Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 751-754
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112439

Hans汉斯

一阶非齐次线性微分方程通解的教学设计

孟红云，高卫峰，黎金环

西安电子科技大学数学与统计学院，陕西 西安

收稿日期：2026年10月5日；录用日期：2026年11月4日；发布日期：2026年11月11日

摘　要

针对一阶非齐次线性微分方程求通解时所用的常数变易法难于理解的问题，本文先利用类比和分离变量法解释常数变易法，以帮助学生更好地理解和掌握此部分内容；其次利用分组凑微分法又给出微分方程通解的一种求解思路和过程，以期开阔学生的求解思路，增强知识间的联系与融会贯通。

关键词

常数变易法，一阶非齐次线性微分方程，一阶齐次线性微分方程，通解

Teaching Design for the General Solutions of First-Order Nonhomogeneous Linear Differential Equations

Hongyun Meng, Weifeng Gao, Jinhuan Li

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi

Received: October 5, 2026; accepted: November 4, 2026; published: November 11, 2026

Abstract

To address the difficulty in understanding the method of variation of constants for the general solution of first-order nonhomogeneous linear differential equations, this paper first interprets the method of variation of constants by analogy and separation of variables to help students better understand and master this part. In addition, this paper presents another way using grouping differential method to broaden students' thinking and promote the integration of relevant knowledge.

Keywords

Method of Variation of Constants, First-Order Nonhomogeneous Linear Differential Equations,

文章引用: 孟红云, 高卫峰, 黎金环. 一阶非齐次线性微分方程通解的教学设计[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 751-754.
DOI: 10.12677/ae.2026.16112439

First-Order Homogeneous Linear Differential Equations, General Solutions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

常微分方程是数学的重要分支之一，广泛应用于物理学、工程学、经济学和生物学等领域。文[1]梳理了常微分方程课程教学方法研究，文[2]针对微分方程课程建设存在的问题，构建了一流课程常微分方程建设的具体实践路径，文[3]采用案例驱动教学法作为核心教学方法，重构课程教学框架，配套多种教学手段协同实施。文[4]指出常微分方程教学要构建以“用”为核心的教学新模式，利用信息技术降低计算复杂度。

常微分方程是大多数高校所开设的高等数学课程的重要组成部分，其教学重点内容之一是一阶线性微分方程，而对一阶非齐次线性微分方程来说，公式法、常数变易法[5]是教学中的重点和难点，且该方法可推广至高阶线性微分方程和高阶线性微分方程组。教学中发现，学生在常数变易法学习中存在一定的疑惑和困难。本文先利用类比和分离变量法解释常数变易法，以期帮助学生更好地理解该方法，然后利用观察、分析、联想，采用分组凑微分法又给出一种求一阶非齐次线性微分方程通解的思路与过程，以开阔学生思路，加强知识间的联系与融会贯通。

一阶线性微分方程的标准形式[5]如下

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

其中，$P(x),Q(x)$均为连续函数。

若$Q(x)\neq 0$，称(1)为一阶非齐次线性微分方程。若$Q(x)=0$，得方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{2}$$

称方程(2)为对应于方程(1)的齐次线性微分方程。方程(2)是可分离变量的方程，分离变量并两边积分可得(2)的通解$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，其中$C$为任意常数。

大多教材[5]或文[6]在给出一阶齐次线性微分方程(2)的通解后，一般会说，现在使用常数变易法求一阶非齐次线性微分方程(1)的通解，这种方法就是将方程(2)的通解中的常数C换作x的未知函数$C(x)$，可得方程(1)的解为$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，对其求导，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

将$y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$代入方程(1)得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

化简得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

即 $C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$。

两边积分得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

其中，C 为任意常数，进而得一阶非齐次线性微分方程(1)的解

$$y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \tag{3}$$

由于解(3)中含有一个任意常数，故为方程(1)的通解。部分同学对将方程(2)通解中的常数 C 换作 x 的未知函数 $C(x)$，可得方程(1)的解的做法不甚理解或存在疑惑。

为理解上述做法，以下先对方程(1)形式上进行分离变量，再类比方程(2)通解的求解过程，通过不定积分计算给出方程(1)的解的形式，通过比较方程(1)的解和方程(2)的解在形式上的差异，以此解释常数变易法。具体分析和解释过程如下。

若方程(1)中 $Q(x)\neq 0$，易知其解 $y\neq 0$。对方程(1)移项、变形有，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\left[\frac{1}{y}Q(x)-P(x)\right] \tag{4}$$

由于 y 是 x 的函数，故方程(4)右端方括号内仍为 x 的函数，分离变量得

$$\frac{dy}{y}=\left[\frac{1}{y}Q(x)-P(x)\right]dx \tag{5}$$

对方程(5)两端积分，并利用不定积分的性质得

$$\ln|y|=\int\left[\frac{1}{y}Q(x)-P(x)\right]\mathrm{d}x=\int\frac{1}{y}Q(x)\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1\quad(C_1\text{为任意常数})$$

或

$$y=C\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}Q(x)\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C=\pm\mathrm{e}^{C_1}\right)$$

由于 y 是 x 的函数，故 $\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}Q(x)\mathrm{d}x}$ 也为 x 的函数，乘以常数 C 仍为 x 的函数，记 $Ce^{\int\frac{1}{y}Q(x)\mathrm{d}x}=C(x)$，从而得方程(1)的解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$。将方程(1)的解 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 与方程(2)的解 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 进行比较，易于看到，在齐次方程(2)的通解中，将常数 C 换成关于 x 的函数 $C(x)$ 即可得方程(1)的解，这就是常数变易法。接下来，将 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入方程(1)，计算整理可得方程(1)的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$。

回顾以上过程，就是用了类比齐次方程(2)求通解的方法——分离变量法，再加上不定积分的性质和计算，至此，常数变易法也就不难理解了。但常数变易法也存在一些局限性，它仅适用于线性微分方程，当被积函数复杂时，不定积分的计算量可能较大。

实际中，遇到求方程(1)的通解时，有时也可根据微分方程的特点和形式，利用凑微分法求其通解。以下对方程(1)给出相应的求解思路和过程，以鼓励学生从不同角度思考问题，这有助于培养学生的发散思维能力。

注意到方程(1)左边是两项之和，联想到函数乘积的求导法则，注意到 $\left[\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right]'=P(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，若对

方程(1)两端同乘以 $e^{\int P(x)dx}$，则左端恰好是两可导函数乘积的导数，即

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=\left[e^{\int P(x)dx}y\right]'=Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{6}$$

对(6)式两边积分得

$$e^{-\int P(x)dx}y=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C \quad (C\text{ 为任意常数})$$

上式两边同除以 $e^{\int P(x)dx}$，得方程(1)的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]。$$

分组凑微分法求方程(1)通解的过程中，利用了积分上限函数求导和可导函数乘积的求导法则，通过观察、分析、变形、凑微分等方法，利用逆向思维可快速求出方程(1)的通解，但该方法技巧性强，对逆向思维和微积分计算要求较高，尤其当不定积分的被积函数表达式较复杂时，计算难度加大。

本文先对一阶非齐次线性微分方程采用类比和分离变量法解释常数变易法，其次采用观察、联想和逆向思维，通过凑微分法给出该方程的通解。文中尝试教给学生思考、解决问题的方法和途径，学会从不同角度解决问题，而非死记公式。一题多解既增强了知识间的联系，又开阔了学生的思路、深化了学生对知识的理解和融会贯通能力。

基金项目

2025 年陕西省教师教育改革与教师发展研究项目；2025 年陕西高等教育教学改革研究项目(SJS2025ZK039)。

参考文献

[1] Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A. and Medina, R. (2021) Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. *Mathematics*, **9**, Article 745. https://doi.org/10.3390/math9070745

[2] 张慧星, 朱传喜, 邵虎. 数学类一流本科课程建设的研究与实践——以“常微分方程”课程为例[J]. 数学教育学报, 2025, 34(6): 59-63.

[3] 隋莹. “案例驱动”的《常微分方程》课程教学创新与实践[J]. 教育进展, 2026, 16(2): 125-130. https://doi.org/10.12677/ae.2026.162273

[4] 李文涛, 刘明颖. “常微分方程”的教学改革与拓展[J]. 高等数学研究, 2026, 29(3): 54-56.

[5] 同济大学数学系. 高等数学(上册 7 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 314-316.

[6] 赵小艳, 李继成. 常微分方程求解中常数变易法思想的理解与应用[J]. 高等数学研究, 2019, 22(3): 44-46.