Advances in Education 教育进展, 2026, 16(11), 1439-1447
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2026.16112520

Hans汉斯

泛函分析课程“例子－问题－理论”研讨型教学实践

施业成

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江

收稿日期：2026年10月11日；录用日期：2026年11月12日；发布日期：2026年11月19日

摘　要

泛函分析抽象性强，学生往往难以将具体对象、数学问题与一般理论联系起来。针对这一困难，文章结合地方师范院校32课时的课程实践，设计并实施“例子－问题－理论”研讨型教学，将课堂组织为“熟悉原型或典型例子－核心问题－比较或反例－一般理论－回看与拓展”五个环节。首先，选取完备性与Banach空间、线性算子的有界性与连续性、无限维空间中的紧性三个案例，其中以求导算子为例，给出包含教师提问、学生可能反应、讨论组织以及教师总结和理论过渡的详细教学设计。其次，联系建构主义、建构性对齐、APOS理论、问题式学习和主动学习研究，阐明该模式的理论基础，并对期末卷面成绩和学生匿名问卷结果作描述性分析。最后，讨论现有证据的局限、核心问题环节的改进空间、不同教学环境下的调整以及教师的实施负担。

关键词

泛函分析，“例子－问题－理论”，研讨型教学，教学设计，概念理解

The “Example - Problem - Theory” Discussion-Based Teaching Practice in a Functional Analysis Course

Yecheng Shi

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

Received: October 11, 2026; accepted: November 12, 2026; published: November 19, 2026

文章引用: 施业成. 泛函分析课程“例子-问题-理论”研讨型教学实践[J]. 教育进展, 2026, 16(11): 1439-1447.
DOI: 10.12677/ae.2026.16112520

Abstract

Functional analysis is highly abstract, and students often find it difficult to connect concrete mathematical objects and questions with general theory. Based on a 32-class-hour course at a local normal university, this paper designs and implements an "Example - Problem - Theory" discussion-based teaching, organizing the classroom into five stages: "familiar prototype or typical example - core question - comparison or counterexample - general theory - return and extension". First, three cases are selected: completeness and Banach spaces, the boundedness and continuity of linear operators, and compactness in infinite-dimensional spaces. A detailed lesson plan on the differentiation operator further specifies teacher prompts, anticipated student responses, discussion procedures, teacher summaries, and the transition to formal theory. Second, the approach is discussed in relation to constructivism, constructive alignment, APOS theory, problem-based learning, and active learning. Final-examination scores and students' anonymous questionnaire responses are reported descriptively. Finally, the paper also discusses evidential limitations, room for improvement in the core-question stage, adjustments under different teaching environments, and the implementation burden on teachers.

Keywords

Functional Analysis, "Example - Problem - Theory", Discussion-Based Teaching, Instructional Design, Conceptual Understanding

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

泛函分析是现代分析学的重要基础，也是数学与应用数学专业由基础课程进入抽象分析理论的重要课程[1] [2]。学生此前在数学分析中主要接触数列、函数及其极限过程，在高等代数中主要研究有限维线性空间及其线性变换；进入泛函分析后，研究对象扩展到一般赋范空间、Hilbert 空间以及定义在这些空间上的线性算子和线性泛函。研究对象由具体到抽象、空间结构由有限维扩展到无限维，这种变化体现了泛函分析的重要思想，也构成了课程学习的主要困难。

实际教学中，一些学生能够记住 Banach 空间、有界线性算子等定义，也能够跟随教材理解定理的证明过程，但面对具体问题时，往往难以说明为什么需要引入某个概念、定理中的条件在何处发挥作用，以及有限维空间中的结论为什么不能直接推广至无限维情形。若课堂主要按照“定义－定理－证明－例题”的顺序展开，学生在初次接触抽象概念时缺少相应的问题背景，则容易形成重定义记忆、轻概念来源，重证明过程、轻条件分析的学习方式。

曹丽霞提出从有限维欧氏空间原型进入抽象空间，并强调课程理论框架、数学思想方法和概念理解[3]。其他研究从教学难点和内容组织角度讨论泛函分析课程[4]，或以有界算子理论为例设计研讨型教学[5]；课程教学改革研究亦积累了一些具体做法[6]。近年的探究式教学研究[7]可为比较不同课堂流程提供材料。在更基础的线性代数层面，Axler 通过具体例子呈现抽象结构并考察定理假设，为从有限维原型进入无限维理论提供了参考[8]。与上述研究相比，本文的重点不在于单独采用例子、问题或反例，而是将它们与理论形成后的回看环节连接为“熟悉原型或典型例子－核心问题－比较或反例－一般理论－回看与拓展”的教学闭环，并在多个核心主题中采用同一组织逻辑。

从理论基础看，建构主义强调学习者通过活动主动建构意义；建构性对齐则进一步要求学习目标、教学活动和评价任务相互呼应[9]。本科数学教育中的 APOS 理论从行动、过程、对象和图式等心理建构讨论抽象概念的形成[10]。本文并不将“例子－问题－理论”等同于 APOS 理论的直接应用，而是借鉴这些理论共同关注的“先修经验－主动加工－概念重组”思路：先调动学生已有的有限维经验，再借助迁移失败或反例暴露原有认识的局限，最后由教师将学生的非形式化认识概括为定义、定理与证明。典型的问题式学习通常以复杂且未必具有唯一答案的问题为中心，强调协作和自我导向学习[11]；本文设置的核心问题则直接指向相应的数学内容和理论结论，适用于课时有限且强调严格证明的泛函分析课程。主动学习在本科 STEM 课程中的总体证据为增加学生判断、解释和讨论活动提供了广义背景[12]，但该领域的综合性结果不能替代对本课程模式的直接检验。下文以三个案例说明这一教学流程的具体实施，并结合期末卷面成绩和学生匿名问卷结果作描述性分析。

2. “例子－问题－理论”的基本逻辑

本文所说的“例子”，既包括学生熟悉的有限维原型，也包括用于比较的对照例和揭示结论边界的反例。$\mathbb{R}^n$ 中的范数、内积以及闭有界集的紧性可以作为正向原型；$C[0,1]$ 与多项式空间的比较、同一求导算子在不同范数下的表现，以及 ℓ^2 中的标准单位向量，则用于检验有限维经验或既有结论的适用范围。例子的作用并不是将抽象理论简单化，而是先呈现需要解释的数学现象，使后续概念和理论有明确的问题背景。

“问题”连接具体例子与一般理论。课堂中主要设置三类问题：一是将有限维空间或先修课程中的结论迁移到新的空间，考察其是否仍然成立；二是删除或改变某个条件，分析结论是否失效；三是比较同一方法在不同空间中为何有效或无效。基础问题用于当堂判断，条件分析安排短时讨论，超出统一教学要求的拓展问题则留作课后查阅和研讨。

一般理论形成后，再回到最初的例子和问题，说明定义刻画了什么现象、定理条件排除了什么障碍，以及条件删去后结论为何失效。这样，课堂研讨始终围绕概念、定理和证明展开，其作用是帮助学生理解理论的来源和适用范围，而不是替代严格的数学论证。

这一过程不是将“例子－问题－理论”机械地依次讲解一次，而是形成可回返的闭环：学生先作判断并给出理由，讨论通过比较和反例暴露原有认识的边界，教师再将讨论中的关键词形式化为数学语言；完成证明后，学生回到最初问题，检验新理论究竟解释了什么。学生承担判断、比较、表达与检验的任务，教师负责选择具有结构意义的例子、控制问题梯度、识别典型误解，并在适当时机完成理论总结。这样既保留学生主动建构意义的空间，也避免课堂变成缺少教师引导的自由探索。

3. 围绕核心问题组织课程内容

Table 1. Core content, teaching entry points, and classroom questions
表 1. 核心内容、教学入口与课堂问题

教学内容	教学入口(原型或先修知识)	核心问题
Banach 空间	$\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{R}$；$C[0,1]$ 与 $\mathcal{P}[0,1]$	为什么在赋范空间基础上还要要求完备性？
有界线性算子	有限维赋范空间中的线性映射；求导算子	线性为什么不能保证连续？
Hahn-Banach 定理	$\mathbb{R}^2$ 中子空间上的线性泛函及其延拓	子空间上的线性泛函能否延拓到全空间并保持范数？
一致有界原理	$\mathbb{R}^m$ 中的矩阵族 $\{A_k\}$	若对每个 x，$\{A_k x\}$ 都有界，能否推出 $\{\|A_k\|\}$ 有界？
Hilbert 空间	$\mathbb{R}^n$ 中的内积、正交投影与有限维 Riesz 表示	连续线性泛函何时可由内积表示？
紧性与紧算子	$\mathbb{R}^n$ 中的 Heine-Borel 性质；ℓ^2 中的标准单位向量	有限维空间中的紧性结论为什么会在无限维情形失效？

对于 32 课时左右的泛函分析课程，若主要按照教材章节顺序平均安排课时，容易出现知识点覆盖较多而核心思想不够突出的情况。本文不改变课程的基本知识体系，而是以“先修原型–核心问题”作为若干核心内容的课堂入口，引导学生从熟悉对象进入一般理论，具体见表 1。

表 1 体现的基本思路，是从数学分析、高等代数和实变函数中的熟悉对象或有限维原型出发，将原有结论放到更一般的空间中重新考察，比较哪些性质仍然成立、哪些性质需要增加新的条件。例如，有限维赋范空间之间的线性映射自动连续，而求导算子说明这一结论不能直接推广到一般无限维空间；$\mathbb{R}^n$ 中的闭有界集合是紧的，而 ℓ^2 的闭单位球却不紧。通过这样的比较，学生可以从已有经验出发，逐步理解无限维空间中新概念和新条件出现的必要性。

对于若干基本定理，也可以先从有限维情形提出问题。讲授 Hahn-Banach 定理时，可从 $\mathbb{R}^2$ 中子空间上的线性泛函出发，考察其能否延拓到整个空间并保持范数；讲授一致有界原理时，可先考虑 $\mathbb{R}^m$ 中的矩阵族 $\{A_k\}$：若对每个固定的 x，$\{A_k x\}$ 都有界，是否能够推出 $\{\|A_k\|\}$ 有界。在有限维情形中，这一问题可以借助有限组基向量直接处理，由此再追问相同结论在无限维 Banach 空间中是否仍然成立。Hilbert 空间部分则可先回顾有限维内积空间中的 Riesz 表示和正交投影，再比较无限维情形：有限维中线性泛函自动连续，而在一般无限维赋范空间中，线性本身并不能保证连续；对于 Hilbert 空间，每个连续线性泛函仍可唯一表示为与某个固定向量的内积。Axler 关于有限维 Riesz 表示、正交投影和最佳逼近的例子，可作为这一过渡的先修材料[8]。

这种组织方式并不要求每一章采用完全相同的课堂程序。对于完备性、有界线性算子、Hahn-Banach 定理、一致有界原理、Hilbert 空间和紧性等核心内容，可以根据内容特点选择合适的有限维原型、具体例子或反例，再由核心问题进入一般理论；对于技术性较强或超出 32 课时统一教学要求的证明细节和拓展内容，则以阅读材料或课后研讨的形式处理，以保证课程的理论主线。

4. 三个典型教学案例

4.1. 从函数空间的极限问题引出 Banach 空间

完备性是初学泛函分析时较难建立直观认识的概念。若直接给出“每个 Cauchy 列均在空间中收敛的赋范线性空间称为 Banach 空间”，学生通常能够记住定义，却不容易理解为什么在赋范空间的基础上还需要增加完备性这一要求。教学中可先回顾有理数集 $\mathbb{Q}$ 与实数集 $\mathbb{R}$：$\mathbb{Q}$ 中存在 Cauchy 列，其极限可能不属于 $\mathbb{Q}$，而 $\mathbb{R}$ 是完备的。由此提出问题：“为什么要求极限仍然留在原来的空间中？”

随后比较两个函数空间。在 $C[0,1]$ 上取一致范数 $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$。若 $\{f_n\}$ 在一致范数下是 Cauchy 列，则对每个 $x\in[0,1]$，$\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，可定义 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$。再由一致 Cauchy 准则可得 $f_n\to f$ 一致收敛，而连续函数列的一致极限仍连续，故 $f\in C[0,1]$。因此，$C[0,1]$ 在一致范数下是完备的。

再考虑多项式空间 $\mathcal{P}[0,1]$，仍赋予一致范数。取任一非多项式连续函数 $f\in C[0,1]$，由 Weierstrass 逼近定理，存在 $\{p_n\}\subset\mathcal{P}[0,1]$ 使 $\|p_n-f\|_\infty\to 0$。于是 $\{p_n\}$ 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 中的 Cauchy 列，但其极限 f 不属于 $\mathcal{P}[0,1]$。两个空间都赋予一致范数，却在完备性上表现不同。此时再引入完备性的定义，学生面对的不再只是一个抽象术语，而是“极限过程是否仍留在空间内部”这一具体结构差异。定义之后还可继续追问：“一个不完备的赋范空间能否嵌入某个 Banach 空间，并在其中完成极限过程？”由此为后续介绍完备化作铺垫。

4.2. 从求导算子理解算子性质对空间结构的依赖

学生从高等代数进入泛函分析时，容易将有限维空间中的经验直接带入无限维情形。在线性算子的

定义之后，可先提出问题：“线性是否足以保证连续？”考虑

$$D:\mathcal{P}[0,1]\to C[0,1],\ Dp=p',$$

并在定义域和值域上都使用一致范数。取 $p_n(x)=x^n$ 和 $q_n(x)=x^n/n$，则

$$\|p_n\|_\infty=1,\ \|Dp_n\|_\infty=n;\ \|q_n\|_\infty=\frac{1}{n}\to 0,\ \|Dq_n\|_\infty=1.$$

因此，D 无界，且 $q_n\to 0$ 而 Dq_n 不趋于 0。在这一反例基础上，再证明赋范空间之间线性算子的有界性、在原点连续和处处连续之间的等价关系，相关结论便有了明确的问题背景[1] [2]。

进一步保持定义域仍为 $\mathcal{P}[0,1]$，只改变其范数。若定义

$$\|p\|_{C^1}=\|p\|_\infty+\|p'\|_\infty,\ \|Dp\|_\infty\le\|p\|_{C^1},$$

则同一个求导算子成为有界线性算子。如果将定义域扩充为 $C^1[0,1]$，同样得到有界算子 $D:C^1[0,1]\to C[0,1]$。这一比较说明，有界性并不是由算子的代数公式单独决定的，而与定义域、值域及其范数结构共同有关。

完成必学内容后，还可设置拓展问题：有限维空间中选定基后，线性算子可以用矩阵表示；那么 ℓ^1、c_0 和 ℓ^∞ 上的有界线性算子能否同样由无限矩阵完全刻画？李嘉等以这三个序列空间上的有界线性算子与无限矩阵的关系为例，讨论了研讨型教学的组织[5]。从数学结构看，一个关键障碍是 $\overline{\operatorname{span}}\{e_n:n\ge 1\}=c_0\neq\ell^\infty$ [1] [2] [5]。课堂中不必展开完整证明，而可要求学生指出原有方法在何处失效。

4.3. 教学片段设计：将求导算子案例落实为课堂问题链

下面给出案例二的一个详细教学设计，用于说明上述流程如何落实到课堂。该方案按一个 45 分钟教学单元设计，各环节时长可随学生基础和课时安排调整；其中“学生可能反应”是备课时的预设，用于帮助教师设计追问和必要提示，并非对本轮课堂发言的逐字实录。教学目标是使学生能够：1) 用反例否定“线性必然连续”的直接迁移；2) 用范数不等式或序列刻画求导算子的无界性与不连续性；3) 解释算子性质为什么依赖定义域、值域及其范数结构。

① 激活先修经验并形成分歧(约 5 分钟)。教师先写出“有限维赋范空间之间的线性映射自动连续”，随即给出 $D:\mathcal{P}[0,1]\to C[0,1]$，$Dp=p'$，并提问：“$D$ 显然是线性的，它是否也一定连续？你的判断依据是什么？”学生先独立写下“是”或“否”及一句理由，再以邻座两人为单位交换判断。预设反应包括：一部分学生直接沿用有限维结论判断“连续”；另一部分学生注意到 $\mathcal{P}[0,1]$ 无限维，但尚不能构造证据。教师不立即公布答案，只将“线性”、“有限维”、“范数”三个关键词记录在黑板上，形成后续讨论的比较框架。

② 用计算检验直觉(约 6 分钟)。教师给出 $p_n(x)=x^n$，要求学生计算 $\|p_n\|_\infty$、$\|Dp_n\|_\infty$ 和比值 $\|Dp_n\|_\infty/\|p_n\|_\infty$，并追问：“如果 D 有界，是否可能存在一个与 n 无关的常数 M 使 $\|Dp\|_\infty\le M\|p\|_\infty$ 对所有 p 成立？”学生得到比值为 n 后，通常能够判断不存在统一的 M；若学生只说“导数越来越大”，教师要求其明确指出被否定的是哪一个量词，从而将直观观察转化为依据定义作出的无界性论证。

③ 组织小组构造不连续证据(约 8 分钟)。教师进一步提出：“能否把 p_n 适当缩放，使输入趋于 0 而输出不趋于 0？”学生先独立尝试 2 分钟，再以 4 人为一组比较方案并推选一名记录者。预设的有效方案是 $q_n=x^n/n$；常见困难是只关注 $\|q_n\|_\infty\to 0$，却忘记同时计算 $\|Dq_n\|_\infty$。对此教师只提示“输入和输出要使用各自空间的范数”，由学生补全 $\|q_n\|_\infty=1/n\to 0$ 而 $\|Dq_n\|_\infty=1$ 的论证。

④ 全班交流并比较两种论证(约 8 分钟)。教师请两个小组分别呈现“比值无上界”和“零点处序列不连续”的论证，其余学生负责指出每一步使用的定义。板书并列保留“不存在统一常数 M”与

“$q_n \to 0$ 而 $Dq_n \to / 0$”两种论证，然后追问：“这两种失败为什么都来自同一个结构问题？”讨论的目标不是重复计算，而是使学生说出：求导会放大高次项的变化，而一致范数只控制函数值，不控制导数。

⑤ 教师总结并过渡到一般理论(约 10 分钟)。教师先作归纳：“反例否定的不是线性，而是将有限维中的自动连续性无条件迁移到无限维空间。”随后正式给出并证明赋范空间之间线性算子的三个等价命题：有界、在原点连续、处处连续。证明过程中，教师将前述两种论证与一般命题对应起来，要求学生指出：q_n 检验的是“在原点连续”，统一常数 M 检验的是“有界”。这样，定理便不再是与案例分离的新内容，而是对案例中两种失败方式的统一表达。

⑥ 变式迁移、回看与即时评价(约 8 分钟)。教师保持算子公式不变，将定义域范数改为 $\|p\|_{C^1} = \|p\|_\infty + \|p'\|_\infty$，要求学生在 1 分钟内判断 D 是否有界并写出关键不等式。学生得到 $\|Dp\|_\infty \le \|p\|_{C^1}$ 后，教师总结：“算子性质不是由代数公式单独决定的，而由算子、定义域、值域和范数共同决定。”课末，学生填写一张简短的小结单，用不超过三句话回答“有限维结论为何在原问题中失效？”“哪一个反例完成了否定？”“改变什么条件可使结论恢复？”教师据此判断下一课时是直接进入一般有界算子理论，还是先补充范数与空间结构的辨析。

4.4. 从标准单位向量认识有限维与无限维的紧性差异

“有限维经验在无限维中何时失效”可以作为贯穿泛函分析多个章节的一条线索。学生在数学分析中熟悉 Heine-Borel 性质，即 $\mathbb{R}^n$ 中的闭有界集合是紧的。因此，介绍无限维空间中的紧性时，可先将同一问题移到 ℓ^2 中：“闭有界集合是否仍然一定紧？”

取 ℓ^2 中的标准单位向量 $\{e_n\}$。显然

$$\|e_n\|_2 = 1,\ \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}\ \ (n \ne m).$$

因此，$\{e_n\}$ 没有 Cauchy 子列，也就没有范数收敛子列。由此可直接看到，ℓ^2 的闭单位球不紧，有限维空间中“闭且有界推出紧”的结论不能直接推广到无限维情形。

随后可继续追问：“如果一般有界集合不再自动具有相对紧性，是否存在一类算子能够将有界集合映成相对紧集？”由此自然引出紧算子的概念。对于有限秩有界线性算子，其值域包含在某个有限维子空间中；有界集的像仍然有界，其闭包在该有限维子空间中紧，因此有限秩有界线性算子是紧算子的基本例子。

已有泛函分析课程教学改革研究也从具体内容出发讨论课堂组织[6]。在本案例中，选用 ℓ^2 中的标准单位向量，可以通过一次简单的距离计算直接呈现有限维结论失效的原因，从而完成“反例–问题–新概念”的过渡。

5. 课堂组织与评价设计

“例子–问题–理论”并不意味着将课堂转变为自由讨论。课程的理论主线仍由教师把握。课堂操作时，五阶段教学闭环可细化为“例子呈现–独立判断–短时讨论–理论形成与证明分析–回看例子与拓展”，上节的求导算子教学片段给出了这一过程的具体设计。根据问题的难度和教学目标，研讨可分为不同层次：概念辨析和直接判断在课堂中即时完成；条件分析、反例构造以及有限维与无限维的比较安排适当的课堂讨论；超出统一教学要求的问题则作为课后阅读或拓展任务。特别是可以将“删去某个假设后结论是否仍然成立”作为多个章节中的常设问题，引导学生关注定理条件在结论和证明中的实际作用，而不只是记忆定理表述。

考核与反馈围绕这一教学目标设计。课程考核除基本定义、计算和证明外，还适当关注条件解释、对象比较和反例分析，使评价不仅考察学生能否掌握和运用基本结论，也关注其能否理解条件的作用及

理论的适用范围。按照建构性对齐所强调的“目标–活动–评价”一致性[9]，课堂中的判断、比较、反例构造和一般化表达，应在考核任务中获得相应呈现，而不能仅在课堂中讨论，考试中却仍只考查记忆与套用。课程结束后设置匿名问卷，其中三项五级量表分别考察“例子是否帮助理解概念来源”、“核心问题是否帮助建立由特殊到一般的联系”和“反例是否帮助理解条件边界”，回答分为“非常有帮助、比较有帮助、一般、帮助较小、无帮助”。同时，设置开放问题，了解学生认为较有助于理解的案例以及学习结束后仍存在的困难，作为后续教学调整的参考。本文结果部分仅报告期末卷面成绩，未对其他考核组成作效果分析。

6. 教学实施结果

本轮教学实施于 2023~2024 学年第 2 学期，授课对象为数学与应用数学专业 2021 级 1~4 班学生。四个班共 156 名学生在册，其中 1 名休学，最终 155 名学生参加期末考试；课程结束后获得 150 份有效匿名问卷。期末卷面成绩平均分为 80.32 分，中位数为 83 分，标准差为 12.00 分，最低分 33 分，最高分 99 分，共 11 人低于 60 分，及格率为 92.90%。这些数据反映了本轮课程的总体卷面表现，同时也显示学生成绩存在一定差异。需要指出的是，期末卷面成绩综合了多项知识与能力要求，不能仅由该成绩判断学生是否真正理解完备性的必要性、算子有界性的条件以及有限维与无限维紧性的差异。

问卷中，将“非常有帮助”和“比较有帮助”合并为正向反馈，三个项目的正向反馈比例分别为 81.3%、78.0%和 82.0%。其中，“反例帮助理解条件边界”的正向反馈比例为 82.0%，“例子帮助理解概念来源”为 81.3%，“核心问题帮助建立由特殊到一般的联系”为 78.0%。三项反馈总体较为接近，但“核心问题”一项相对较低。就学生的主观反馈而言，这一结果提示，从具体对象和问题中概括共同结构、进一步形成一般认识，可能仍是教学中需要持续关注的环节。因此，“问题”不宜只作为引入新内容的手段，还应为学生留下比较、概括和表达的时间。

结合既有理论，可以从两方面理解这一结果。第一，建构性对齐和 APOS 理论都重视学习活动与概念形成之间的联系[9] [10]；“核心问题”项目相对较低，提示当前设计可能较好地呈现了例子和反例，却未充分呈现“从比较结果抽取共同结构”的中间过程。第二，主动学习研究在本科 STEM 课程的总体层面报告了相较传统讲授更积极的平均学习结果[12]，但不同实施方式之间存在差异；本研究既无对照设计，也未测量主动参与的强度，因此不能用该领域的综合结果反推本课程模式已经产生相同效果。这里的问卷数据只用于发现教学流程中相对薄弱的环节。

7. 局限性与实施挑战

7.1. 研究设计与证据边界

本研究来自同一所地方师范院校、同一轮课程实施，尚不能说明在其他学校、专业或学生群体中会得到相同结果。评价方面，期末卷面成绩综合了定义、计算、证明等多种要求，本轮教学未设置对照组或前后测，也未保存与三个案例一一对应的分题得分，因而无法将该成绩归因于“例子–问题–理论”模式。三项问卷反映的是学生对教学环节的主观感受，本文未对该简短反馈量表进行信度和效度检验，开放回答也未作系统编码，故正向反馈比例不能等同于概念理解、迁移能力或问题解决能力的提高。后续研究需要保存分题表现、书面解释和课堂学习产物，必要时采用多轮实施、比较组或前后测，将主观评价与实际表现结合起来。

7.2. “核心问题”环节的薄弱点与改进

“核心问题”项目 78.0%的正向反馈在数值上低于“例子”和“反例”项目，但三项比例仅相差 3.3

至 4.0 个百分点，本文未对差异进行推断检验，因而不将其解释为统计意义上的显著差异。由于问卷未直接追问原因，以下解释只能视为基于课堂设计的待检验假设：其一，从一个具体对象概括共同结构，本身比识别一个反例具有更高的认知要求；其二，部分核心问题覆盖范围较大，学生可能知道结论失效，却缺少将“观察–条件–一般化”连接起来的必要提示和引导；其三，在 32 课时压力下，教师可能过早结束讨论并给出理论表述，使部分学生只经历了问题的提出，没有充分经历一般化过程；其四，先修基础和课堂表达意愿的差异也可能导致讨论参与不均。

针对这些可能原因，后续实施可将核心问题拆成“先作判断–给出证据–比较条件–尝试一般化”四步问题链，并采用“个人书写–同伴比较–小组陈述–教师形式化”的组织方式。教师在总结前应给学生留出足够的思考时间，要求他们明确说出哪些有限维经验被保留、哪些条件发生改变、一般结论需要增加什么限定；课末再用概念图、简短说明或新的变式题，检查学生能否从具体例子概括一般结论，并把结论用于新的问题。改进重点不是增加问题数量，而是使从问题走向理论的中间步骤得到明确呈现，并纳入课堂表达和评价。

7.3. 不同教学环境中的适应性

本方案是在 32 课时、四个行政班的条件下实施的，推广时需要根据课时、班级规模、学生基础和授课方式作相应调整。大班课堂若直接开展自由讨论，容易出现少数学生持续发言而多数学生旁观的现象，可采用先写后议、同伴互评、响应卡或在线即时提交答案并汇总，再选择具有代表性的理由进行全班比较；课时更紧的课程可保留完备性、算子连续性和紧性三个重点问题，将延伸材料移至课后，而不必让每个章节都照搬整套流程；学生基础较弱时，应先用短任务补足范数、收敛和有限维线性映射等先修知识；在线或混合教学中，可借助共享文档收集反例和条件分析，但一般理论及其证明仍应由教师在线同步讲解和总结。这些做法只是根据本轮教学经验提出的调整建议，仍需在相应环境中验证。

7.4. 教师能力与实施成本

该模式对教师提出的要求不只是准备更多例题。教师需要判断哪些例子能够体现概念之间的关键联系，预见学生可能在哪个量词、条件或有限维经验上出现误解；还需要在课堂中根据回答即时追问，将学生的非形式化表达整理为严格的数学语言，并在讨论时间与证明完整性之间作出取舍。前期设计问题链、筛选反例和编制形成性评价会增加备课负担，持续实施还需要保存和分析学生回答。本轮研究未记录备课时间和课堂投入，因而尚不能量化这一成本。降低成本的可行做法包括按主题建立可复用的“原型–误解–追问–反例–理论结论”案例库，由课程组共同修订问题链和评价标准，并在每轮教学后逐步改进反馈较弱的环节，而非每次重做整套课程。因而，该模式的可持续实施依赖教师的学科知识、教学内容知识、讨论组织能力和合理的课程协作条件。

8. 结语

泛函分析教学的困难并不只在于定义抽象、证明较难，还在于学生往往难以建立抽象概念与已有数学经验之间的联系。“例子–问题–理论”研讨型教学的重点不是增加例题数量，而是选择能够承担结构比较和条件辨析功能的例子，通过问题引导学生发现已有经验的适用范围，并在此基础上进入一般概念和理论。

本文以完备性与 Banach 空间、线性算子的有界性与连续性、无限维空间中的紧性为三个案例，分别从极限过程、算子性质和有限维与无限维的差异出发，展示了“熟悉原型或典型例子–核心问题–比较或反例–一般理论–回看与拓展”的不同实现方式。相较于只在单个知识点中使用例子、问题或反例，

本文在教学流程设计上的主要贡献，是将这些要素与理论形成后的回看检验组织为可重复使用的闭环，并把课堂活动和评价任务共同指向概念来源、条件边界与从特殊到一般的迁移。本轮教学表明，该模式可用于组织课程内容、课堂讨论和评价任务。期末卷面成绩和匿名问卷仅为了解本轮实施提供描述性信息，其中“核心问题”环节的正向评价比例相对较低，说明问题提出之后的比较、概括和形式化过程仍需更明确的引导。

该贡献首先是一种课程组织方案，而不是教学效果的因果证明。由于现有评价主要基于期末卷面成绩和学生自我报告，其有效性、适用边界和实施成本仍需在不同课程时数、班级规模与学生基础中进一步检验。后续教学可结合分题得分、书面解释、课堂学习产物和经编码的开放回答，考查学生能否说明概念产生的必要性、辨析定理条件的作用，并将具体对象中的认识迁移至一般理论中。

基金项目

本研究得到岭南师范学院 2021 年校级教育教学改革项目(一般类)“泛函分析教学研究和改革实践之‘例子－问题－理论’研讨型教学”资助。

参考文献

[1] Lax, P.D. (2002) Functional Analysis. Wiley-InterScience.

[2] 曹广福, 严从荃. 实变函数论与泛函分析: 下册[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[3] 曹丽霞. 关于泛函分析课程教学的建议[J]. 大学教育, 2013(16): 111-112.

[4] 赫海龙. 对泛函分析课程教学的若干思考[J]. 大学数学, 2019, 35(4): 42-47.

[5] 李嘉, 蔡静, 周燕. 泛函分析课程中有界算子理论的教学探讨[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(6): 123-126.

[6] 方莉, 孙宜民, 崔苗苗. 泛函分析课程思政的教学改革探索[J]. 现代职业教育, 2022(39): 40-42.

[7] 赵连阔, 冯丽霞. 探究式教学法在《泛函分析》课程教学中的应用与实践[J]. 高等数学研究, 2025, 28(4): 9-12.

[8] 谢尔登·阿克斯勒. 线性代数应该这样学[M]. 第 3 版. 杜现昆, 刘大艳, 马晶, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2016.

[9] Biggs, J. (1996) Enhancing Teaching through Constructive Alignment. *Higher Education*, **32**, 347-364. https://doi.org/10.1007/bf00138871

[10] Dubinsky, E. and Mcdonald, M.A. (2001) APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., *et al*., Eds., *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, New ICMI Study Series, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, 275-282. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

[11] Hmelo-Silver, C.E. (2004) Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, **16**, 235-266. https://doi.org/10.1023/b:edpr.0000034022.16470.f3

[12] Freeman, S., Eddy, S.L., McDonough, M., Smith, M.K., Okoroafor, N., Jordt, H., *et al*. (2014) Active Learning Increases Student Performance in Science, Engineering, and Mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **111**, 8410-8415. https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111