Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 994-1000
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112466

Hans汉斯

研究生《应用数学基础》课程教学困境与人工智能赋能下合情推理教学探索

信　秀

天津理工大学数学科学学院，天津

收稿日期：2026年10月6日；录用日期：2026年11月5日；发布日期：2026年11月13日

摘　要

针对非数学类硕士研究生《应用数学基础》课程面临的学生数学基础差异大、课时紧张、课内外探究衔接不足、考核重结果轻过程等现实困境，本文基于合情推理与支架式教学理论，设计课内由教师主导的“思维脚手架”和课外借助智能学伴实现的“猜想脚手架”，以此优化教学内容，构建课前预探究、课中猜想证明、课后拓展检验的完整教学链条，并将猜想讨论、探究笔记纳入平时成绩。该方案在不增设研讨课时的前提下使类比猜想探究贯穿课程全过程，为“知识传授、能力培养、价值塑造”三位一体育人目标的实现提供思路。

关键词

应用数学基础，合情推理，支架式教学，人工智能赋能，高阶思维

Exploration on Teaching Dilemmas and Plausible-Reasoning Teaching under AI Empowerment for the Postgraduate Course *Fundamentals of Applied Mathematics*

Xiu Xin

School of Mathematical Sciences, Tiangong University, Tianjin

Received: October 6, 2026; accepted: November 5, 2026; published: November 13, 2026

Abstract

To address the practical challenges in the course *Fundamentals of Applied Mathematics* for non-

文章引用: 信秀. 研究生《应用数学基础》课程教学困境与人工智能赋能下合情推理教学探索[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 994-1000. DOI: 10.12677/ae.2026.16112466

mathematics master's students, including students' different mathematical backgrounds, limited class time, insufficient connection between in-class and outside-class exploration, and assessment that values results more than processes, this paper is based on the theories of plausible reasoning and scaffolding instruction. It designs an in-class teacher-led "thinking scaffold" and an after-class "conjecture scaffold" supported by intelligent learning companions. On this basis, the teaching content is optimized to build a complete teaching chain for pre-class preliminary exploration, in-class conjecture and proof, and after-class expansion and verification. Students' conjecture discussions and inquiry notes are also incorporated into usual performance. This method needs no extra class hours for seminars. It enables analogical-conjecture-based exploration to run throughout the whole course. This provides a practical way to achieve the educational goals of "knowledge imparting, ability cultivation and value shaping".

Keywords

***Fundamentals of Applied Mathematics*, Plausible Reasoning, Scaffolding Instruction, AI Empowerment, Higher-Order Thinking**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

《应用数学基础》是理工科非数学类硕士研究生一年级的公共基础课，先修课程为高等数学与线性代数，课程共 48 学时，以线下授课为主，线上资源作为重要辅助。受总学时约束，课程全部为理论讲授课，无专门讨论与实践课时。课程教学注重代数、几何与分析观点的统一，内容从具体的向量空间 R^n 延伸至抽象空间，由数列、数项级数拓展为矩阵序列与矩阵级数，由普通一元函数过渡到方阵函数，体现出课程知识由具象向抽象类比推广，对学生类比归纳、逻辑推演等抽象思维能力提出较高要求。

针对研究生高层次人才培养，国家出台多项政策，强调研究生教育要注重创新意识和独立探究能力的提升。教育部《关于改进和加强研究生课程建设的意见》[1]提出，应尊重研究生主体地位，促进师生良性互动，通过案例式教学强化学生对创新过程的理解，着力培养研究生独立研究与解决实际问题的能力。《教育部国家发展改革委财政部关于加快新时代研究生教育改革发展的意见》[2]进一步明确，应提升研究生课程教学质量、创新教学方法，突出创新能力培养；《高等学校课程思政建设指导纲要》要求落实“知识传授、能力培养、价值塑造”三位一体育人目标[3]。

本文选用詹华英等编写的《应用数学基础教程——矩阵论》作为课程主教材[4]，教材体系完整，但教材内容大多直接呈现定义与定理结论，缺少知识生成的探究环节。

2. 课程现实困境与理论基础

本节先梳理教学中面临的现实困境，再介绍教学模式改革所依托的核心理论。

2.1. 课程教学面临的困境

(1) 学生数学基础差别较大，抽象公理内容不容易理解

本课程面向非数学类工科硕士研究生，学生本科专业各不相同，高等数学、线性代数基础差距明显。本科阶段大家主要学习向量空间 R^n 中向量的运算，但本课程开篇即引入抽象线性空间八条运算公理，用来描述一般集合上的加法、数乘，向量不再局限于普通数组。在此基础上，又借助公理体系给出抽象空

间上的内积定义，随后建立长度、夹角这类度量概念，再引出范数公理，搭建赋范线性空间，进而讨论收敛序列、级数等内容。多数学生习惯于套用公式进行数值计算，很难读懂抽象公理的由来、理清概念之间的联系，很难建立代数、几何、分析一体的数学思维。传统课堂多以直接给出公理、定理的方式展开，先呈现结论而后补充证明，缺少让学生一步步探索知识形成的过程。

(2) 学时有限，很难平衡理论讲授、工程应用与课程思政

课程一共 48 学时，全部是课堂讲授，没有专门的讨论课、实验课，内容多、知识点密。一方面要讲完线性空间、线性变换、矩阵标准形、矩阵分解、矩阵范数、矩阵函数等整套矩阵论内容；另一方面要结合各专业科研，介绍矩阵理论在工程里的实际用法，同时融入科研诚信、辩证思维、家国情怀等思政内容。课时紧张时易出现两种极端倾向：要么只顾理论推导，压缩工程案例和思政内容，课堂只剩公式推导；要么为了加入案例和思政，压缩核心理论授课时间，知识点讲授流于仓促。如何将大国工程、本土科研案例与知识点自然融合，落实“知识传授、能力培养、价值塑造”三位一体育人目标，是该课程教学中的突出难点。

(3) 课内外教学衔接不足，缺少抽象数学的探究支架

课程以线下授课为主，虽然配有线上资源，但课后可供拓展学习的载体不多，课内和课外的衔接不够顺畅。课堂上的难点、工程拓展思考很难在有限课时充分讲透，探究活动很难延续到课后。研究生本身科研任务重，课后学习多依赖自主安排；缺少配套引导任务，学生通常仅完成课后习题，很少主动猜想、深入探究。预习阶段，基础弱的学生没有思考抓手，难以独立完成类比猜想；课后，学生课上产生的猜想缺少渠道验证，课上搭建的思维引导没法延续到课外，“实例回顾 - 类比猜想 - 概念抽象 - 演绎证明”这条完整思维链就断了。

(4) 考核侧重最终结果，难以衡量学生高阶思维的成长

课程考核为平时成绩 30%，期末闭卷考试 70%。期末笔试重点考察矩阵论计算、定理应用，平时成绩主要看出勤和课后作业完成情况。该方式能够反映学生对知识点的掌握程度，但难以评价类比猜想、辩证思考等高阶思维的提升幅度。

2.2. 核心理论基础

上述多重教学困境，需要依托成熟教育理论寻找破解路径。本研究主要以合情 - 演绎推理理论、支架式教学理论作为改革支撑。

(1) 合情推理与演绎证明

合情推理与演绎推理是数学思维相辅相成的两个维度[5]。合情推理依托类比、归纳形成猜想，承担数学发现的功能；演绎推理对猜想开展严格逻辑验证，完成命题真伪确认，二者共同构成数学研究“先猜想后证明”的完整思维路径。落实到《应用数学基础》课程中，比如，由 R^n 中向量运算类比矩阵集合、多项式集合中运算性质，进而形成猜想属于合情推理；依托公理逐条验证集合性质、推导定理，则属于演绎证明。传统教学往往过度侧重演绎证明环节，省略猜想生成过程，造成学生机械记忆公理定理结论。

(2) 支架式教学及其在本研究的拓展

支架式教学建立在维果茨基提出的最近发展区理论之上[6] [7]。该理论将学习者能力划分为两个层次：一是无需外界帮助即可完成任务的现有发展水平，二是在外部提示协助下能够实现的潜在发展水平，二者之间的差距即为最近发展区。

教学脚手架是缩小上述认知差距的临时性认知辅助[6]。教学过程中，教师通过设问、实例、反例辨析等方式降低复杂学习任务的认知负荷；随着学生认知能力逐步提高，这类外部辅助需要逐步撤去，引导学生开展独立思考与自主探究。常规教学场景下，脚手架多由教师在课堂内部实施，主要服务于课堂

现场的思维启发。

支架式教学强调为学生提供适度的认知支持、逐步放手培养独立探究能力，为本课程设计课内外联动的探究载体提供了理论依据，具体设计方案见下面第 3 节。

3. 双重脚手架模式下的教学设计与实施

结合我们前面总结的课程实际问题，以合情–演绎推理、支架式教学为依据，从教学内容、课堂探究、教学流程、课程评价几个方面提出改进思路。

3.1. 优化教学内容取舍

本课程课时有限，很难同时兼顾理论推导、工程案例讲授以及课程思政落实。对此，需要在遵从教学大纲前提下对教学内容进行取舍调整：优先保障核心公理与定理推导的授课时间，夯实学生理论基础；选取典型的工程案例，将案例嵌入对应知识点，避免案例堆砌挤占理论教学时间；从课程知识本身挖掘辩证思维、严谨求真等科研素养作为思政载体，使理论学习、工程实例与课程思政自然融合；课堂开展猜想探究时严格控制用时，精选实例和反例，合理把握探究深度，不因探究活动挤占矩阵标准形、矩阵函数等核心模块的教学时间。

3.2. 构建“思维脚手架 + 猜想脚手架”探究模式

修读本课程的研究生数学基础差异较大，课内外的探究学习也难以顺畅衔接。对此，基于合情–演绎推理、支架式教学两大理论，设计“思维脚手架 + 猜想脚手架”，将课堂教师引导与课外 AI 工具辅助结合起来。

思维脚手架由教师在课堂主导开展。教学时通过层层提问、类比启发、反例对比以及几何直观等手段，引导学生提出猜想，修正认识上的错误，再带领学生完成严谨的演绎证明，落实课堂“猜想–验证”的思维训练，课堂整体节奏和讲授内容完全由教师把握。

猜想脚手架依靠雨课堂 AI 工作台智能学伴在课外落地，主要服务于课前预探究和课后猜想核对。该工具只提供实例素材与思考角度，不会直接输出公理、定理、完整证明。教学中要让学生清楚：靠类比得到的猜想算不上严谨证明，必须亲手演算加以验证。AI 仅作思路参考，不能取代学生自己推导，也不参与课堂教学。

简言之，猜想脚手架负责课前形成初步猜想、课后检验猜想；思维脚手架完成课堂辨析与证明。两者协同，形成“实例回顾–类比猜想–概念抽象–演绎证明”思维链条，给基础差异大的研究生提供探究支撑，将猜想探究延伸到课外。

3.3. 设计课前–课中–课后一体化教学流程

在双重脚手架模式基础上，设计课前预探究、课中猜想证明、课后拓展检验的教学流程，将合情推理融入各个学习环节。

(1) 课前：依托猜想脚手架，开展预探究

课前使用猜想脚手架，借助雨课堂 AI 智能学伴为学生提供启发材料、类比例子以及思考问题，组织学生自主预习探究，不直接输出定理结论。以线性空间这一节为例，预习任务设置为：回顾实向量空间 R^n 里面向量加法、数乘的八条运算性质，想一想除数组向量之外，还有哪些集合上也可以定义加法和数乘运算。系统会给出思考方向，提示学生观察 n 阶方阵集合、次数不超过 n 的多项式集合，观察集合经过加法、数乘运算后的特征，尝试猜想其运算性质。学生结合提示独立思考，形成自己的初步猜想，基础薄弱的学生可以多次获取提示，基础较好的学生则可自主拓展更多实例。教师收集预习阶段学生集中

出现的疑问与典型错误，依此调整课堂提问与讲解的侧重点，以适配学生实际情况开展课堂教学。内积空间、酉矩阵等章节也可沿用这一预习思路，工具重在引导学生回顾旧知识、指明类比方向，不会直接给出定义、公理以及推导过程。

(2) 课中：搭建思维脚手架，完成猜想与严谨证明

课堂以线下讲授为主，穿插少量课堂交流，需要把控探究活动的时长，避免影响整体教学进度。课堂主要依靠教师搭建的思维脚手架，承接学生课前生成的各类猜想，借助层层设问、反例辨析与几何直观组织研讨，对学生的猜想加以修正后，再推进演绎证明，还原数学学习先猜想、后证明的真实过程，教学过程中适度融入工程案例与课程思政元素。

案例 1：线性空间——从实向量空间 R^n 过渡到抽象空间

课堂导入：“本科高等数学和线性代数课程中我们接触最多就是 n 维实向量，加法数乘满足八条运算。矩阵、多项式不是普通向量，但也能做加法、数乘，它们是不是也满足类似运算规律？”

授课时，教师先带领学生回顾 R^n 中向量的八条运算性质，请学生交流课前形成的猜想，开展类比分析。接着给出反例：限定 n 维向量集合第一个分量恒等于 1，两个这样的向量相加后得到的向量第一个分量变为了 2，不再属于该集合。借助这一实例使学生认识到，非空集合可以完成加法与数乘运算，并不等同于它就是线性空间。完成猜想与误区辨析之后，教师再给出线性空间八条公理并开展推导验证，解释矩阵集合、多项式集合满足公理的内在原因，同时说明前述反例不满足公理的问题所在。

案例 2：内积空间——从欧氏点积过渡到抽象内积

课堂导入：“在实向量空间 R^n 中，有向量的点积运算，借助它可以计算向量的长度、夹角。现在有了抽象线性空间，能否将点积这一思想类比推广？抽象空间中的内积，应该具备哪些性质？”

大多学生会直接照搬 R^n 这样实向量空间的全部性质，容易忽略复向量空间要求的共轭条件。教师通过验算反例修正学生的猜想，继而给出内积公理条件，举例介绍矩阵空间和多项式空间上的内积并验证。

案例 3：酉矩阵——从实正交矩阵拓展至复数域，结合北斗工程

课堂导入：“实矩阵空间中的正交矩阵对应坐标旋转变换，保持向量长度与内积不变，北斗卫星的姿态调整，本质就是坐标旋转。那把问题拓展到复矩阵空间中，满足什么条件的矩阵能够实现类似效果，保持向量模长和内积不变？”

大多学生会直接套用实矩阵空间中的结论，猜想满足 $A^TA = AA^T = E$ (转置条件)的矩阵即为推广对象。教师随即给出反例：取复矩阵，虽满足这一转置条件，却并不保持复向量的模长与内积不变，说明实数域结论不能直接照搬——问题出在转置运算没有取共轭。通过反例演算指出其中漏洞，修正猜想之后给出酉矩阵定义：满足 $A^HA = AA^H = E$ 的矩阵，并推导相关性质。在类比猜想至演绎证明的探究过程中强调由具体到抽象的辩证思维；修正错误猜想时引导学生体会科学探索的曲折性，培养严谨求实的科研态度。课堂借助北斗工程案例开展讲解，也可以让学生体会基础数学对大国工程的支撑作用，厚植科技报国的思想意识。

对于矩阵分解、矩阵级数、方阵函数等其他知识点，教学中同样可以开展类比与猜想活动，并适当融入工程案例与课程思政元素。

(3) 课后：拓展猜想检验，完善课程过程学习

课后继续发挥猜想脚手架的作用，设置必选基础任务和选做拓展任务。必选部分要求全体学生完成教材课后习题，巩固课堂所学知识；选做部分不作统一强制要求，鼓励学有余力的学生自主搜集矩阵相关实例，检验课堂当中产生的各类猜想。学生可利用 AI 工具给自己的猜想打开思考思路，但完整证明不能依赖 AI，推导演算工作必须由学生独立完成。

教师汇总 AI 工作台记录下的高频错误以及学生普遍出现的猜想误区，在后续课堂开展针对性讲解。教

学过程中需要反复提醒学生，AI 推导结果未必全部正确，不能直接向 AI 索取定理证明、习题的标准答案。

3.4. 健全多元过程性评价机制，聚焦高阶思维发展

以往考核方式更看重考试成绩，难以衡量学生类比、猜想等高阶思维的发展。因此在保留原有“平时成绩 30%+ 期末闭卷 70%”框架基础上，调整平时成绩构成。期末考试依旧重点考察矩阵论计算与证明，落实课程知识目标。

平时成绩除考勤、课后作业以外，把课堂猜想讨论表现、课后拓展思考笔记等纳入评价。评价不限于判定答案正误，更应关注学生思考与猜想探究的完整过程。

4. 教学反思

下面结合当前课程教学实际，对方案落地过程中出现的问题进行反思，并梳理改进思路。

(1) 猜想探究深度与教学进度的矛盾

即便将猜想、类比这类探究活动放在课前完成，课堂仍需要预留时间用于猜想展示与辨析讨论，依旧会占用一部分授课学时。课堂讨论开展充分，会挤压矩阵标准形、矩阵函数等核心内容讲授；如果压缩交流环节，合情推理的训练效果又会大打折扣。没有可以直接套用的统一标准，只能结合每届学生实际情况灵活权衡。

(2) AI 工作台带来的使用风险

借助 AI 开展课外探究也暴露出一些新问题。部分学生会直接依赖工具获取结果，不再独立推演；面对相关推导，AI 偶尔也会输出错误内容，部分学生不加分辨直接采信，容易形成错误认知。教学过程中需要反复提醒学生，AI 只可用来启发思路，所有推导仍要手动验算，引导学生合理利用这类数字工具。

(3) 新型过程评价的实操困难

将课堂猜想表现、课后思考笔记纳入平时评价之后，也遇到了新的实操难题。高阶思维属于内在认知变化，平台留下的行为记录并不完全等同于学生真实能力提升；而猜想笔记这类质性材料，很难制定一套统一的评判尺度，实际打分不易把握。实际教学需要细化评价尺度，从多个方面看待学生的学习情况，不能单纯依靠平台数据衡量学生学习效果。

5. 结语

对于非数学类研究生而言，《应用数学基础》不只是矩阵论知识的学习，更是训练类比猜想、严谨求证等科研思维的过程。研究生公共数学课程改革，既要兼顾有限课时与知识教学任务，也要重视学生高阶思维的培育。本文所提出的教学思路，可以为平衡二者提供一种可行路径，但课时分配、AI 工具的合理管控、高阶思维如何有效评价，都是落地时绕不开的现实难题，需要在教学中慢慢摸索。目前实验班与对照班正在开课，相关数据尚在积累，后续将收集并分析学生的考试成绩、学习投入度问卷、探究笔记内容、课堂观察记录等数据，用以验证该教学模式的有效性，从而将本文从“教学构想”提升为“实证研究”。随着人工智能技术不断发展，如何依托脚手架开展合情推理教学，提升研究生的探究能力，仍是值得持续探索的方向。

基金项目

本文由天津理工大学研究生教育教学研究与改革项目(KCSZ2507)资助。

参考文献

[1] 教育部关于改进和加强研究生课程建设的意见[EB/OL].

https://www.gov.cn/gongbao/content/2015/content_2838177.htm, 2014-12-05.

[2] 教育部 国家发展改革委 财政部关于加快新时代研究生教育改革发展的意见[EB/OL]. https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2020-09/22/content_5545939.htm, 2020-09-04.

[3] 教育部关于印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知[EB/OL]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603_462437.html, 2020-06-01.

[4] 詹华英, 王名燕, 钟欣欣, 贾东旭. 应用数学基础教程——矩阵论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2026.

[5] (美)波利亚. 数学与猜想 第一卷: 数学中的归纳和类比[M]. 李心灿, 译. 北京: 科学出版社, 2001.

[6] 何克抗. 教学支架的含义、类型、设计及其在教学中的应用——美国《教育传播与技术研究手册(第四版)》让我们深受启发的亮点之一[J]. 中国电化教育, 2017(4): 1-9.

[7] 毛齐明. 维果茨基与教育[M]. 太原: 山西人民出版社, 2019.