Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 604-609
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112421

Hans汉斯

从经验逼近到算法建构：二分法的初高中衔接

魏苏锋，张轩铭，陶源泉

南宁师范大学数学与统计学院，广西 南宁

收稿日期：2026年10月4日；录用日期：2026年11月3日；发布日期：2026年11月10日

摘　要

二分法并非高中全新的知识。人教版九年级上册“二次函数与一元二次方程”中，学生已借助图像通过试值不断缩小区间得到近似根，这是二分法的朴素经验雏形。然而，部分高中课堂忽视这一前置经验，直接讲授零点存在定理与标准化迭代流程，学生只能机械记忆步骤。基于此，文章对比初高中相关内容的课标定位与教材编排，梳理出适用对象、理论依据、操作流程、终止判定、思维层级五个维度的认知差异，以弗赖登塔尔数学化理论与奥苏贝尔先行组织者理论为支撑，构建“唤醒水平数学化－问题链驱动垂直数学化－对比辨析厘清学段差异”三维衔接策略，并给出适配高一学情的教学片段。

关键词

二分法，初高中衔接，数学化，先行组织者，逼近思想，算法思想

From Empirical Approximation to Algorithmic Construction: Bridging the Gap between Junior and Senior High School Education on the Bisection Method

Sufeng Wei, Xuanming Zhang, Yuanquan Tao

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: October 4, 2026; accepted: November 3, 2026; published: November 10, 2026

Abstract

The bisection method is not entirely new knowledge in high school education. In the chapter “Quadratic

文章引用: 魏苏锋, 张轩铭, 陶源泉. 从经验逼近到算法建构: 二分法的初高中衔接[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 604-609. DOI: 10.12677/ae.2026.16112421

Functions and Quadratic Equations" of the People's Education Press Grade 9 Volume 1 textbook, students have already learned to approximate roots by iteratively narrowing intervals through trial values using graphical representations; this constitutes the rudimentary empirical foundation of the bisection method. However, some high school classrooms overlook this prior knowledge, instead directly introducing the Zero Point Existence Theorem and standardized iterative procedures, which forces students to mechanically memorize the procedural steps. By comparing the curriculum standard positioning and textbook organization of related content between junior and senior high school levels, this paper identifies cognitive gaps across five dimensions: objects of application, theoretical basis, procedural workflow, termination criteria, and cognitive hierarchy. Grounded in Freudenthal's theory of mathematicalization and Ausubel's theory of advance organizers, this study develops a three-dimensional bridging strategy: "activating horizontal mathematicalization - problem-chain-driven vertical mathematicalization - comparative analysis to clarify inter-level differences", and provides instructional vignettes tailored to the learning characteristics of first-year high school students.

Keywords

Bisection Method, Transition between Junior and Senior High School Education, Mathematicalization, Advance Organizers, Approximation Concept, Algorithmic Thinking

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》要求“结合具体连续函数及其图像的特点，了解函数零点存在定理，探索用二分法求方程近似解的思路并会画程序框图，能借助计算工具用二分法求方程近似解”，同时强调数学教学应立足学生已有认知经验，注重义务教育与高中阶段数学内容的连贯性与递进性[1]。

二分法承载逼近、算法、数形结合多重思想，是培育数学运算与逻辑推理素养的重要载体。但教学现实是，许多课堂将二分法当作一节全新的算法课来上：先给出零点存在定理，再归纳“取中点、判符号、缩区间、验精度”四步，最后布置求解练习。学生能算出结果，却答不出“为什么一定要取中点”、“算到什么时候可以停”。追问之下会发现，他们并不知道自己在初三其实已经做过同样的事——只不过那时它叫“用图像估计一元二次方程根的大致范围”。这种学段差异，使学生失去了将既有经验上升为一般方法的机会。

已有研究对此有所关注。张劲松等指出，二分法根植于方程近似求解的经验与历史，教学应立足知识的本源与本质[2]；罗增儒梳理了学生在零点判断、区间取舍、精确度理解等方面的典型误区[3]；方均斌强调二分法教学的核心是渗透逼近与算法思想，而非传授解题技巧[4]；潘良铭则尝试以问题链组织本课教学[5]。一些研究深化了单节课的设计，但多立足高中课堂内部，较少向初中回溯学生已有的前置经验[6] [7]。本文试图补上这一环：如何让学生初中积累的操作经验，成为高中算法建构的起点，而不是一笔被搁置的旧账。

2. 初高中二分法的教材进阶

2.1. 初中：图像支撑下的自由试值

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》未正式提出“二分法”概念，侧重思想方法的渗透。人教版九

年级上册“二次函数与一元二次方程”设置探究活动，引导学生观察二次函数图像与 x 轴的交点，判断一元二次方程根的存在性与所在区间，再通过代入数值不断缩小区间，得到符合要求的近似解[8]。

这一阶段的操作具有四个特征：适用对象限于二次函数与一元二次方程；依赖图像直观判断零点位置，没有定理支撑；取值方式自由，学生可自主试值；终止标准模糊，未给出“精确度”的数学定义。教学止步于“会解具体题”，不提炼通用方法。

2.2. 高中：定理支撑下的标准迭代

人教版高中必修第一册“函数的应用(二)”设置“用二分法求方程的近似解”课时。教材以函数零点概念和零点存在定理为基础，给出二分法的定义、适用条件、一般步骤、区间取舍规则与精确度判定标准，并引入程序框图，渗透算法思想。

2.3. 五个维度的差异

Table 1. Multidimensional comparison of knowledge related to the bisection method in junior and senior high school
表 1. 初高中二分法相关知识多维对比

对比维度	初中(九年级二次函数)	高中(必修一二分法)
课标定位	利用图像求近似解，侧重直观	探索二分法求近似解思路，体会一般性
适用对象	仅限二次函数、一元二次方程	闭区间上的任意连续函数
理论依据	无严谨定理，依靠图像直观判断	零点存在定理
操作流程	自由试值，无固定取值规则	取区间中点，缩小区间以逼近零点
终止判定	凭两端数值是否接近来判断	区间长度小于给定精确度即可停止
思维层级	具象直观运算，侧重操作经验	形式化逻辑，理解算法通用性
核心目标	求二次方程近似根，掌握估算技巧	理解逼近与算法思想，掌握一般步骤

由表 1 可知，初高中内容并非各自孤立，而是“经验雏形”与“系统体系”的关系：二者都是“一分为二、逐步逼近”的核心操作，差别在于有无定理支撑、是否规范、能否一般化。这正是衔接教学的着力处——不是补知识，而是促成从“会做”到“知道为什么这样做”的跃迁。

3. 衔接教学的两个理论支点

3.1. 弗赖登塔尔数学化理论

弗赖登塔尔认为，数学学习的本质是学生自主完成数学化的过程，具体分为水平数学化与垂直数学化两个层级[9]。水平数学化指从具体情境中提炼初步的数学规律，核心是“从具体到抽象雏形”；垂直数学化则是在此基础上进行抽象概括与逻辑论证，形成严谨的数学概念。

落实到二分法教学，初中生借图像试值缩小区间，完成的是水平数学化；高中生依托零点存在定理归纳一般步骤，完成的是垂直数学化。衔接教学的核心，就是让学生完整经历“水平数学化再现–垂直数学化建构”的全过程。

3.2. 奥苏贝尔先行组织者理论

奥苏贝尔的有意义学习理论进一步给出了操作路径：有效学习必须建立在新旧知识实质性而非人为的关联之上，先行组织者策略是搭建这一桥梁的主要方法[10]。根据新旧知识的逻辑关系，可划分为派生类属与相关类属，用于精准刻画初中估算经验与高中二分法之间的认知关系。

对二分法教学而言，最有力的先行组织者正是学生初三时用过的估算方法——核心思想一致。它与高中二分法属于相关类属关系，而非派生类属，但形式更简单、适用范围更窄、操作更直观。在新课伊始呈现这一材料，可以显著降低后续建构的难度。

4. 三维衔接策略

4.1. 以初中估算为先行组织者，唤醒水平数学化

新课导入不宜直接抛出零点存在定理，而应设计一个回顾任务：给出一道初中的二次函数题，让学生当场估算其正数近似根，并口述每一步的目的。学生在复述“先看图确定根的范围，再代两个数进去比较，然后继续缩小”的过程中，实际上已在用语言提炼“缩区间逼近”的操作结构。

此环节的关键在教师点题：今天要学的二分法不是全新的知识，而是把你们刚才这套操作规范化、一般化。一句话就将新旧知识锚定在一起。

4.2. 用问题链驱动垂直数学化

学生提炼出操作流程之后，用三个递进的问题把它推向严谨。

问题 1：为什么区间两端函数值异号，区间内就一定有零点？——引导学生从“图像穿过 x 轴”的直觉走向连续性，引出零点存在定理，补齐初中操作缺失的理论依据。

问题 2：如何让缩小区间的过程更规范、更通用？——引导学生比较“随意取点”与“取中点”，认识到取中点能保证区间长度每次减半、收敛最快且规则唯一，从而形成固定迭代流程。

问题 3：什么时候可以停下来？——引入精确度概念，说明当区间长度小于给定精确度时，区间内任意一点都可作为满足要求的近似解，解决初中“到底算到哪一步为止”的模糊问题。

三个问题分别对应定理支撑、操作规范、终止条件，恰好覆盖表 1 中初中方法的三处不足，由此学生自然归纳出“取中点、判符号、缩区间、验精度”的一般步骤。

4.3. 对比辨析，厘清学段差异

归纳出二分法后，组织小组从适用范围、理论依据、操作步骤、终止标准四个维度对比初中估算与高中二分法，并追问：二者本质上是同一件事吗？

学生容易看出“都是不断把区间一分为二”，但更要看清差异，初中方法依赖具体函数的图像，只适用于二次方程。二分法以零点存在定理为依据，适用于闭区间上的任意连续函数，再引入程序框图表示迭代过程。

4.4. 三点实施建议

其一，不急于否定初中方法。学生初中形成的“试值”习惯看似粗糙，却是二分法的思想原型。若一上来就强调“必须取中点”而贬低“随便取值”，容易让学生将自己的经验判定为错误，反而阻碍迁移。恰当的做法是先放手让学生用自己的办法做，再在比较中让他们自己发现取中点的优越性。

其二，精确度概念必须精讲。这是误解最容易集中的地方，多数人知道“精确到 0.1”，却说不清为什么用区间长度来判定。教学中应结合数轴说明——当零点被锁在长度小于 ε 的区间内时，取区间内任一点作为近似解，其与真实值之差的绝对值必小于 ε，因此区间长度可以充当停止的判据。

其三，算法思想要落到“可交给机器执行”上。画程序框图不是为了应付课标条目，而是让学生体会：一个能分解为有限步，且每步结果唯一确定的过程，就可以交给计算机自动完成。讲到此处不妨追问：“若要精确到 0.0001，大约需要迭代多少次？”学生动笔计算，算法的效率价值便不再是空话。

5. 教学片段设计

以下为“用二分法求方程的近似解”一课的核心环节，给出预设活动与意图说明。

5.1. 片段一：经验唤醒(约 8 分钟)

任务：估算方程 $x^2-2x-2=0$ 的正数近似根(精确到 0.1)。

活动：学生独立完成后口述过程，教师板书其操作链条“看图定范围→代值试→比较→再缩小”，并让其他学生补充每一步“为什么要这样做”。

意图：以初三典型问题为先行组织者，唤醒沉睡的操作经验，完成水平数学化再现。

5.2. 片段二：问题链探究(约 20 分钟)

任务：若将方程换成 $\ln x+2x-6$，原来的办法还管用吗？

教师追问：为什么 $f(a)\cdot f(b)<0$ 就能断定区间内有零点？(学生从图像连续性回答，教师点明函数零点存在定理)

追问：每次在区间里随便取一点行不行？取中点有什么好处？(学生比较后发现，取中点使区间长度稳定减半，便于预判所需次数)

追问：算到什么程度才算够？(教师给出精确度 ε 的定义：当 $|a-b|<\varepsilon$ 时停止，并说明此时区间内任一点与真实零点之差的绝对值均小于 ε)

意图：由具体方程推广到一般连续函数，把初中经验升级为带定理支撑、有终止标准的算法，完成垂直数学化。

5.3. 片段三：对比与形式化(约 12 分钟)

任务：小组合作填写初高中方法对比表，编写一份二分法“操作手册”，并尝试用程序框图表示迭代过程。

预设学生表述：“初中是猜，现在是算。”“初中只对二次函数能用，现在只要是连续的都行。”

教师总结：从“猜”到“算”，差的正是一个定理支撑和一套操作规范。这正是算法思想的要义——把依赖直觉的操作，改造成可重复、可交给机器执行的步骤。

意图：多维对比打通新旧知识壁垒，“操作手册”促使学生用自己的语言重述算法，程序框图实现形式化，落实逼近与算法双重思想。

6. 结语

二分法初高中衔接的实质，不是知识补缺，而是思维层级的跃迁。初中积累的区间逼近经验是宝贵的认知起点，教师的任务在于将它显性化、规范化、一般化。以先行组织者唤醒经验，以问题链驱动建构，以对比辨析厘清边界，学生获得的将不只是“求近似解的步骤”，更是对逼近思想与算法思想的理解。本文构建的“唤醒–驱动–辨析”三维衔接策略并非仅适用于二分法教学，其核心逻辑可以迁移至初高中函数系列内容的学段衔接，为同类跨学段知识进阶教学提供可复用的分析框架。

参考文献

[1] 教育部关于印发普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017 年版 2020 年修订）的通知[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/202006/t20200603_462199.html, 2020-06-03.

[2] 张劲松, 郭豫. 高中数学课程中的二分法——对“用二分法求方程的近似解”一堂课的思考[J]. 中学数学教学参考, 2008(7): 3-6.

[3] 罗增儒. “二分法”教学中的几个问题[J]. 数学教学, 2013(3): 5+1-4.

[4] 方均斌, 梁凯, 朱玲. 也谈“二分法”教学的几个问题——兼谈数学思想方法的教学[J]. 数学教学, 2014(3): 6-9.

[5] 潘良铭. 基于核心素养的“二分法求方程近似解”一课中的“问题链教学法” [J]. 中学数学, 2020(23): 84-85.

[6] 熊晶, 王瑶瑶, 官春梅. 最近发展区理论视角下的高中数学教学的探究——以“用二分法求方程的近似解”为例[J]. 中学理科园地, 2025, 21(4): 30-33+36.

[7] 杨梅. 深度学习视域下的跨学科项目学习探究与实践——以“探秘二分法”为例[J]. 中国信息技术教育, 2023(13): 19-21+25.

[8] 教育部关于印发义务教育课程方案和课程标准（2022 年版）的通知[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/202204/t20220420_619921.html, 2022-04-22.

[9] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 2025.

[10] 宋铁莉, 陆雪莲, 张爽, 等. 教育心理学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2025.