Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 44-53
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112355

Hans汉斯

“问题驱动－案例贯穿－模型迭代”模式在农林高校高等数学教学中的实践

——以一阶线性微分方程为例

宣海玲[1*]，刘小林[1]，冉清华[2]

[1]浙江农林大学人工智能学院，浙江 杭州
[2]贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2026年9月30日；录用日期：2026年10月25日；发布日期：2026年11月2日

摘　要

针对农林高校高等数学教学理论脱离实际、学生应用能力薄弱的问题，文章基于认知冲突理论，提出“问题驱动－案例贯穿－模型迭代”教学模式。以一阶线性微分方程为核心，构建从马尔萨斯模型到逻辑斯谛模型再到松毛虫种群防控的递进案例链，将解析求解与数值模拟有机融合，引导学生实现从常量思维到变量思维、从经验直觉到数据驱动、从解题者到决策者的三重思维跃迁。实践表明，该模式有效激发了学生的学习兴趣，提升了其解决农林实际问题的数学建模能力。

关键词

高等数学，问题驱动，案例教学，农林高校

Practice of the “Problem-Driven, Case-Integrated, Model-Iterative” Model in Higher Mathematics Teaching at Agricultural and Forestry Universities

—Taking First-Order Linear Differential Equations as an Example

Hailing Xuan[1*], Xiaolin Liu[1], Qinghua Ran[2]

[1]College of Artificial Intelligence, Zhejiang A&F University, Hangzhou Zhejiang
[2]School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: September 30, 2026; accepted: October 25, 2026; published: November 2, 2026

[*]通讯作者。

文章引用: 宣海玲, 刘小林, 冉清华. “问题驱动-案例贯穿-模型迭代”模式在农林高校高等数学教学中的实践[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 44-53. DOI: 10.12677/ae.2026.16112355

Abstract

Addressing the issues of theory being detached from practice and students' weak application abilities in higher mathematics teaching at agricultural and forestry universities, this paper proposes a "Problem-Driven, Case-Integrated, Model-Iterative" teaching model based on cognitive conflict theory. Focusing on first-order linear differential equations, it constructs a progressive case chain from the Malthusian model to the Logistic model and then to the prevention and control of pine caterpillar populations. By organically integrating analytical solutions with numerical simulations, the model guides students to achieve a triple mindset shift: from constant thinking to variable thinking, from empirical intuition to data-driven approaches, and from problem-solvers to decision-makers. Practice has shown that this model effectively stimulates students' learning interest and enhances their mathematical modeling ability to solve practical agricultural and forestry problems.

Keywords

Higher Mathematics, Problem-Driven, Case-Based Teaching, Agricultural and Forestry Universities

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

高等数学作为农林高校重要的公共基础课程，承担着培养学生逻辑思维、抽象思维与数学建模能力的任务，为专业学习与科学研究奠定基础。然而，当前农林高校高等数学教学普遍面临三重困境：一是理论教学与专业应用脱节，教学内容与农林实际需求关联不足，学生面对专业问题无从下手，数学沦为“空中楼阁”[1]；二是学生“数学焦虑”与思维定式并存，中学阶段的“常量思维”根深蒂固，面对高等数学的“变量思维”时产生认知障碍，难以完成从“同化”到“顺应”的认知重构[2]；三是教学方式滞后于人才培养需求，信息技术融合不足、数据驱动思维培养薄弱，难以满足数字化农业对人才素养的新要求[3]。

认知科学研究表明，学生在数学建模中的障碍往往源于表征系统断裂——难以在文字语言、代数符号、图形表征与现实语境之间实现有效转换[2]。当数学符号无法激活学生头脑中的专业图景时，学习便只能停留在机械套用公式的浅层。新农科建设的深入推进对数学教育提出了更高要求，北京农学院、浙江农林大学等院校已开展“农数融合”、“四理育人”等有益探索[1] [4]，但如何系统地将问题驱动贯穿教学全过程、如何通过案例迭代引导学生实现思维跃迁，仍有待深入研究。

基于上述问题意识，本文聚焦“一阶线性微分方程”章节，提出并实践“问题驱动–案例贯穿–模型迭代”教学模式。该模式以认知冲突为起点，通过从马尔萨斯模型到逻辑斯谛模型的迭代案例链，引导学生实现从“常量思维”到“变量思维”、从“经验直觉”到“数据驱动”的双重跃迁，并将模型应用于松毛虫种群防控等农林实际问题，推动学生从“解题者”向“决策者”转变，为农林高校数学教学改革提供可资借鉴的路径。

2. 案例设计与教学实践

基于“问题驱动–案例贯穿–模型迭代”模式，本文设计了三阶递进的案例链：第一阶以认知冲突打破常量思维，引导学生“发现”微分方程；第二阶引入数据拟合方法，实现从经验估计到数据驱动的

转变；第三阶将模型应用于农林实际问题，推动学生从求解者走向决策者。

2.1. 第一阶：从“常量思维”到“变量思维”——马尔萨斯模型的认知冲突创设

例 1. 人口指数增长模型(Malthus 模型)

马尔萨斯(Malthus, 1766~1834)是英国的人口学家。他根据百余年的人口统计资料，于 1798 年提出著名的人口指数增长模型。

例 1 是一个阐释微分方程应用、模型构建思想以及模型局限性的经典入门案例，常用于引出可分离变量微分方程的教学内容，其核心思想在于揭示人口在无约束条件下的指数增长规律。在课堂教学中，通过引导学生分析这一历史模型，可以体现可分离变量微分方程在生活中的应用。为了更好地挖掘该引例的教学功效，在教学实践中对其进行了如下改变：

例 2. 全国人口普查是掌握我国人口发展实际状况的重要手段。表 1 为我国 1953~1982 年三次全国人口普查统计数据：

Table 1. Data of China’s three national population censuses from 1953 to 1982
表 1. 我国 1953~1982 年三次全国人口普查数据

普查年份(年)	1953	1964	1982
人口总数(亿人)	5.83	6.95	10.08

请根据数据预测第四次(1990)、第五次(2000)、第六次(2010)人口普查数据。

学生基于线性思维迅速给出预测：$(10.08-5.83)/29\approx 0.15$ 亿人/年，进而推得 1990、2000、2010 年人口分别为 11.28 亿、12.78 亿、14.28 亿。在这个过程中，学生们将人口年增长率看成是一成不变的，也就是每年增长 0.15 亿人口，是个常量。这样就仍然停留在中学阶段以静止的、常量的思维方式去观察问题、思考问题。在教学过程中，教师首先肯定学生的计算具有一定合理性，但紧接着提出一个追问：“若用这个线性模型(1953~1964 年数据)预测 1982 年人口，效果如何？”学生仍然先计算年均增长量：$(6.95-5.83)/11\approx 0.10$ 亿人/年，接着预测 1982 年人口为 $5.83+0.10\times 29\approx 8.73$ 亿人，与真实值 10.08 亿相差甚远。这一强烈反差制造了认知冲突。教师接着引导提问：“为何用 1953~1964 年数据推导的模型无法描述 1964~1982 年的增长？”学生讨论后意识到：人口年增长量并非固定值，用过去的固定增量预测未来是靠不住的——从而打破“常量”思维。

承认模型失败后，教师提出新方向：“既然年增长量是变化的，能否找到更稳定的量描述增长快慢？”学生通过查找资料发现人口基数是影响人口增长量的重要因素：现有人口越多，增长量越大，由此得出单位时间内人口增长量与当时人口成正比。师生一起建立模型：若设我国经过 t 年后有人口 p 亿人，则此时单位时间(1 年)人口的增加量可表示为：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=rp$，这样就得到了一个微分方程，它反映了人口增长率与现有人口之间的关系，而该方程即为可分离变量的微分方程的一种特殊情形！根据初始条件 $p(0)=p_0$，运用分离变量法求解模型即可得到：$p(t)=p_0\mathrm{e}^{rt}$。

思考 1. 认知冲突驱动下的深度学习。传统教学中，马尔萨斯模型往往作为引例直接给出，学生被动接受公式，机械套用求解，虽知其然却不知其所以然，学习停留在浅层模仿。本案例以认知冲突为突破口：当学生用熟悉的线性思维预测 1982 年人口，得到 8.73 亿而真实数据为 10.08 亿时，这一巨大偏差制造了皮亚杰所称的“认知失衡”——学生原有的“常量增长”图式无法同化新经验，被迫进入“顺应”过程，主动寻求新的认知结构[5]。此时，学生发自内心地问出“那应该用什么模型？”学习动机从外部灌输转向内在驱动，实现了从“为何学”到“如何学”的自然转换。这正是建构主义学习观的核心要义：知识不是被动接受的，而是在认知冲突中主动建构的。

思考 2. “引例 - 方程 - 解”的完整认知链条。本案例完整呈现了数学建模的两个核心环节，深刻诠释了一阶线性微分方程的教学价值：

1) 方程的建立——数学建模能力的培养：从实际问题中提炼数学关系，是数学建模的核心能力，也是最容易被忽视的教学环节。本案例引导学生从“人口增长量与基数成正比”这一现实规律出发，将其翻译为微分方程 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = rp$，完整经历了“现实问题 - 数学抽象 - 模型构建”的建模循环。学生在建模过程中，不仅掌握了知识，更理解了知识从何而来，为何如此。

2) 方程的求解——数学方法的掌握：方程 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = rp$ 是讲解分离变量法最直观、经典的范例。求解过程 $\mathrm{d}p/p = r\mathrm{d}t \rightarrow \ln|p| = rt + c \rightarrow p = p_0\mathrm{e}^{rt}$，逻辑清晰、步骤分明。由于学生已经理解了方程的现实意义，对求解的每一步都更加投入，实现了从“机械模仿”到“意义理解”的升华。

2.2. 第二阶：从“经验直觉”到“数据驱动”——模型验证与参数优化的科学启蒙

在初步建立马尔萨斯模型并求解得到 $p(t) = p_0\mathrm{e}^{rt}$ 后，学生自然产生新的疑问：如何验证该模型的有效性？这正是数学建模循环中不可或缺的“模型验证”环节。传统教学中，模型验证往往被简化为“代入几个点看看”，学生难以体会数据在模型优化中的核心作用。本阶段以此为切入点，引导学生从“经验直觉”走向“数据驱动”的科学思维。

例 3. 表 2 列出了中华人民共和国成立后的前六次人口普查数据，请验证例 2 模型的正确性。

Table 2. Data of China’s six national population censuses from 1953 to 2010
表 2. 我国 1953~2010 年六次全国人口普查数据

普查年份(年)	1953	1864	1982	1990	2000	2010
人口总数(亿人)	5.83	6.95	10.08	11.34	12.66	13.40

学生首先自然选取 1953 年为初始时刻，并采用“端点法”——仅利用首尾两点(1953 年与 2010 年)估算增长率。

$13.40 = 5.83 \times \mathrm{e}^{r\cdot 57} \Rightarrow r = \dfrac{\ln(13.40) - \ln(5.83)}{57} = \dfrac{2.595 - 1.763}{57} \approx 1.46\%$，由此得到 $p(t) = 5.83\mathrm{e}^{0.0146t}$。用此模型回代各年份，计算绝对误差与相对误差，得到表 3。

Table 3. Fitting results of six-time census data (endpoint method)
表 3. 六次普查数据拟合情况表(端点法)

普查年份(年)	实际人口(亿人)	时间 t(年)	模型预测值(亿人)	绝对误差(亿人)	相对误差
1953	5.83	0	5.83	0.00	0.00%
1964	6.95	11	6.82	−0.13	−1.87%
1982	10.08	29	8.84	−1.24	−12.30%
1990	11.34	37	10.00	−1.34	−11.82%
2000	12.66	47	11.60	−1.06	−8.37%
2010	13.40	57	13.40	0.00	0.00%

表 3 数据显示，除了两端，其余年份的预测值均小于实际值，且相对误差最高达到−12.3%。学生直观感受到“仅依赖端点”的局限性——这种估计方式本质上仍是经验直觉的延伸，忽略了中间数据蕴含的丰富信息。接着引导学生借助 AI 找出更优的 p_0 和 r。AI 给出了运用最小二乘法来进行拟合，得到的 p_0 和 r 分别为 $p_0 \approx 6.03$，$r \approx 1.54\%$，最终得到表 4 的结果：

Table 4. Fitting results of six-time census data (least-squares method)
表 4. 六次普查数据拟合情况表(最小二乘法)

普查年份(年)	实际人口(亿人)	模型预测值(亿人)	绝对误差(亿人)	相对误差
1953	5.83	6.03	0.20	3.43%
1964	6.95	7.15	0.20	2.88%
1982	10.08	9.43	−0.65	−6.45%
1990	11.34	10.67	−0.67	−5.91%
2000	12.66	12.45	−0.21	−1.66%
2010	13.40	14.52	1.12	8.36%

通过对比学生发现最小二乘法得到的最大误差更小，预测值围绕真实值分布，同时也有不少学生对最小二乘法产生兴趣。教师简要介绍最小二乘法的思想，使得学生了解最小二乘法可以转化为求解下面优化问题：

$$\min_{p_0,r}\sum_{i=1}^{6}\left(p_i-p_0\mathrm{e}^{rt_i}\right)^2$$

为了比较端点法和最小二乘法的效果，将两种方法的拟合结果放在一起进行比较，得到图 1。结果显示，最小二乘法在拟合效果上具有明显的优势。

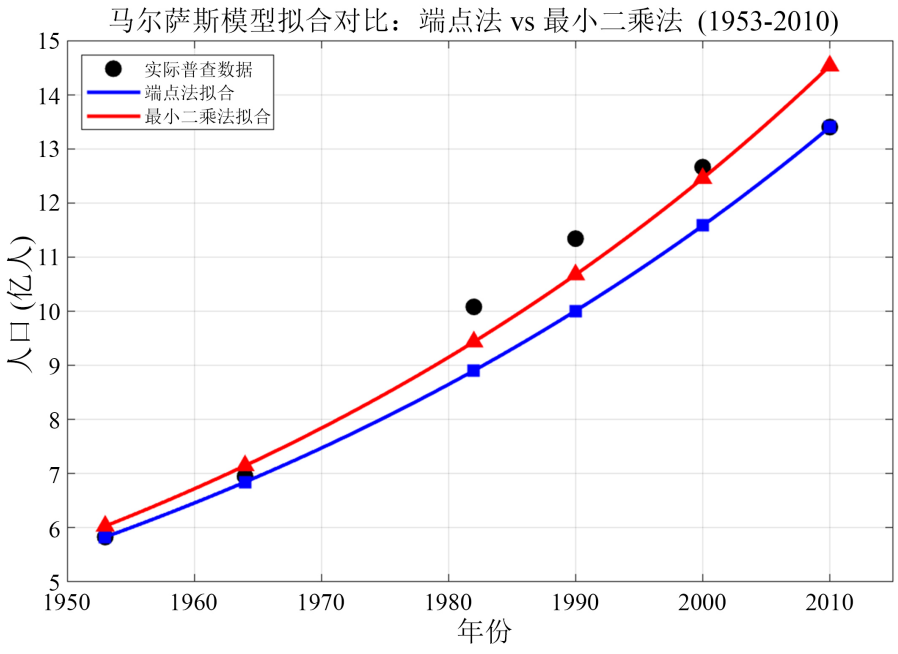


Figure 1. Comparison of fitting effects between endpoint method and least-squares method
图 1. 端点法和最小二乘法拟合效果对比图

思考 1：从“端点估计”到“整体优化”——数据驱动思维的启蒙。端点法仅依赖两个数据点，本质上仍是经验直觉的延伸；而最小二乘法利用每一个数据点，通过全局优化获得最具鲁棒性的模型参数。这一转变正是“数据驱动思维”的核心要义——不是凭直觉选择个别点，而是让全部数据说话。学生在

对比中领悟到：科学的模型不是主观臆断的产物，而是经得起数据检验的客观存在。更重要的是，学生在反复的“预测–检验–修正”中，逐步建立起批判性思维与科学探究精神——任何模型都有其适用范围，真正的科学态度不是盲目相信模型，而是用数据不断质疑、修正模型，这正是模型验证的教育价值所在。

思考 2：从“算法黑箱”到“认知支架”——人工智能赋能数学教学的路径探索。教学中允许学生暂时将最小二乘法视为“黑箱”，借助 AI 直接获得优化结果。这种处理符合认知负荷理论——避免初学者陷入复杂推导而丢失主线；同时，AI 作为“认知支架”，帮助学生快速体验数据驱动建模的全流程，激发后续学习多元函数极值、矩阵运算等内容的内在动机。当学生在高等数学后续课程中正式学习最小二乘法时，这段经历将成为宝贵的“前理解”，实现“由惑到悟”的认知闭环。这种“先使用后理解”的教学策略，既尊重了学生的认知规律，又为后续深度学习埋下了伏笔，体现了人工智能时代数学教学范式的转型——从“算法推导为中心”走向“思想理解与应用能力并重”。

2.3. 第三阶：从“解题者”到“决策者”——模型迭代在农林实际问题中的应用

在完成模型的建立与验证后，学生已初步掌握微分方程建模的基本方法。然而，数学模型的真正价值不在于描述过去，更在于为现实决策提供科学依据。本阶段以此为切入点，引导学生从“求解模型”到“应用模型”、从“解题者”转变为“决策者”。

例 4. 根据上例，以及表 5 国家七次人口普查结果，预测 2025 年、2030 年和 2050 年我国人口情况。

Table 5. Data of China’s seven national population censuses from 1953 to 2020
表 5. 我国 1953~2020 年七次全国人口普查数据

普查年份(年)	1953	1864	1982	1990	2000	2010	2020
人口总数(亿人)	5.83	6.95	10.08	11.34	12.66	13.40	14.12

有了上题的经验，学生借助 AI 很容易找出了 p_0 和 r，并预测出 2025 年、2030 年和 2050 年人口分别为 16.79 亿人、17.99 亿人和 23.70 亿人。然而，将模型预测曲线与真实数据对比(图 2)发现：在 20 世纪 50 至 90 年代，理论曲线与实际数据高度吻合；但自 2000 年起，尤其是 2010 年之后，真实数据开始显著偏离并低于模型预测曲线。这一偏离直观地揭示了马尔萨斯模型的根本局限——恒定增长率的假设在长期无法成立。事实上，2010 年后我国人口增速明显放缓，2020 年后更呈现见顶回落趋势，标志着人口增长模式从“高增长”进入“低速增长”乃至“负增长”的新阶段。

思考 1. 从“模型应用”到“模型批判”——科学思维的深化。学生亲历“模型建立–预测应用–发现偏差–反思局限”的完整过程，深刻体会到：任何数学模型都有其适用边界，科学的任务不是盲目套用公式，而是不断用现实检验、修正甚至推翻模型。这正是波普尔所强调的“证伪”思想——科学进步通过不断证伪实现[6]。学生在分析模型偏差时，自然触及人口政策、可持续发展等社会议题，实现了从“数学符号”到“历史认知”的意义延伸，真正达成知识传授、能力培养与价值引领的有机统一。

思考 2. 从“解题者”到“决策者”——决策思维的启蒙。学生面对“预测失灵”自然追问：既然模型失效，该用什么模型？能否引入新因素改进？这些问题没有标准答案，却指向复杂的现实决策情境。学生在追问中理解：真正的决策者不是拿着公式计算的人，而是在不确定条件下综合多因素做出权衡判断的人。这种强调数据、模型和预测的思维方式，与人工智能、大数据分析的前沿逻辑一脉相承，为学生未来面对真实农林问题奠定了思维基础，教师也实现了从知识传授者到探究引导者的角色转变。

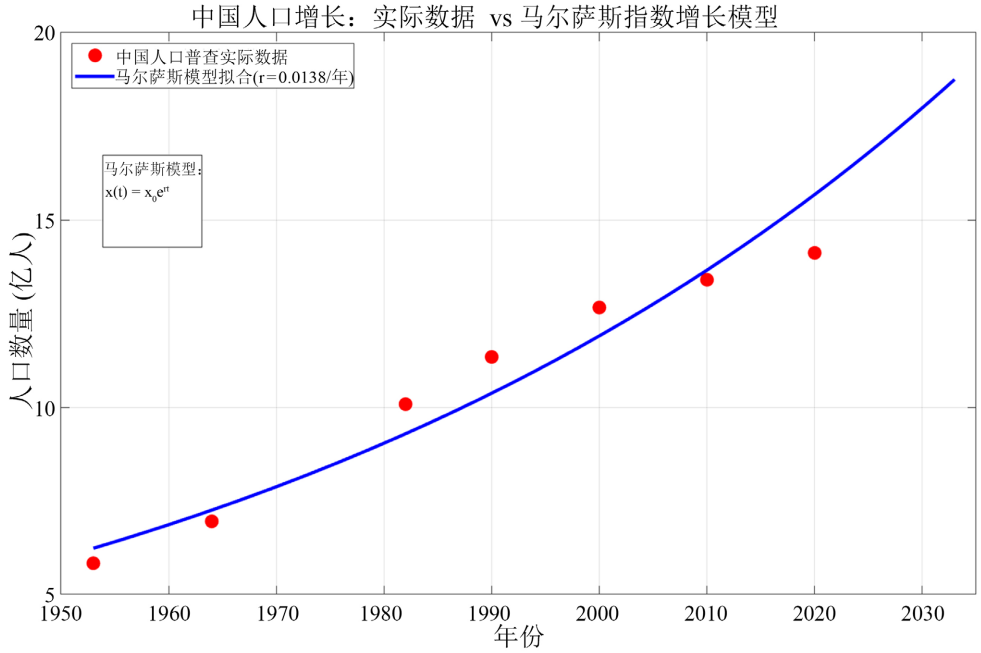


Figure 2. Fitting effect of the Malthusian model
图 2. 马尔萨斯模型拟合效果图

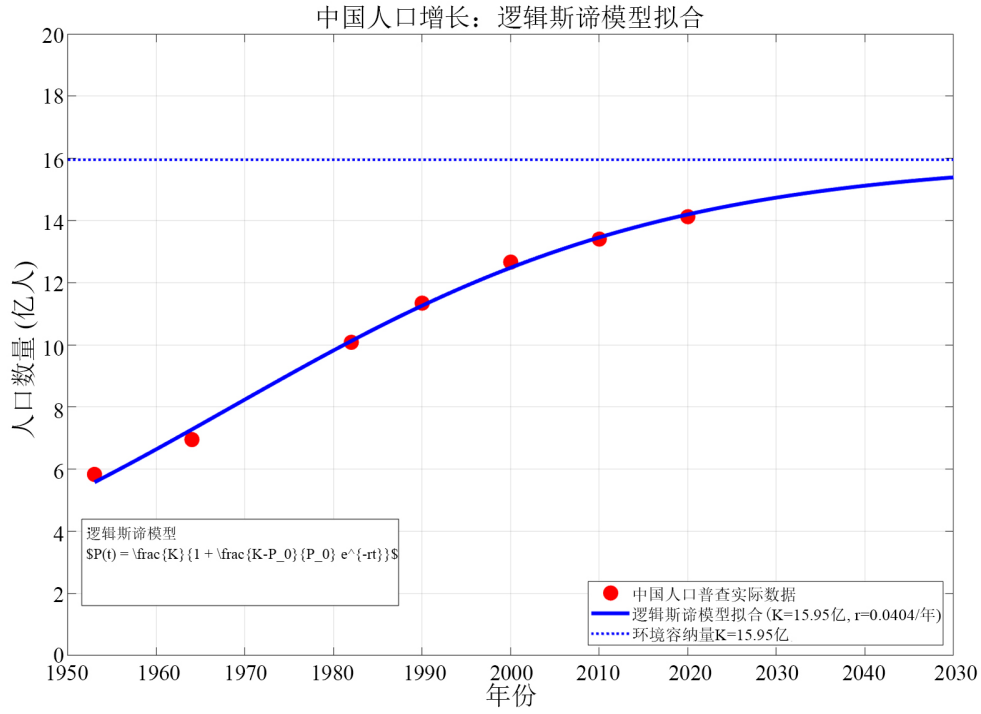


Figure 3. Fitting effect of the logistic model
图 3. 逻辑斯谛模型拟合效果图

例 5. 请建立更合适的模型拟合我国人口普查数据。

在揭示马尔萨斯模型的局限后，教师并不直接给出新模型，而是引导学生思考：究竟是什么因素限制了人口的无限增长？学生通过讨论意识到食物、空间、水资源等“环境阻力”的作用，从而自然引出

环境容纳量 K 的概念。基于“人口增长率随数量增加而下降”的合理假设，师生共同建立逻辑斯谛方程：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = rp\left(1-p/K\right)$，该方程仍为可分离变量型，求解得 $p\left(t\right)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{p_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}$。

借助 AI 和 MATLAB 工具，通过最小二乘拟合这一数值优化过程，得到合适的 p_0、r 和 K，画出实际值和预测值，并估计 2025、2030、2050 年的数据分别为 14.49 亿人、14.73 亿人和 15.39 亿人。将拟合曲线与真实数据对比(图 3)，发现实际数据点几乎完美落在理论曲线上，与马尔萨斯模型的“J”形无限增长形成鲜明对比——逻辑斯谛模型的“S”形曲线揭示了“负反馈”机制的存在，任何增长终将趋于平稳。

思考 1. 从“线性外推”到“非线性思维”——科学认知的深化。学生亲历“提出问题→建立模型→检验模型→发现不足→改进模型”的完整闭环，用实际数据作为模型的“最终裁判”。逻辑斯谛方程中的$(1-p/K)$项，数学上是一个因子，哲学上是一种智慧——负反馈。学生在模型迭代中领悟到：科学认知正是在不断“证伪–修正”中逼近真实世界。

思考 2. 从“基础数学”到“前沿应用”——知识迁移的价值引领。逻辑斯谛模型是许多高级内容的基石：其 S 型曲线是机器学习中 sigmoid 函数的来源，逻辑斯谛回归常与随机森林等算法结合用于林火预测等农林场景[7]。本环节让学生看到，课堂上的微分方程竟与人工智能、生态建模等前沿领域紧密相关，从而激发“学以致用”的专业认同感，为后续学习奠定思维基础。

农林高校数学教育的根本目标，是培养能够运用数学思维解决农林实际问题的复合型人才。逻辑斯谛模型作为描述生物种群增长的经典工具，在森林保护、病虫害防治等领域具有广泛的应用前景。为此，以松毛虫种群防控为案例，引导学生完成从“理解模型”到“应用模型”的关键一跃。

例6. 某林场发现松树林中松毛虫种群数量激增。已知松毛虫种群增长受食物(松针)、天敌(鸟类)和密度制约效应影响。林场面临的决策困境在于，干预过早或措施不当可能增加不必要的经济成本且效果不彰；而干预过晚或措施不力，则可能错失控制良机，导致虫害迅速蔓延，造成巨大的经济损失(历史上曾有案例造成数百万立方米木材生长量损失和千万元级别的经济损失)和生态破坏。请帮助林场制定科学防治策略：在适当时机，采取适宜措施，以合理的成本投入，将松毛虫种群数量持续控制在经济危害水平之下，保障森林健康与生态安全。

基础数据：松毛虫种群初始密度 $p_0=100$ 只/株(每棵树平均虫数)，环境最大承载容量 $K=100$ 只/株(受食物限制)，虫口自然增长率 $r=0.1$/天(无干预下的增值潜力)，每只鸟每日捕食量 $\beta=0.05$ 只/天(天敌作用强度)，人工喷洒农药的杀灭效率 $u\left(t\right)$ 为控制变量($0\le u\le 0.8$)。

首先，引导学生从题干中提取生物学机制与数学参数：种群增长受食物限制，存在环境容纳量 $K=100$ 只/株，符合逻辑斯谛增长规律，初步建立模型：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = rp\left(1-p/K\right)$。在教师引导下，学生进一步考虑天敌作用。虽未直接给出鸟类数量，但通过讨论估计天敌构成恒定捕食压力，每日总捕食量为 $5\beta=0.25$，在方程中引入常数负项 -5β。同时，人工防治的农药杀灭效率 $u\left(t\right)$ 与当前虫口密度 $p\left(t\right)$ 成正比，加入 $-u\left(t\right)p$ 项。由此得到扩展模型：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = rp\left(1-p/K\right)-5\beta-u\left(t\right)p$。模型建立后，学生自发提出关键问题：如何定义“防治成功”？经查阅资料与讨论，将“30 天内虫口密度低于 10 只/株”确定为目标阈值。

1) 运用解析法进行求解：

学生首先尝试解析求解。取 $u=0.1$ 代入方程：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = 0.1p\left(1-p/K\right)-0.25-0.1p$，化简得：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = -0.001p^2-0.25$，分离变量并积分：$\int \mathrm{d}p\Big/\left(p^2+250\right)=\int -0.001\mathrm{d}t$，代入初始条件：$p_0=100$，得到 $1\Big/5\sqrt{10}\arctan\left(p\Big/5\sqrt{10}\right)=-0.001t+1\Big/5\sqrt{10}\arctan\left(100\Big/5\sqrt{10}\right)$，将 $t=30$ 代入解得 $p\left(30\right)\approx 21.53$，未达到防治目标。将防治力度提高至 $u=0.2$，类似计算得 $p\left(30\right)\approx 0.39$，能够达到防治要求。

2) 运用欧拉法求数值解：

教师引导学生：能否借助计算机模拟不同 u 值下的种群动态？学生通过 AI 了解欧拉法的基本思想：

(1) 离散时间域：将连续的时间 t 用离散的时间点来表示：$t_0,t_1,\cdots,t_n$，通常采用等步长离散，即 $t_{n+1}=t_n+h$，其中 h 称为步长。

(2) 近似微分：根据导数的定义，在 t_n 时刻，上式可以写为

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_n} \approx \frac{p(t_{n+1})-p(t_n)}{t_{n+1}-t_n}=\frac{p_{n+1}-p_n}{h}$$

建立离散方程：方程左边的导数用上面的差分来近似，方程右边在时刻 t_n 计算，得到迭代格式：$p_{n+1}=p_n+h\left[rp_n\left(1-p_n/K\right)-5\beta-u\left(t_n\right)p_n\right]$。该离散方程是一个关于 p_{n+1} 的线性方程，只要给定初始条件 p_0 和步长 h，就可以像套用公式一样，一步步算出所有 p_n。借助 MATLAB 编程得出，当 $u=0.1$ 时，$p(30)=21.54$；当 $u=0.2$ 时，$p(30)=0.32$，与解析解高度一致(图 4)。随着 u 从 0.1 变成 0.2，防治力度升高，成本也升高，学生自然产生疑问：是否存在一个介于两者之间、既能达标又成本最低的防治力度？学生尝试从微分方程出发进行解析推导，将模型改写为：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=-0.001p^2+(0.1-u)p-0.25$。

令 $A=-0.001$、$B=0.1-u$、$C=-0.25$，则方程化为：$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=Ap^2+Bp+C$。当判别式 $\Delta=(0.1-u)^2-0.001>0$，方程可分解为 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=A(p-m)(p-n)$，其中 m,n 为二次方程的两个实根。该方程仍然是一个可分离变量得微分方程，分离变量并积分得：$\frac{1}{m-n}\ln\left|\frac{p-m}{p-n}\right|=At+C$，代入初始条件得：$p(t)=\frac{n(m-100)-m(n-100)\mathrm{e}^{A(m-n)t}}{(m-100)-(n-100)\mathrm{e}^{A(m-n)t}}$。

然而，要从 $p(30)\le 10$ 反解出 u 极为繁琐，学生一致认为解析求解困难，转而借助数值方法，通过 MATLAB 工具最终求得 $u\ge 0.142$。即为了在达到防治目标的前提下最大程度地节省成本，应该选择 $u=0.142$ 作为人工防治力度。

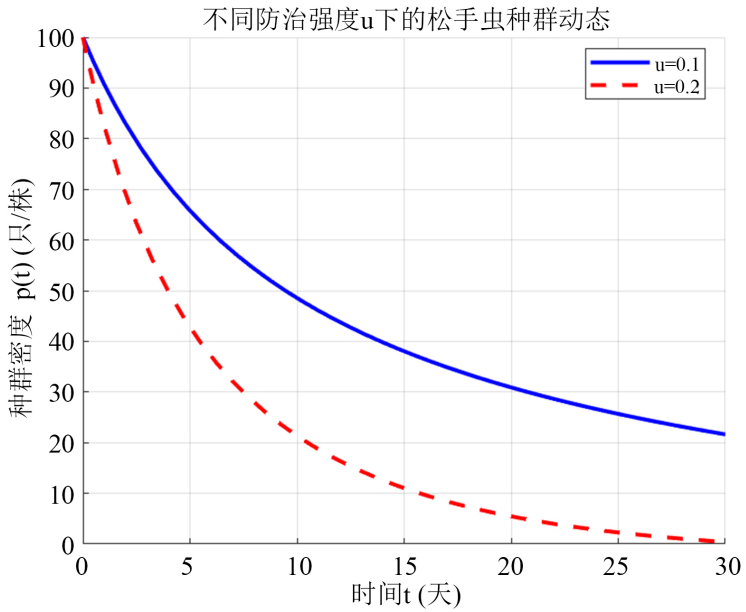


Figure 4. Population dynamics of pine caterpillar populations under different control intensities
图 4. 不同防治力度下时松毛虫种群动态

思考 1. 从“求解问题”到“科学决策”——综合应用闭环。学生经历“分析问题→扩展模型→数值求解→方案比选→科学决策”的全过程。在量化模拟与策略比较中，培养了数据驱动决策能力和系统优化思维，这正是新农科背景下复合型人才的核心素养。

思考 2. 从“解析数学”到“计算数学”——基本数值方法的初步掌握。

引入控制项$u(t)p$的模型框架，是最优控制理论在生态管理中的简单实例；欧拉法的实践应用，则是学生从解析数学迈向计算数学的关键一步。学生在“先使用后理解”的过程中，借助 AI 工具降低认知负荷[8]，快速体验数值模拟全流程，为后续处理复杂仿真问题奠定基础。

3. 教学效果与反思

本文以“问题驱动–案例贯穿–模型迭代”为主线，通过从马尔萨斯模型到逻辑斯谛模型再到松毛虫防控的递进案例链，将解析求解与数值计算有机融合，并融入 AI 思想与 MATLAB 等现代计算工具，引导学生在认知冲突中完成从“常量思维”到“变量思维”、从“经验直觉”到“数据驱动”、从“解题者”到“决策者”的三重思维跃迁。实践表明，该模式有效激发了学生的学习兴趣，深化了其对数学模型建构与批判性理解的全过程认知，特别是最后一个紧密结合农林专业的案例，让学生在解决真实问题中巩固了数学建模能力，为后续专业发展与科研创新奠定了扎实基础。

基金项目

浙江农林大学校级教学改革项目(JG2025035)；第二批浙江省高等教育“十四五”本科教学改革项目(JGBA2024284)；贵州大学校级本科教学内容和课程体系改革项目(XJG2024077)。

参考文献

[1] 申盼盼, 颜亭玉, 孔素然, 等. 高等数学教学创新与实践——以北京农学院为例[J]. 高等数学研究, 2025, 28(5): 33-35+82.

[2] 黄菁. 基于“超回归”数学理解模型的函数概念认知障碍研究[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2021.

[3] 张佳景. 农业新质生产力背景下涉农高校大学生农业数字素养与培育[J]. 河北农业大学学报(社会科学版), 2025, 27(4): 120-132.

[4] 刘小林, 张洪涛, 王慧. 新农科背景下农林院校大学数学“课程思政”建设的探索与实践——以浙江农林大学为例[J]. 创新教育研究, 2025, 13(2): 511-516.

[5] 皮亚杰. 发生认识论原理[M]. 北京: 商务印书馆, 1981.

[6] Popper, K.R. and Weiss, G. (1959) The Logic of Scientific Discovery. *Physics Today*, **12**, 53-54. https://doi.org/10.1063/1.3060577

[7] Krishna, A.J. and Padmakala, S. (2024) Efficient Prediction in Forest Fire Alert System Using Logistic Regression and a Novel Tree Specific Random Forest Classifiers. *AIP Conference Proceedings*, **3097**, Article 020225. https://doi.org/10.1063/5.0198644

[8] Sweller, J. (2010) Cognitive Load Theory. *Psychology of Learning and Motivation*, **55**, 37-76. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-387691-1.00002-8