增量比，是因为两者都从两点之间的增量比出发，能将“割线趋近”转化为可以计算、可以看见的斜率变化，满足教学可达性标准。

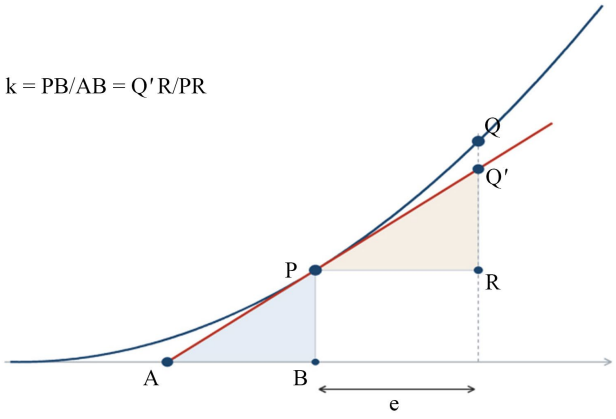


Figure 5. Schematic diagram of Fermat’s method of adequality
图 5. 费马的准等式法示意

计算之前，教师用两句话交代这两种方法的来路：费马的做法是在点 P 附近再取一点，让横坐标增加一个很小的量，先用近似等式求出一个比值，再将增量看作零，从而得到切线的斜率；牛顿的增量比

是两点纵坐标之差与横坐标之差的比，即割线 PQ 的斜率，两点越靠近，这个比就越接近切线的斜率。教师将这两句话交代清楚，再进入下面的具体计算。

教师提出任务：先用一个具体的函数将这件事算一遍，看看切线斜率是怎么“逼”出来的。

师：取 $f(x)=x^2$，要算曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线斜率。之后，在曲线上另取一点 $Q\left(1+\Delta x,(1+\Delta x)^2\right)$，割线 PQ 的斜率怎么表示？

生 7：两点纵坐标之差除以横坐标之差，就是 $\left[(1+\Delta x)^2-1\right]\Big/\Delta x$。

师：展开化简看看。

生 8：化简以后等于 $2+\Delta x$。

师：这个式子说明，割线的斜率随 Δx 变化。请取 Δx 等于 1、0.5、0.1、0.01、0.001，算出相应的割线斜率，填在表 4 中。

Table 4. Variation of the secant slope with Δx (taking $f(x)=x^2$ at $x=1$ as an example)
表 4. 割线斜率随 Δx 的变化(以 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处为例)

Δx	割线 PQ 的斜率
1	3
0.5	2.5
0.1	2.1
0.01	2.01
0.001	2.001

生 9：Δx 越来越小，割线斜率越来越接近 2。

师：Δx 无限趋近于 0 时，割线的斜率趋近于几？

生 10：趋近于 2。

师：这个 2 就是曲线在点 $(1,1)$ 处切线的斜率。运用 GeoGebra 将刚才的计算过程动起来(见图 6)。

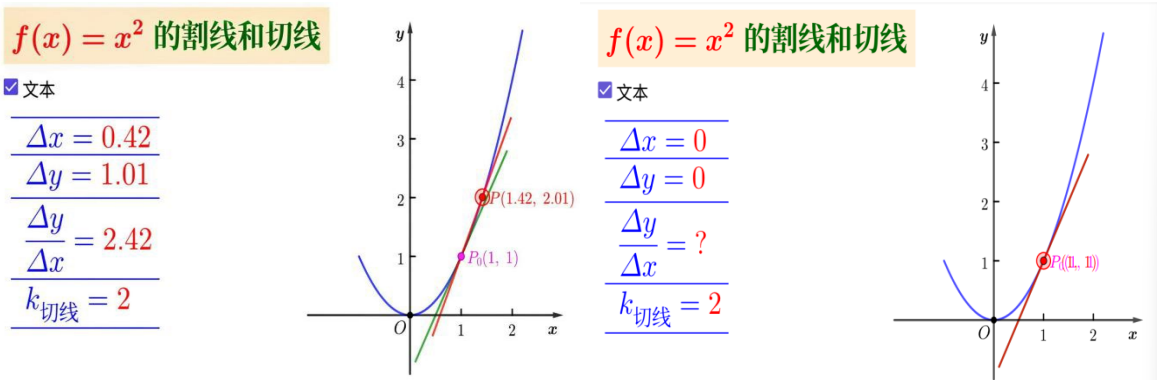


Figure 6. Secants approaching the tangent: the tangent as the limiting position of secants
图 6. 割线趋近切线：切线是割线的极限位置

师：把点 P 换成一般的点 $(x_0,f(x_0))$，上面做的事情就是让 $\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\Big/\Delta x$ 中的 Δx 无限趋近于 0，这个极限值正是导数 $f'(x_0)$。因此，曲线在 x_0 处切线的斜率就是 $f'(x_0)$，这就是导数的几何意义。

师：再回头看费马。他用近似等式先求出一个比值，再令增量等于零，得到的也是这个斜率，只是他没有说明这一步凭什么成立。

师：牛顿的增量比说的是同一件事的另一面——先将两点纵坐标之差与横坐标之差的比看作割线斜率，再让两点越来越近，他把“增量无限趋近于零时这个比趋近的值”作为切线的斜率。今天课本里的极限定义，正是将这两条线索统一了起来。

4.5.5. 巩固小结

上一环节将割线的斜率算了出来，得到了导数的几何意义。本环节用反例回头检验学生是否真的接受了新的切线定义，并总结整节课的结论。

史料选择说明：本环节选择 $y=x^3$ 在 $(0,0)$ 处的切线 $y=0$，是因为它能够检验学生是否真正摆脱“只有一个交点”的旧定义。

师：回到最开始的那个例子。曲线 $y=x^3$ 在点 $(0,0)$ 处，直线 $y=0$ 与它只有一个公共点，但它穿过了曲线。它还是切线吗？

生 11：应该是吧，可它穿过去了，我心里还是觉得别扭。

师：那我们用上一环节的办法检验一下。在 $y=x^3$ 上取点 $P(0,0)$ 和 $Q\left(h,h^3\right)$，割线 PQ 的斜率是多少？

生 12：纵坐标之差除以横坐标之差，就是 h^3/h，等于 h^2。

师：当 h 无限趋近于 0 时，h^2 趋近于几？

生 13：趋近于 0。

师：因此，割线 PQ 的极限位置就是 $y=0$。按割线极限的定义，$y=0$ 就是曲线在 $(0,0)$ 处的切线。刚才的别扭，来自旧定义只数交点的个数，没有考虑曲线在该点附近的方向。

师：再看一个例子。曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线是 $y=3x-2$，它与曲线除了 $(1,1)$ 以外，还在点 $(-2,-8)$ 处相交。可见切线与曲线可以有不止一个公共点，“只有一个交点”既不能保证一条直线是切线，也不能排除它是切线。

师：所以判断一条直线是不是切线，要看它是不是割线的极限位置，而不是数交点的个数。

师：请一位同学用一句话说说：今天我们学到的切线是什么？导数的几何意义又是什么？

生 14：切线是割线的极限位置；曲线在某点处切线的斜率，就是这一点的导数 $f'(x_0)$。

师：从“交点个数”到“割线极限”，从静态定义到动态定义，这是切线概念走过的路；而刻画这条切线倾斜程度的斜率，正是导数。导数的几何意义，就是曲线在某点处切线的斜率。

4.6. 案例小结

该案例表明，判定框架能将“学生困难－历史事件－课堂任务”连接起来。学生“切线只有一个交点”的前概念对应古希腊的静态定义，为从运动方向到割线极限的转折提供了可转译的突破；四条标准逐条通过之后，史料不再只是课堂上的背景故事，而成为一条设计线索：先让旧定义失效，再借助历史定义完成再表征，最后用反例检验新定义是否真正建立。反过来看，若只凭兴趣或经典选择史料，费马的准等式法虽然技术精巧，却难以独自承担从静态到动态的过渡，这条线索就搭不起来。可见这个框架的可操作性在于，它将“选史”变成有据可查的判断顺序，而不只是在最后给出一个结论。

5. 研究总结与启示

5.1. 研究总结

该框架将“选史”从经验判断转化为可参照的分析程序：教师须先提供障碍证据，再考察历史对应

与教学可达性，避免“有趣就用”的倒推式选史。四条标准的顺序本身就有约束力：困难类型与发生环节通不过，说明这个困难不适合用历史来解决；突破方式与教学可达性通不过，说明历史困难真实存在，但与学生的困难并不对应，应当另选史料或改用顺应式、复制式。这样，判断给出的不只是“能不能用”，还包括“用哪一段、以什么方式用”。

与已有导数 HPM 研究相比，本文的增量有三点：一是将问题从“史料如何融入课堂”前移到“史料为何值得选”；二是把历史相似性从理论假设变成可逐条核对的四条标准；三是让史料判定与课堂设计连成一条链，使选史的结论直接落到课堂任务上。导数的几何意义这一案例就是一次完整演示。

5.2. 教学启示

从教学实践看，该框架可为教师提供三点启示：第一，选史前先诊断学生的真实困难。历史困难与学生困难并不自动等同：有的困难在历史上十分突出，今天的学生却未必遇到；有的困难学生真实存在，历史上却找不到对应的波折。教师宜通过前测、作业或访谈确认学生究竟卡在哪个概念环节，再据此去找史料，避免把“历史上有过”直接当成“学生也有”。

第二，史料进入课堂前要经过“困难类型－发生环节－突破方式－教学可达性”的筛选，不能只凭有趣或经典。这四条标准的价值不在数量，而在于给出了先后顺序：先确认困难是否属于概念理解问题，再看它出现在概念生成的哪个环节，然后看历史是否提供了可转译的突破，最后看这段历史能否压缩为学生可操作、可讨论的任务。只凭兴趣选史，往往到第四步才发现走不通，此时再换史料，备课成本反而更高。

第三，重构式史料应与课堂活动相结合，为学生的表达、发现、论证与提问留出空间[17]，使史料真正服务于概念理解。史料不应止于教师讲完的一段背景，而应当成为学生活动的素材与评价的参照：学生自己提出的定义、对历史定义的取舍、对反例的判断，都可以成为判断概念是否真正理解的证据。

5.3. 适用条件

该框架并不适用于所有概念。以“算法”为例：算法教学的重点在于步骤的合理性、条件判断与循环结构，它的历史固然悠久(如欧几里得辗转相除法、中国古代的算法传统)，但历史上的算法与今天课堂所要教的算法在目标与表述上差异较大，学生的主要困难也集中在流程的理解与执行，而非概念意义本身；此时用历史去对应认知障碍，收益有限，范例演示、程序执行与对比纠错反而更为有效。类似地，偏重技能训练、符号运算或约定性内容(如运算顺序、符号规范)的教学，也不宜勉强套用这一框架。

另一方面，框架对教师的数学史素养、障碍诊断能力与史料转化设计能力都有较高要求，条件不具备时容易退化为“按标准填表”，因此有必要为教师减负。可以从三方面着手：一是开发基于本框架的教学资源包，按概念分类整理“学生常见障碍－可选史料－可转化的课堂任务－判定结果”的对应表，让教师从现成的候选材料出发，只需做本地化调整；二是将四条标准做成简明的备课清单，配以通过与否的示例，缩短判断时间；三是在教研活动中以课例为载体集体备课，由一位教师主讲、其他教师按标准评议，将个体的史料筛选经验转化为可共享的教研资源。随着数学史数据库与数字化史料平台的完善，检索和获取史料的成本也会逐步下降。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 唐洁琼. 数学史融入高中数学的概念教学[D]: [硕士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2015.

[3] 任明俊, 汪晓勤. 中学生对函数概念的理解——历史相似性初探[J]. 数学教育学报, 2007, 16(4): 84-87.

[4] Jankvist, U.T. (2009) A Categorization of the “Whys” and “Hows” of Using History in Mathematics Education.

Educational Studies in Mathematics, **71**, 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

[5] Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C.C., Isoda, M., Lit, C., Niss, M., *et al*. (2002) Integrating History of Mathematics in the Classroom: An Analytic Survey. In: Fauvel, J. and Van Maanen, J., Eds., *History in Mathematics Education*, Springer, 201-240. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

[6] 沈中宇. 数学史融入立体几何教学的行动研究——以直线、平面为例[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2017.

[7] 吴甬翔, 汪晓勤. 曲线的切线: 从历史到课堂[J]. 高等理科教育, 2009(3): 38-43.

[8] 王芳, 汪晓勤. HPM 视角下“导数几何意义”的教学[J]. 数学教育学报, 2012, 21(5): 57-60.

[9] 陈睿滢, 王智洋, 刘梦哲. 巧用课堂留白, 发展数学思维——HPM 视角下导数的几何意义的教学[J]. 数学教学, 2022(8): 45-50, 37.

[10] 赵瑶瑶, 张小明. 关于历史相似性理论的讨论[J]. 数学教育学报, 2008, 17(4): 53-56.

[11] Piaget, J. and Garcia, R. (1989) Psychogenesis and the History of Science. Columbia University Press.

[12] Radford, L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **17**, 26-33.

[13] 李兆强, 丁永刚, 庞燕霞. HPM 课例在高中数学概念教学中的开发研究[J]. 数学通讯, 2023(18): 6-9.

[14] Freudenthal, H. (1981) Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 133-150. https://doi.org/10.1007/bf00305618

[15] 波耶. 微积分概念史[M]. 上海: 上海人民出版社, 1977.

[16] Vinner, S. (1983) Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14**, 293-305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

[17] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.