

# The Finite Element Method for Solving Magnetotelluric Field Boundary-Value Problem on Anisotropy Media\*

Yu Shi<sup>1</sup>, Tianya Luo<sup>2</sup>, Bin Xiong<sup>2#</sup>, Changwei Li<sup>2</sup>, Hong Yang<sup>2</sup>, Yezhong Huang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Northeast Team, Bureau of Geological Exploration & Development of Jiangxi Province, Shangrao

<sup>2</sup>College of Earth Sciences, Guilin University of Technology, Guilin

Email: shiyusyq@163.com, #xiongbin@msn.com

Received: Oct. 10<sup>th</sup>, 2012; revised: Nov. 4<sup>th</sup>, 2012; accepted: Nov. 24<sup>th</sup>, 2012

**Abstract:** Based on absorption of previous work, this paper firstly derives the variational problem of magnetotelluric in 2-D anisotropic media and provides the numerical solution calculated by finite element method, then computes apparent resistivity. At last, discusses the characteristics of magnetotelluric field varying with frequency.

**Keywords:** Magnetotellurics; FEM; Anisotropy Medium; Forward Modeling

## 有限元法求解各向异性介质中大地电磁场边值问题研究\*

石宇<sup>1</sup>, 罗天涯<sup>2</sup>, 熊彬<sup>2#</sup>, 李长伟<sup>2</sup>, 杨红<sup>2</sup>, 黄业中<sup>2</sup>

<sup>1</sup>江西省地质矿产勘查开发局赣东北大队, 上饶

<sup>2</sup>桂林理工大学地球科学学院, 桂林

Email: shiyusyq@163.com, #xiongbin@msn.com

收稿日期: 2012年10月10日; 修回日期: 2012年11月4日; 录用日期: 2012年11月24日

**摘要:** 在吸收前人工作基础上, 文中给出了二维各向异性介质中大地电磁场的变分问题以及有限单元法数值解, 并计算了视电阻率, 由其随频率的变化规律讨论电磁场的变化特征。

**关键词:** 大地电磁; 有限单元法; 各向异性介质; 正演

### 1. 引言

随着地球结构和物质组成的研究发展, 人们逐渐认识到电导率随方位变化引起的地球介质电性各向异性对于解释大地电磁场数据显得越来越重要<sup>[1]</sup>, 国内外的学者做了很多的研究, Josef Pek 等<sup>[2]</sup>研究了一维各向异性层状介质大地电磁阻抗和参数灵敏度; A. M. Osella 等<sup>[3]</sup>研究了各向异性二维结构大地电磁响应; 电性各向异性的产生已经成为很多文章热议的主题, 例如, 深部地壳研究(Everet and Constable, 1999); 破裂勘查和填图(Le Masne and Vasseur, 1981); 矿产勘

查(Al-Garni and Everett, 2003); 测井曲线(Lu and Alumbaugh, 2001); Barber (2004)等证明了怎样通过测井曲线确定电性各向异性, Ellis(2010)等通过选择晶粒形状和排列为沉积各向异性的出现提出一个有效的介质模型等<sup>[4]</sup>; Reddy 等<sup>[5]</sup>(1971)讨论的浸渍各向异性的大地电磁测深效应; Reddy 等<sup>[6]</sup>在 1975 年进一步研究了横向不均匀各向异性介质中的大地电磁测深响应; 赵生凯、徐世浙<sup>[7]</sup>(1983)研究了有限单元法计算良导嵌入体二维模型的大地电磁测深曲线; 徐世浙, 赵生凯<sup>[8]</sup>在 1985 年对二维各向异性地电断面大地电磁场的有限元解法进行了深入地研究; 陈乐寿, 王光愕<sup>[9]</sup>(1990)推导出了层状各向异性介质中视电阻率的递推关系公式; 林长佑等<sup>[10]</sup>探讨了水平层状对称各向异性

\*基金项目: 国家自然科学基金项目(40974077、41164004), 广西自然科学基金项目(2011GXNSFA018003), 广西高校优秀人才资助计划(桂教人[2010]41号)。

#通讯作者。

介质的地磁资料反演, 并用于识别地震的深部电性各向异性变化前兆; 杨长福<sup>[11]</sup>(1997)对二维 MT 各向异性正演模拟进行了研究; J. Pek 等<sup>[12]</sup>在 1997 年讨论了二维各向异性介质中大地电磁场的有限差分法; 刘云, 王绪本在 2010 年对大地电磁二维自适应地形有限元正演模拟进行研究<sup>[13]</sup>等。从前人的研究可以看出, 对各向异性介质研究的学术价值较大。基于前人的研究, 文中就各向异性介质中大地电磁场的异常特征进行讨论。

## 2. 二维各向异性介质大地电磁场的边值问题

二维各向异性介质 MT 两种极化模式下满足的边值问题<sup>[14]</sup>为

$$\nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u = 0 \quad \in \Omega \quad (1a)$$

$$u = 1 \quad \in AB \quad (1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \in AD, BC \quad (1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0 \quad \in CD \quad (1d)$$

对于 TE 波

$$u = E_z, \quad \lambda = \sigma_{\parallel} - i\omega\varepsilon, \quad \tau = \frac{1}{i\omega\mu}, \quad (2)$$

研究区域包括空气和地下, 上边界 AB 取在距离地表足够远的位置, AD、BC 分别为距离局部不均匀体足够远的左右边界, CD 为距离地表足够远的下边界(图 1)。对于 TM 波

$$u = H_z, \quad \lambda = i\omega\mu, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\tau_{11} = \left( \frac{1}{\sigma_{\parallel} - i\omega\varepsilon} \sin^2 \alpha + \frac{1}{\sigma_{\perp} - i\omega\varepsilon} \cos^2 \alpha \right), \quad (4a)$$

$$\tau_{22} = \left( \frac{1}{\sigma_{\parallel} - i\omega\varepsilon} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sigma_{\perp} - i\omega\varepsilon} \sin^2 \alpha \right), \quad (4b)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{\parallel} - i\omega\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_{\perp} - i\omega\varepsilon} \right) \sin 2\alpha, \quad (4c)$$

上边界 AB 直接取在地表, 下边界以及左右边界同 TE 波(图 2)式中  $\nabla$  为二维哈密顿算符,  $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma_{\parallel}}$ ,  $\Omega$  为研究区域,  $\sigma_{\parallel}$ 、 $\sigma_{\perp}$  分别为平行层面和垂直层面的

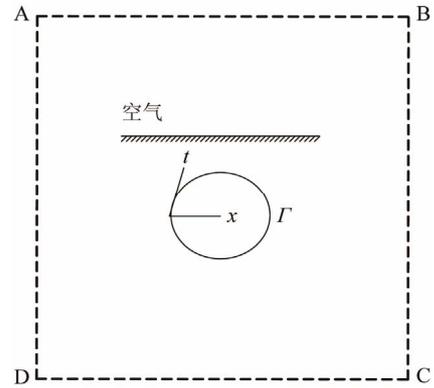


Figure 1. Study region of TE  
图 1. TE 波研究区域

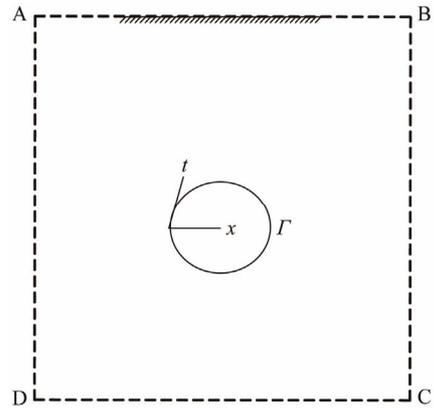


Figure 2. Study region of TM  
图 2. TM 波研究区域

电导率,  $\varepsilon$  为介电常数,  $\mu$  为介质的磁导率,  $i$  为复数单位,  $\omega$  为定态电磁波的角频率,  $\alpha$  为物性界面与水平面的夹角。

## 3. 二维各向异性介质大地电磁场的变分问题

与边值问题对应的变分问题为

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \nabla u \cdot (\tau \nabla u) - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{CD} g k u^2 d\Gamma \quad (5a)$$

$$u|_{AB} = 1 \quad (5b)$$

$$\delta F(u) = 0 \quad (5c)$$

对于 TE 波,  $g = \frac{1}{i\omega\mu}$ , 对于 TM 波,  $g = \frac{1}{\sigma_{\parallel} - i\omega\varepsilon}$ 。

## 4. 有限单元法

文中采用的区域剖分方式为, 通过引矩形单元的

两条对角线，将其细分为四个小三角形<sup>[14-16]</sup>如图3所示。在三角单元  $e$  上，将  $u$  表为线性插值函数<sup>[14]</sup>

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \quad (6)$$

这里，下标  $i, j, m$  是三角单元按逆时针方向排列的三角节点编号如图4所示， $N_i, N_j, N_m$  为线性插值的基函数。

将(5a)式中的区域积分和外边界积分分解为各单元积分之和

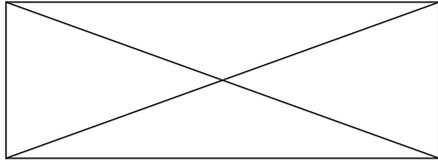


Figure 3. Triangle element in the rectangle element  
图3. 矩形单元中的三角单元

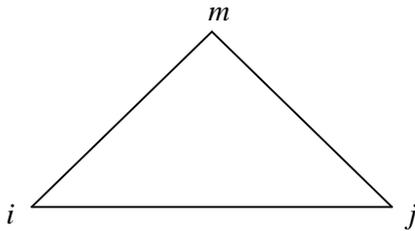


Figure 4. Triangle element  
图4. 三角单元

$$\begin{aligned} F(u) &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \nabla u \cdot (\tau \nabla u) - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{CD} g k u^2 d\Gamma \\ &= \sum_{\Omega} \iint_e \frac{1}{2} \nabla u \cdot (\tau \nabla u) d\Omega - \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega \\ &\quad + \sum_{CD} \int_{CD} \frac{1}{2} g k u^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

对(7)式各个单元和边界逐一积分，并消去中间节点，得到  $4 \times 4$  的矩阵，将它们扩展成为全体节点的矩阵，再对扩展矩阵求和，之后对泛函取极值，得到线性代数方程组，在解之前，代入  $AB$  线上的边界值，采用文献[14]的解法即可得到各节点的  $E_z$  或  $H_z$ ，计算辅助场，进而可以得到地表的视电阻率。

## 5. 正演结果分析

### 5.1. 分层均匀介质模型

给出具有解析解的各向同性层状介质模型：

$\rho_1 = 1000 \Omega \cdot m$ ， $h_1 = 1080 m$ ； $\rho_2 = 100 \Omega \cdot m$ ， $h_2 = 1000 m$ ； $\rho_3 = 1000 \Omega \cdot m$ ，其正演结果如图5所示。根据正演结果数据的误差分析得：TE波、TM波与解析解的均方相对误差均为0.2%，这验证了本算法对各向同性介质计算的可靠性；由于各向异性大地电磁异常场的解析解目前还未见到，因此文中仅对几个典型模型进行数值计算。

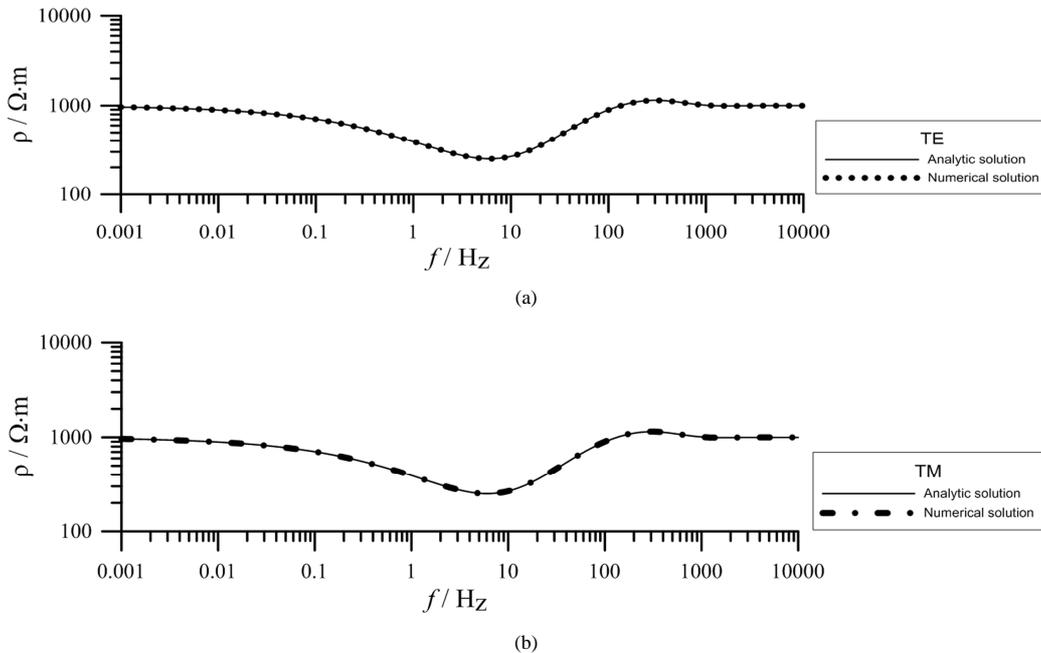


Figure 5. Comparison between analytical and numerical solution by FEM  
图5. 有限元数值解与解析解对比

### 5.2. 向斜良导体模型

如图 6 所示向斜模型，其正演结果如图 7 所示。从图中可知，1) 在低频段，大地电磁异常场主要受到深部向斜良导体的影响，随着频率的增大，由异常体引起的大地电磁异常场慢慢变弱，曲线逐步过渡到反映向斜良导体上方各向同性均匀介质的视电阻率；2) 在各向同性良导体的电导率等于各向异性良导体的平均电导率的情况下，二者呈现出不同的异常幅度，各向同性体的异常幅度约为 24 倍，而各向异性体的异常幅度约为 85 倍。可见，将各向异性介质近似为各向同性来解释将会造成较大的偏差甚至是错误的结果。

### 5.3. 倾斜高阻体模型

如图 8 所示各向异性倾斜高阻体模型，其视电阻率拟断面图如图 9 所示。从图中可以清楚地看出很明

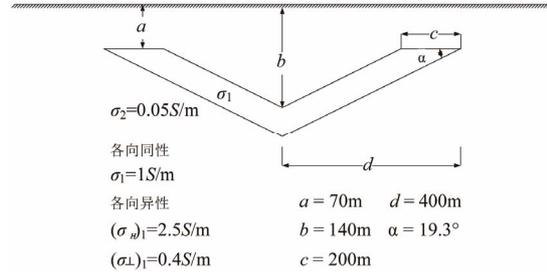


Figure 6. Syncline model  
图 6. 向斜模型

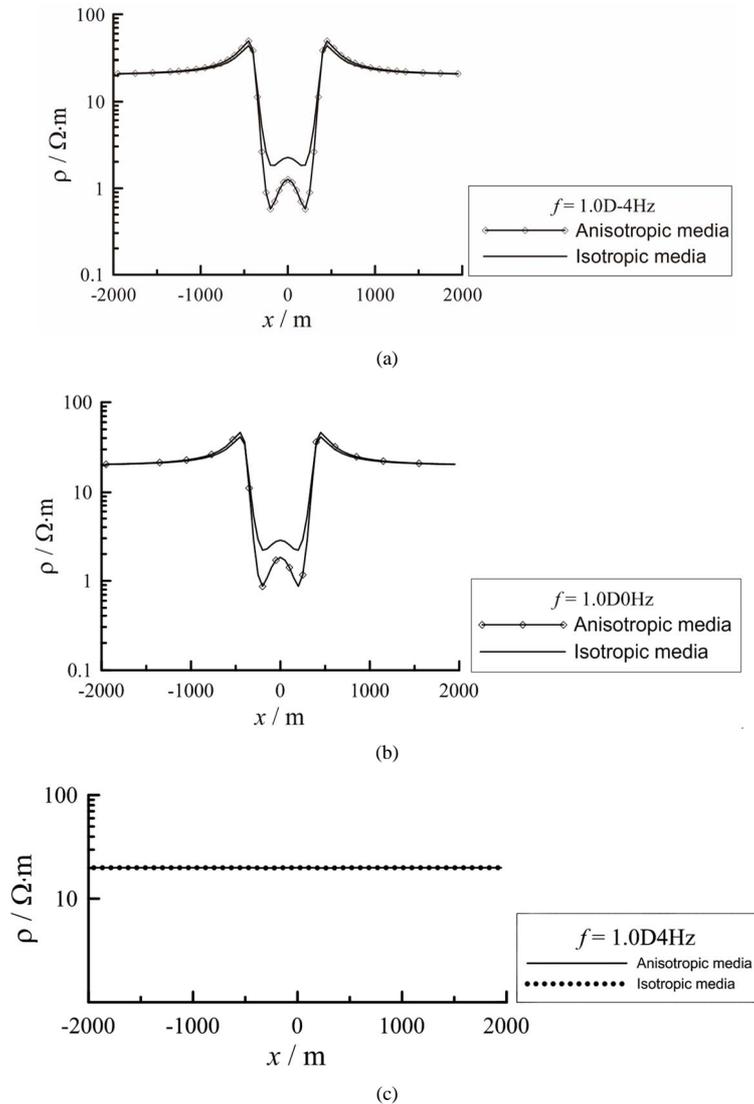


Figure 7. Comparison of the magnetotelluric profile between isotropic and anisotropic media  
图 7. 各向同性与各向异性介质大地电磁剖面比较

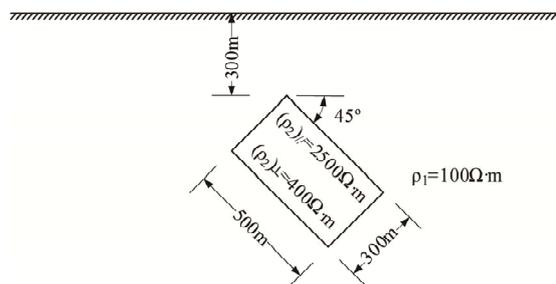


Figure 8. Gradient and high resistivity medium  
图8. 倾斜高阻体

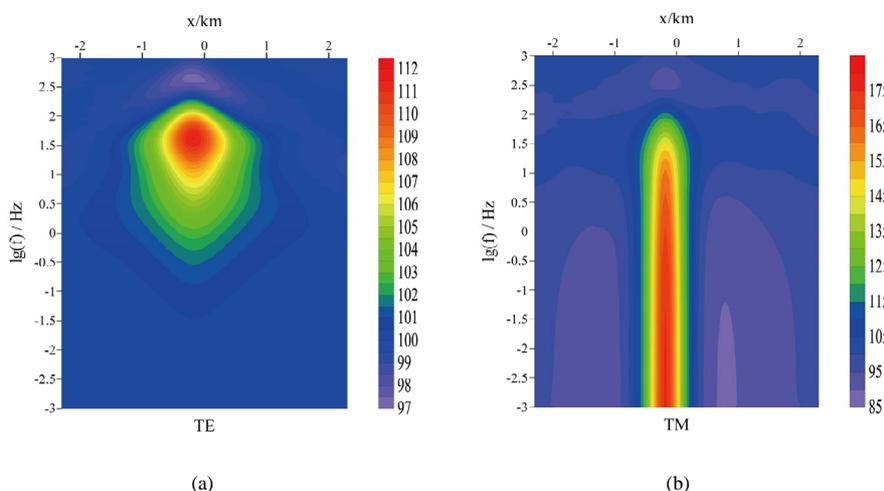


Figure 9. Pseudo-section of apparent resistivity  
图9. 视电阻率拟断面图

显的高阻异常体，其与围岩的分界线清晰明了；另一方面可以得出，TE 波较准确地确定了高阻体的纵向分布，而横向分辨率不足；TM 波具有很好的横向分辨率，但却造成了高阻体在纵向上的畸变。

### 5.4. 高低阻模型

模型如图 10 所示，电阻率变化规律如图 11 所示。从图中可以清晰的看到低阻异常体和高异常体阻体，它们与围岩的区别明显，同时可以看到 TE 波具有较好的纵向分辨率，TM 波具有较好的横向分辨率。

### 6. 结论

文中采用矩形单元再细分为四个三角形的剖分方式，在解线性方程组之前，消去矩形单元中心节点，这样就达到既不增加网格节点，又可以模拟倾斜物性界面的目的。最后文中通过引用参考文献[14]和[19]的模型，采用有限单元法对各向同性与各向异性介质

进行大地电磁测深二维正演，同时对比 TE 波和 TM 波，得出两点结论。

1) 同一频率下，在各向同性体电阻率与各向异性体平均电阻率相同的情况下，二者的异常幅度却相差很大，各向同性体的异常幅度约为 24 倍，而各向异性体的异常幅度约为 85 倍。因此在大地电磁测深工作中，介质的各向异性是必须考虑的，而且地球内部结构与物质组成的各向异性现象普遍存在，各向同性

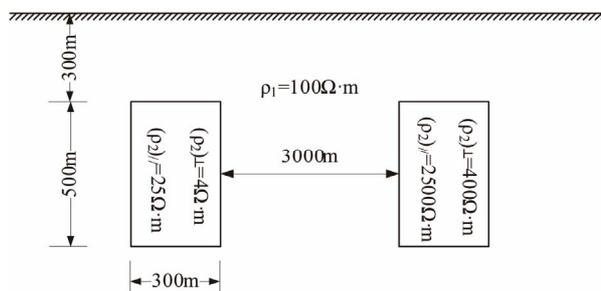


Figure 10. Gradient and high resistivity medium  
图10. 倾斜高阻体

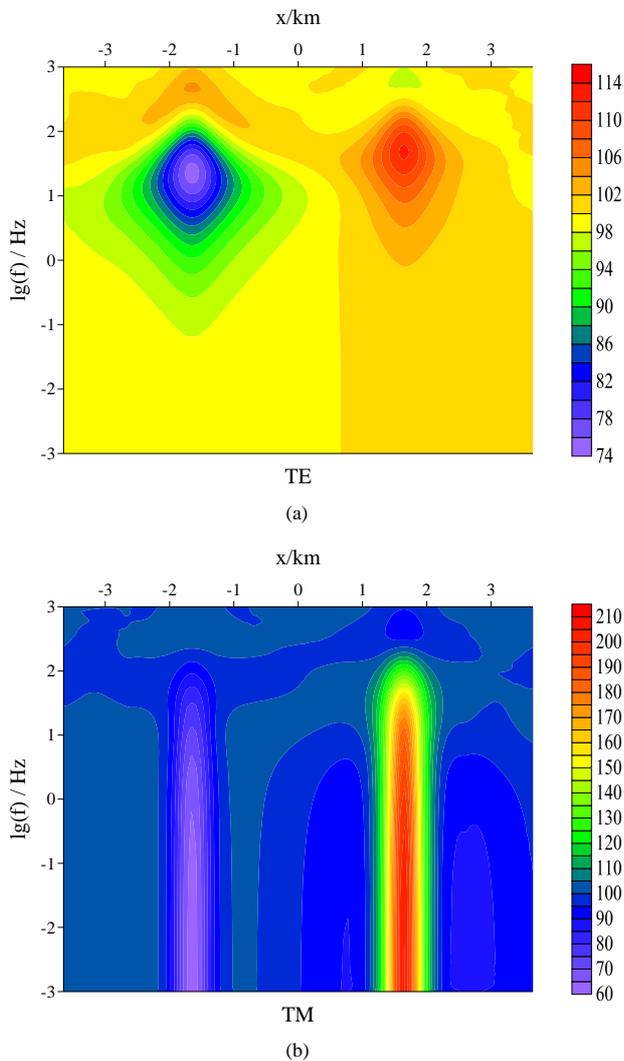


Figure 11. Pseudo-section of apparent resistivity  
图11. 视电阻率拟断面图

结构只是比较理想的地电模型，只有深入地研究大地电磁场在各向异性介质中的特征，才能得到更接近实际情况的解释；

2) TE 波具有很好的纵向分辨率，但横向分辨率不足，TM 波易于造成异常场在纵向上的畸变，但较好地确定异常场在横向上的分布，因此仅仅依据某一种类型的电磁波得出的结论，可能是错误的解释，因

此，在实际工作中应该注意两者的结合，避免望“形”生意。

## 参考文献 (References)

- [1] A. Martí, P. Queralt, J. Ledo, C. Farquharson. Dimensionality imprint of electrical anisotropy in magnetotelluric responses. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2010, 182(3-4): 139-151.
- [2] J. Pek, F. A. M. Santos. Magnetotelluric impedances and parametric sensitivities for 1-D anisotropic layered media. *Computers & Geosciences*, 2002 28(8): 939-950.
- [3] A. M. Osella, P. Martinelli. Magnetotelluric response of anisotropic 2-D structures. *Geophysical Journal International*, 1993, 115(3): 819-828.
- [4] V. Brown, M. Hoversten, K. Key and J. S. Chen. Resolution of reservoir scale electrical anisotropy from marine CSEM data. *Geophysics*, 2012, 77(2): 147-158.
- [5] I. K. Reddy, Rankin D. Magnetotelluric effect of dipping anisotropies. *Geophys Prospect*, 1971, 19(1): 84-97.
- [6] I. K. Reddy, D. Rankin. Magnetotelluric Response of Laterally inhomogeneous and anisotropic media. *Geophysics*, 1975, 40(6): 1035-1045.
- [7] 赵生凯, 徐世浙. 有限单元法计算良导嵌入体二维模型的大地电磁测深曲线[J]. *物化探电子计算技术*, 1983, 1: 14-21.
- [8] 徐世浙, 赵生凯. 二维各向异性地电断面大地电磁场的有限元解法[J]. *地震学报*, 1985, 7(1): 80-90.
- [9] 陈乐寿, 王光镔. 大地电磁测深法[M]. 北京: 地质出版社, 1990.
- [10] 林长佑, 武玉霞, 杨长福等. 水平层状对称各向异性介质的地电资料反演[J]. *地球物理学报*, 1996, 39(增刊): 326-332.
- [11] 杨长福. 大地电磁二维对称各向异性介质的有限元数值模拟[J]. *西北地震学报*, 1997, 19(2): 27-33.
- [12] J. Pek, T. Verner. Finite-difference modeling of magnetotelluric fields in two-dimensional anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 1997, 128(1): 505-521.
- [13] 刘云, 王绪本. 大地电磁二维自适应地形有限元正演模拟[J]. *地震地质*, 2010, 32(3): 382-391.
- [14] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [15] 熊彬, 罗延钟. 电导率分块均匀的瞬变电磁 2.5 维有限元模拟[J]. *地球物理学报*, 2006, 49(2): 590-597.
- [16] 罗延钟, 张桂清. 电子计算机在电法勘探中的应用[M]. 武汉: 武汉地质学院出版社, 1987.
- [17] 吕玉增, 熊彬, 薛霆斌. 地球物理数据处理基础[M]. 北京: 地质出版社, 2011.
- [18] 万汉平. 大地电磁测深的 TE 和 TM 极化模式对比研究[D]. 成都理工大学, 2010.
- [19] 徐凯军, 李桐, 张辉, 李建平. 利用积分方程法的大地电磁三维正演[J]. *西北地震学报*, 2006, 28(2): 104-107.