

Estimation of Flow-Dependent Unbalanced Variances in Four-Dimensional Variational Data Assimilation

Shicheng Hou, Bainian Liu, Xiaoqun Cao*

College of Meteorology and Oceanography, National University of Defence Technology, Changsha Hunan
Email: jnhsc1995@163.com, liuxialei580@163.com, *caoxiaoqun@sina.com

Received: Jul. 9th, 2020; accepted: Jul. 23rd, 2020; published: Jul. 30th, 2020

Abstract

Optimizing and improving the background error covariance model, which promote the better representation on flow-dependent uncertain information, are important technology to improve the precision of medium-range numerical forecast system. A key issue of ensemble four-dimensional variational data assimilation is the way to estimate and apply flow-dependent background information according to its own background error covariance model. In general, some variables can be divided into balanced and unbalanced parts. The balanced parts are associated with specific variables under the constraint of balanced relationship. The residual unbalanced parts are independent. With the model of numerical weather prediction improving continuously, unbalanced variances play more and more important roles in the total variance. In this paper, we briefly introduced the background error covariance model of YH4DVAR and Ensemble Four-dimensional Variational Data Assimilation system, and the balanced operators are analyzed specifically. The flow-dependent unbalanced variances are estimated successfully for divergence, temperature and surface pressure by an ensemble method. Finally, some calibration and filtering technologies are imposed on unbalanced variances to reduce the sampling noises.

Keywords

Data Assimilation, Background Error Covariance, Unbalanced Variances, Ensemble Four-Dimensional Variational Data Assimilation, Flow-Dependent, Calibration, Filtering

四维变分资料同化中非平衡项方差的流依赖估计

侯士成, 刘柏年, 曹小群*

*通讯作者。

文章引用: 侯士成, 刘柏年, 曹小群. 四维变分资料同化中非平衡项方差的流依赖估计[J]. 地球科学前沿, 2020, 10(7): 637-647. DOI: 10.12677/ag.2020.107063

国防科技大学气象海洋学院, 湖南 长沙

Email: jnhsc1995@163.com, liuxialei580@163.com, *caoxiaoqun@sina.com

收稿日期: 2020年7月9日; 录用日期: 2020年7月23日; 发布日期: 2020年7月30日

摘要

优化和改进变分资料同化系统中的背景误差协方差模型,使之能够正确反映随流型演变的不确定性信息,是提高中期数值预报精度的重要技术手段。集合四维变分资料同化的一大关键是如何根据自身的背景误差协方差模型提取和应用流依赖背景信息。为了提高变分资料同化解算的效率,通过将某些变量划分为平衡部分和非平衡部分,平衡部分依据平衡约束关系与一个特定的变量相联系,剩余的非平衡部分在各变量间互不相关。随着数值预报模式的不断优化,非平衡方差在总方差中的影响越来越重要。本文介绍了YH4DVAR的背景误差协方差模型和集合四维变分资料同化系统架构,重点分析了平衡算子。通过集合方法估计得到了散度、温度、地面气压的非平衡项流依赖方差。最后,为了减少有限样本噪声对方差估计的影响,对非平衡项方差进行了校正和滤波。

关键词

资料同化, 背景误差协方差, 非平衡项方差, 集合四维变分资料同化, 流依赖, 校正, 滤波

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

利用资料同化的方法提取观测资料的有效信息是改进数值预报初始场,进而提高数值预报水平的一个重要手段[1]。在变分同化下,资料同化系统将观测资料和背景信息进行优化组合,为数值天气预报系统提供大气初始状态的最优估计值[2],就需要定义背景误差协方差矩阵 $\mathbf{B}$ 和观测误差协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 。承载着背景场误差信息的 $\mathbf{B}$ 矩阵是资料同化成败的关键因素之一[3],合理估计 $\mathbf{B}$ 矩阵的量值和结构是提高同化分析和数值预报水平的基本前提[4]。背景误差协方差的估计方法有 NMC (National Meteorology Center)方法[5]、Monte Carlo 方法[6]以及集合资料同化(EDA, Ensemble Data Assimilation)方法[7] [8] [9] [10]等。通常构建均匀、各向同性的背景误差协方差矩阵 $\mathbf{B}$,作为 $\mathbf{B}$ 矩阵真实值的一个替代品[11],这种假设能够简化运算,但无法反映大气的时空变化特征[12]。为了使背景误差协方差矩阵 $\mathbf{B}$ 具有流依赖(flow-dependent)性质(即能够反映天气形势的演变),采用 EDA 方法进行估计。

集合四维变分资料同化(Ensemble Four-Dimensional Variational Data Assimilation, En4DVAR) [13] [14] [15] [16] [17]能在充分利用变分同化方法的优势的基础上,估计出流依赖背景误差协方差,是解决资料同化中背景误差协方差矩阵静态不变问题的一种有效途径。在实际的变分同化系统中,一般会与分析变量划分为与平衡变量相关的平衡部分和剩余的非平衡部分。对于平衡部分,较为合理的做法是只引入其中一种变量的流依赖信息,通过平衡约束关系将流依赖信息传播到其他变量上。如 ECMWF (European Centre For Medium Range Weather Forecasts, 欧洲中期天气预报中心)通过更新涡度的流依赖背景误差,引入流依赖信息。ECMWF 已在 Cycle37R2 版本(2011.5)采用 EDA 方法估计涡度、湿度、

臭氧变量的流依赖背景误差方差[18], 通过平衡算子 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{P}$ 将流依赖信息传播到散度、温度和地面气压的平衡项部分(η_b , (T , p_s)_b), GRAPES-4DVAR [19] [20] [21]则采用流函数作为平衡变量。对于非平衡部分, 由于此部分与其他变量无关, 需要估计出其他所有变量的非平衡部分的流依赖背景误差信息。陈耀登等[22] [23]使用 WRFDA (Weather Research and Forecasting Data Assimilation) [24] [25] [26]通过分析非平衡变量(速度势、温度等)的分布特点, 研究背景误差协方差的特征以及背景误差协方差对台风同化和预报的影响。

已有研究表明, 随着模式分辨率的日益提升, 非平衡方差在总方差的比重已显著增加[27] [28]。因此如何估计和应用流依赖的非平衡项方差, 实现真正全流依赖的背景误差协方差, 对提升流依赖背景误差信息的应用水平具有十分重要的研究意义。

2. 实验

2.1. 背景误差协方差模型

YH4DVAR [29] [30]是我国自主研发的全球四维变分资料同化系统, 使用基于球面小波的背景误差协方差模型[8] [31] [32]。在变分资料同化中, 为了估计大气系统的状态, 需要寻找合适的分析场使得目标泛函最小化。3DVAR (Three-Dimensional Variational Data Assimilation, 三维变分资料同化) [5] [33] [34] [35] [36] [37]的目标泛函表示如下:

$$J(\mathbf{x}) = J_b + J_o = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - H\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_b$ 为背景场, $\mathbf{x}$ 为模式变量, $\mathbf{B}$ 为背景误差协方差矩阵, $\mathbf{y}$ 是观测向量, H 为观测算子, $\mathbf{R}$ 为观测误差协方差矩阵。

使用控制变量变换方法[38], 引入算子 $\mathbf{L}$, 将 $\mathbf{x}$ 转化为 $\boldsymbol{\chi}$, 算子 $\mathbf{L}$ 满足 $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{B}$, 从而对 $\mathbf{B}$ 的定义转化为对 $\mathbf{L}$ 的定义。则目标泛函背景项写作:

$$\begin{aligned} J_b(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\chi})^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{L}\boldsymbol{\chi}) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}^T \mathbf{L}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (2)$$

使用涡度(ζ)、散度(η)、温度(T)、表面气压(p_s)、比湿(q), 作为模式变量。涡度被视为平衡变量(即自身不存在非平衡项), 散度、温度和表面气压依据平衡关系能够被分解为平衡项和非平衡项。比湿是独立的变量。将模式变量(ζ , η , (T , p_s), q)转化控制变量(ζ , η_u , (T , p_s)_u, q)。

将 $\mathbf{L}$ 表示为两个算子的乘积:

$$\mathbf{L} = \mathbf{K}\mathbf{B}_u^{1/2} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{K}$ 是将非平衡变量转化为全变量的平衡算子。对称矩阵 $\mathbf{B}_u^{1/2}$ 是非平衡变量背景误差协方差矩阵 $\mathbf{B}_u$ 的平方根, 即:

$$\mathbf{B}_u^{T/2} \mathbf{B}_u^{1/2} = \mathbf{B}_u \quad (4)$$

通常需要对平衡算子 $\mathbf{K}$ 和非平衡变量背景误差协方差矩阵 $\mathbf{B}_u$ 进行简化处理, 如假定 $\mathbf{B}_u$ 是一个块对角矩阵, 变量之间不存在相关性。 $\mathbf{B}_u$ 的矩阵形式为:

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\zeta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}(\eta_u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}(T, p_s)_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}(q) \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中“ $\mathbf{C}()$ ”表示每个变量的自协方差矩阵。引入算子 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{P}$ ，全变量与非平衡量之间的关系为：

$$\begin{cases} \eta = \mathbf{M}\zeta + \eta_u \\ (T, p_s) = \mathbf{N}\zeta + \mathbf{P}\eta_u + (T, p_s)_b \end{cases} \quad (6)$$

其中下标“ u ”表示变量的非平衡部分。根据关系(2.4)和(2.5)得到 $\mathbf{K}$ 的矩阵形式为：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{N} & \mathbf{P} & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (7)$$

最终背景误差协方差的矩阵形式为：

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{K}\mathbf{B}_u\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\zeta) & \mathbf{C}(\zeta)\mathbf{M}^T & \mathbf{C}(\zeta)\mathbf{N}^T & 0 \\ \mathbf{M}\mathbf{C}(\zeta) & \mathbf{M}\mathbf{C}(\zeta)\mathbf{M}^T + \mathbf{C}(\eta_u) & \mathbf{M}\mathbf{C}(\zeta)\mathbf{N}^T + \mathbf{C}(\eta_u)\mathbf{P}^T & 0 \\ \mathbf{N}\mathbf{C}(\zeta) & \mathbf{N}\mathbf{C}(\zeta)\mathbf{M}^T + \mathbf{P}\mathbf{C}(\eta_u) & \mathbf{N}\mathbf{C}(\zeta)\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{C}(\eta_u)\mathbf{P}^T + \mathbf{C}(T, p_s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}(q) \end{bmatrix} \quad (8)$$

对非平衡项，每个自相关矩阵具有相同的形式：

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^T \mathbf{V}^{T/2} \mathbf{S}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{S} \quad (9)$$

其中， $\mathbf{S}$ 表示谱到格点的变换， $\mathbf{V}$ 是模式高斯网格上非平衡变量的方差对角矩阵， $\mathbf{E}$ 是特征向量矩阵， $\mathbf{D}$ 是格点空间中方差归一化所得的非平衡变量在谱空间中的垂直协方差矩阵的特征值构成的对角矩阵。

算子 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{N}$ 又可划分为水平平衡算子和垂直平衡算子的乘积：

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{H} \\ \mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{H} \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{H}$ 是块对角阵水平算子，作用是将涡度的谱系数转化为中间量 P_b ， P_b 为质量场，定义为[6] [27]：

$$P_b(n, m) = \beta_1(n, m)\zeta(n, m+1) + \beta_2(n, m)\zeta(n, m-1) \quad (11)$$

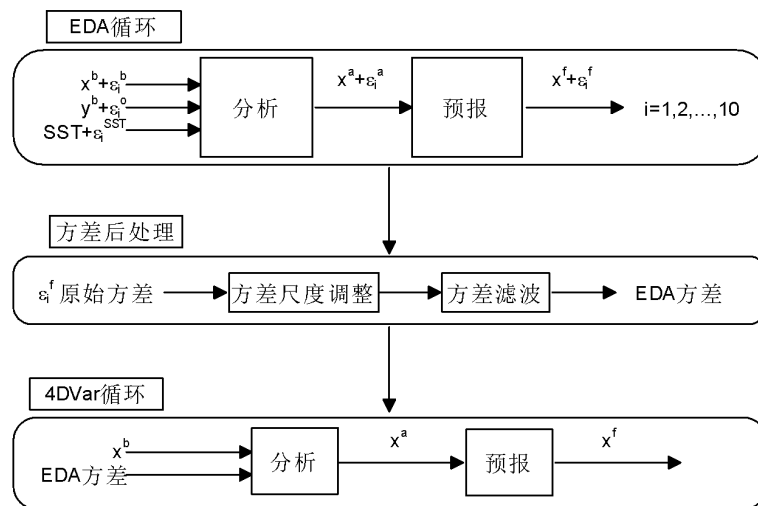


Figure 1. Ensemble four-dimensional variational data assimilation system

图 1. 集合四维变分资料同化系统架构

其中 n 为总波数, m 为纬向波数, β_1 、 β_2 是 H 的水平平衡系数。 H 中的水平算子具有与球面上标准分析的线性平衡算子相同结构, 使得谱空间中 J_b 结构随纬度变化。 M 、 N 和 P 算子具有相同的结构: 块对角、一个谱分量对应一个全垂直矩阵, 该矩阵仅与总波数 n 有关。 M 、 N 、 P 矩阵、 β_1 、 β_2 矩阵采用 NMC 或集合方法计算得到。NMC 方法是使用相同时刻不同预报时效的预报场之间的差异统计得到估计结果。集合方法的统计样本既可以是样本之间的差也可以是样本与样本集合平均之间的差。

2.2. 非平衡项方差的流依赖估计及后处理

采用集合四维变分资料同化系统得到用于统计流依赖背景误差方差的集合样本, 系统架构见图 1。

图 1 给出了集合四维变分资料同化的系统架构。在 EDA 循环中, 输入扰动的背景场、观测场和 SST (Sea Surface Temperature, 海表面温度), 得到扰动分析, 经过预报步骤后得到扰动预报量。在方差后处理过程中, 原始方差经过方差尺度调整和方差滤波之后, 得到 EDA 方差。在 4DVAR 循环过程中, 从“方差后处理”过程中得到的 EDA 方差与背景场成为输入量, 得到分析场, 经过预报步骤得到预报场。

为了表征模式中的不确定性, 模式积分过程中采用 SPPT (Stochastic Perturbed Parameterized Tendency, 参数化倾向随机扰动) [39] 方案现实背景场的隐式扰动。非平衡项方差为总方差减去方差的平衡部分, 为了减少非平衡项方差估计值中的随机误差项, 采用了谱滤波器[40]:

$$\rho(n) = \left[\cos \left(0.5\pi \frac{\min(n, N_{\text{trunc}})}{N_{\text{trunc}}} \right) \right]^2 \quad (12)$$

其中截断波数固定设为 1000。

2.3. 效果检验

基于 2.1、2.2 节的原理和方法, 使用数值预报模式进行计算, 垂直分层总共 137 层, 第 1 层为最高层, 第 137 层为最低层, 第 114 层对应 850 hPa 等压面。

解释方差能够体现假设中的平衡关系反映的程度[6], 方差解释率的垂直廓线能够较为直观地反映出不同的垂直高度上非平衡项方差对于变量总方差的贡献。解释方差占重比(方差解释率, Explained Variance Ratio) [4]表示为:

$$1 - \frac{\mathbf{v}_{\text{unbal}}}{\mathbf{v}_{\text{total}}} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{v}_{\text{total}}$ 为总方差, $\mathbf{v}_{\text{unbal}}$ 为变量的非平衡项方差。

图 2 给出了温度平衡项方差在总方差中的解释方差占重比, 非平衡分量的误差方差对变量的总误差方差有显著贡献。在图 1 中, 模式层 60 以上, 解释方差比重不低于 0.3, 最大是在模式层 20 的 0.6; 低于第 80 层的高度, 解释方差比重小于 0.1。可见方差的平衡分量对总误差方差贡献, 高层明显大于低层。

图 3 给出诊断误差结构的一个例子, 其中显示了温度非平衡分量的纬度和月时间平均垂直剖面, 可以看出在各个垂直层上, 热带地区的非平衡误差往往相对较大。在垂直方向非平衡误差中, 模式层 60 (约 100 hPa) 附近的对流层与下平流层(UTLS, Upper Troposphere Lower Stratosphere), 在靠近平层顶层(模式层 10 到 20, 约 1~3 hPa)以及行星边界层(模式层 115 至 137, 约 850 hPa 至表面)中具有极大值, 并且在模式层底层 60°S~80°S 的区域出现最大值。在这些区域, 4DVAR 中的质量—风平衡关系做不到对总变量的误差的完全解释。

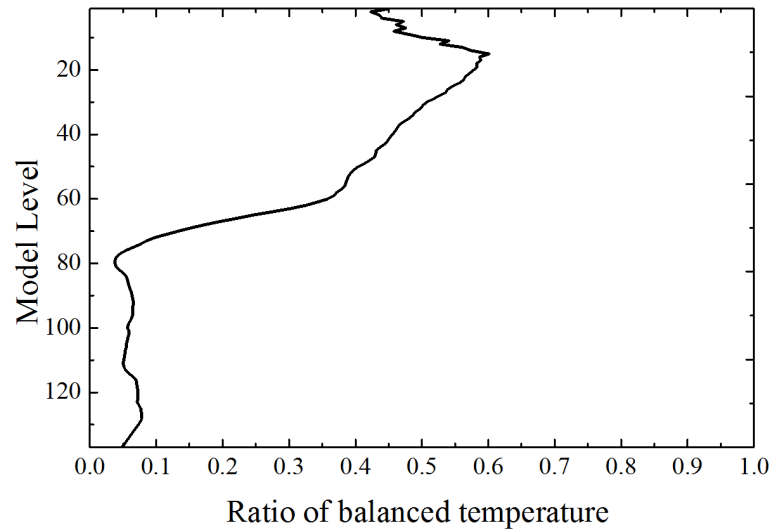


Figure 2. Distribution of the amount of explained variance for temperature stratified according to model levels. The vertical coordinate represents the number of the levels. The uppermost level of model can be signed as 1, and the lowest one can be signed as 137

图 2. 温度的平衡项方差解释率在各垂直层上的分布。纵坐标为垂直层的层数序号，顶层为 1，底层为 137

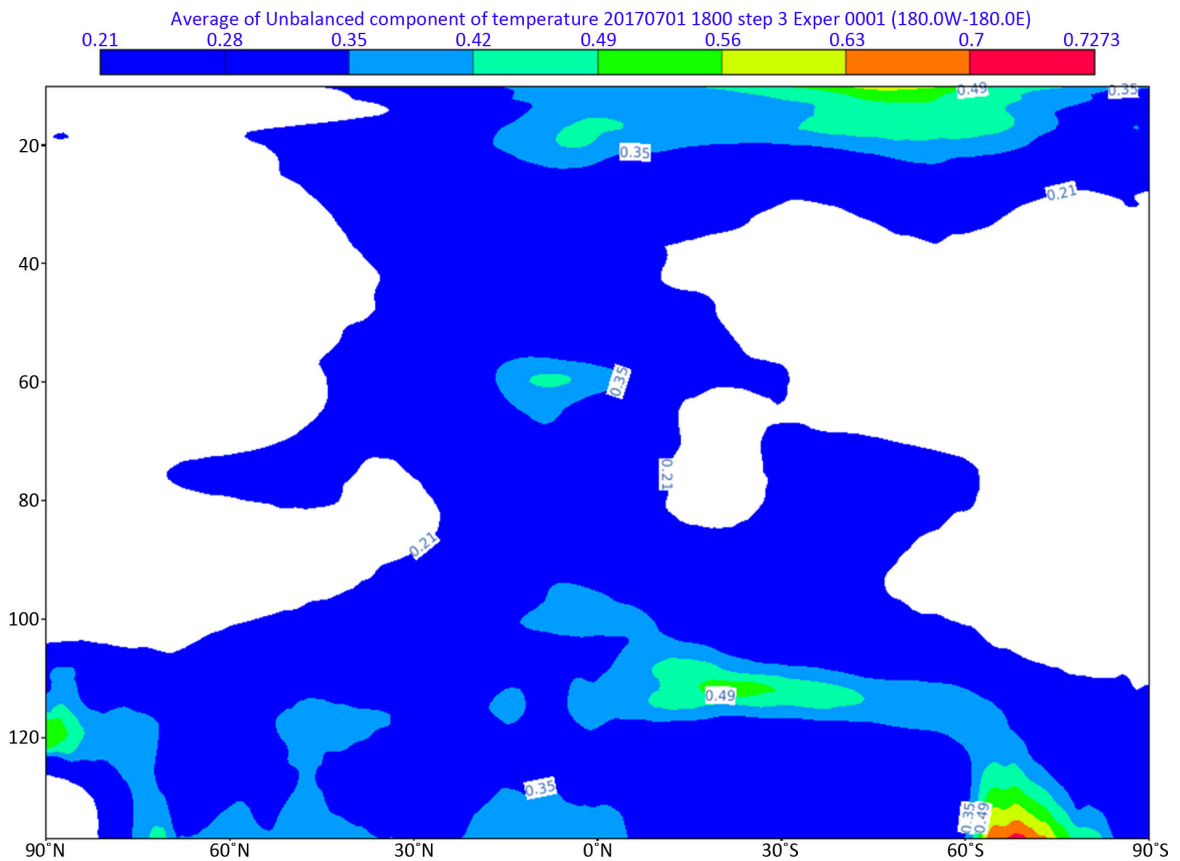


Figure 3. Vertical profiles of the longitudinally averaged EDA standard deviations of unbalanced temperature. Values are time averaged over one month (July 2017). Units in Kelvin (temperature)

图 3. 非平衡温度 EDA 标准差的经向平均的垂直剖面。数值为 2017 年 7 月的月平均值。单位为开尔文(温度)

图 4 显示非平衡表面气压误差的月平均值。黑色等值线为平均海平面气压, 蓝色区域为非平衡表面气压误差较大区域。高原山地地形(例如青藏高原、落基山脉、安第斯山脉等), 其非平衡部分误差较大, 可能是受地形影响, 本身不存在实际的海平面气压。在热带地区尤其是赤道附近, 非平衡误差相对较大。在南半球高纬度地区的低压系统周围, 也存在着非平衡误差相对较大的区域。总体看来, 非平衡表面气压误差较大值更倾向于沿着纬圈分布(例如 0°N 、 40°S 、 70°S), 同时会受到地形的影响。

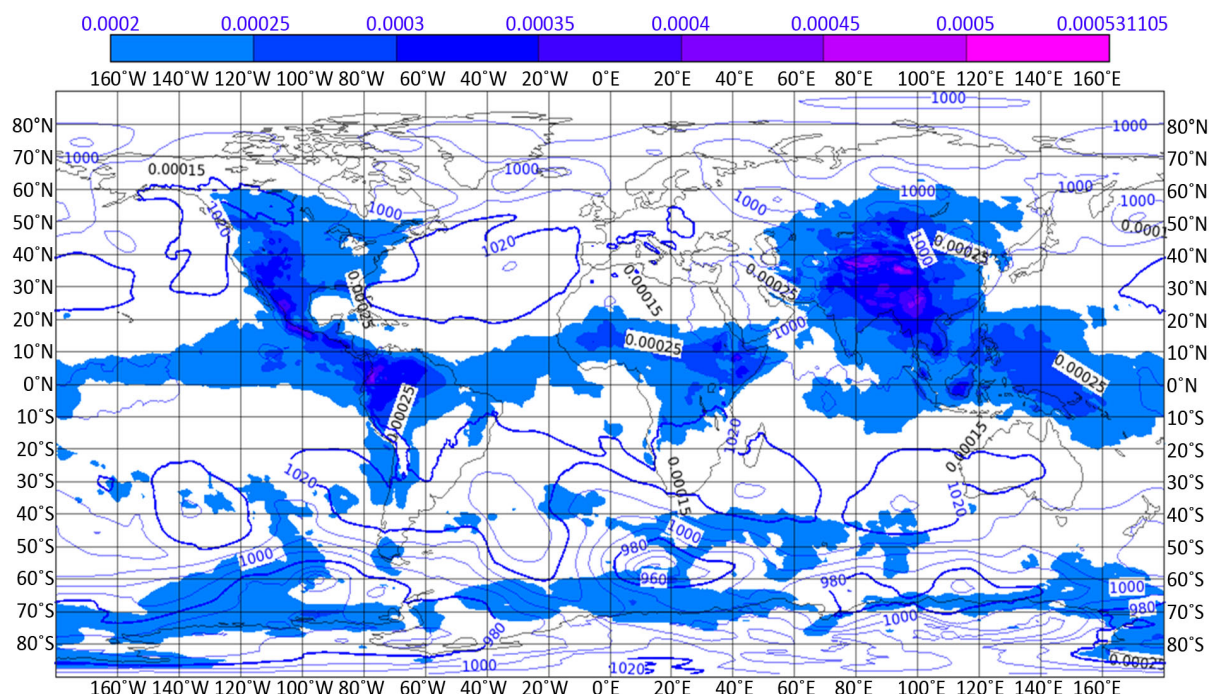


Figure 4. Time averaged (July 2017) EDA standard deviation of the unbalanced component of the surface pressure (shaded; hPa) and mean sea level pressure from ECMWF operational analysis (black contours; hPa)

图 4. EDA 的表面气压的非平衡项的标准差在 2017 年 7 月的时间平均(填色部分, 单位 hPa)以及 ECMWF 的平均海平面气压(黑色等值线, 单位 hPa)

选取第 114 层(对应 850 hPa 等气压面), 对温度非平衡项方差及其校正、滤波的结果的全球分布进行分析。图 5 显示温度的非平衡项方差的全球分布, 能够看到温度的非平衡项方差的高值区域主要位于南、北半球的中高纬度, 形状呈条带状, 并且更多分布海洋上空。在北大西洋中部、新西兰东部、非洲好望角、南美洲西海岸和南太平洋东部附近的海域, 温度的非平衡项方差最大。图 6 显示的是校正后温度的非平衡项方差的全球分布。经过校正, 消除系统误差的影响。图 7 显示的是校正和滤波后的温度的非平衡项方差的全球分布, 通过滤波消除掉噪声, 起到一定平滑作用。

3. 结论和讨论

3.1. 结论

本文简要介绍了 YH4DVAR 的背景误差协方差模型和集合四维变分资料同化系统架构, 重点分析了平衡算子, 通过集合方法估计得到了散度、温度和表面气压的非平衡项流依赖方差, 为了减少样本对方差估计的影响, 对非平衡项方差进行了校正和滤波处理, 经过校正消除系统误差, 再经过滤波消除噪声, 保留有价值的信息。主要工作及结论总结如下:

- 1) 使用 EDA 方法, 通过计算解释方差分析, 对非平衡项方差对总方差的贡献, 对月平均的非平衡

温度 EDA 标准差的经向平均的垂直剖面以及非平衡项表面气压的标准差进行分析, 看出方差解释率在第 80 层以下空间区域的远小于第 80 层以上, 在各个垂直层上, 热带地区的非平衡误差往往相对较大, 而表面气压非平衡项标准差高值区域呈条带状, 大致沿着纬圈分布, 也存在于南半球高纬度地区的低压系统周围。

2) 探究模式第 114 层(850 hPa)的温度非平衡项方差的分布特点, 并作校正、滤波处理。从 2017 年 7 月 2 日的温度非平衡项方差的全球分布看出, 温度非平衡项方差具有条带状分布特点, 高值聚集于南、北半球中高纬度, 并且在海洋上空分布多于陆地。

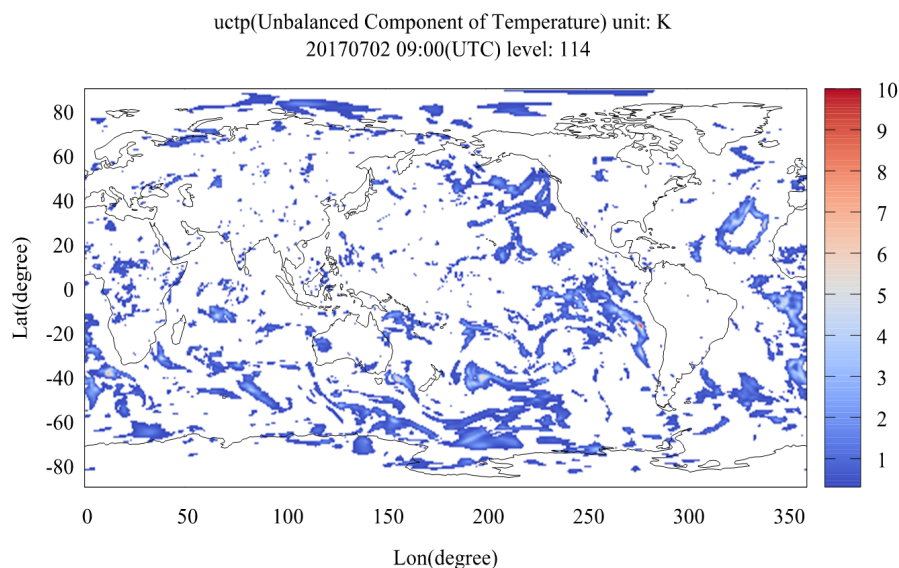


Figure 5. Global distribution unbalanced variance of temperature (level 114, 850 hPa), 2017-07-02 09:00 (UTC)

图 5. 温度非平衡项方差全球分布(第 114 层, 850 hPa)。2017 年 7 月 2 日 09:00 (UTC)

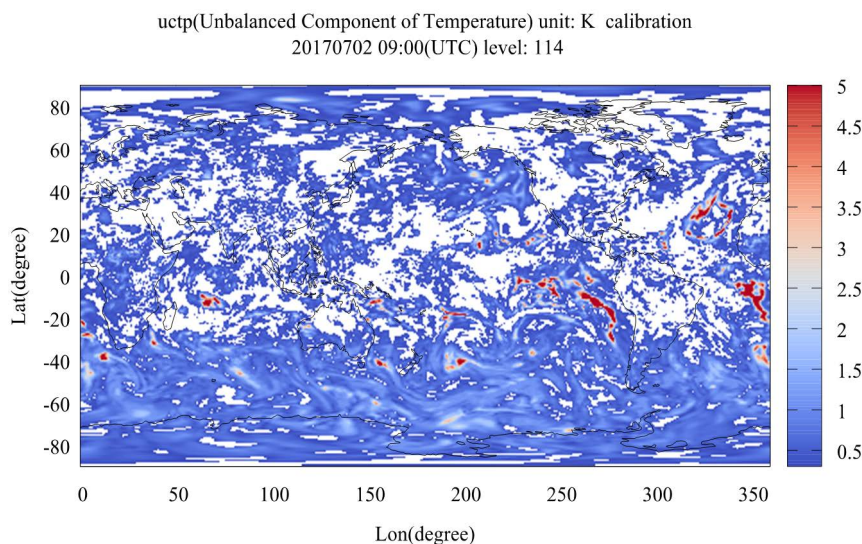


Figure 6. Global distribution unbalanced variance of temperature (level 114, 850 hPa, calibrated), 2017-07-02 09:00 (UTC)

图 6. 温度非平衡项方差全球分布(第 114 层, 850 hPa, 校正后)。2017 年 7 月 2 日 09:00 (UTC)

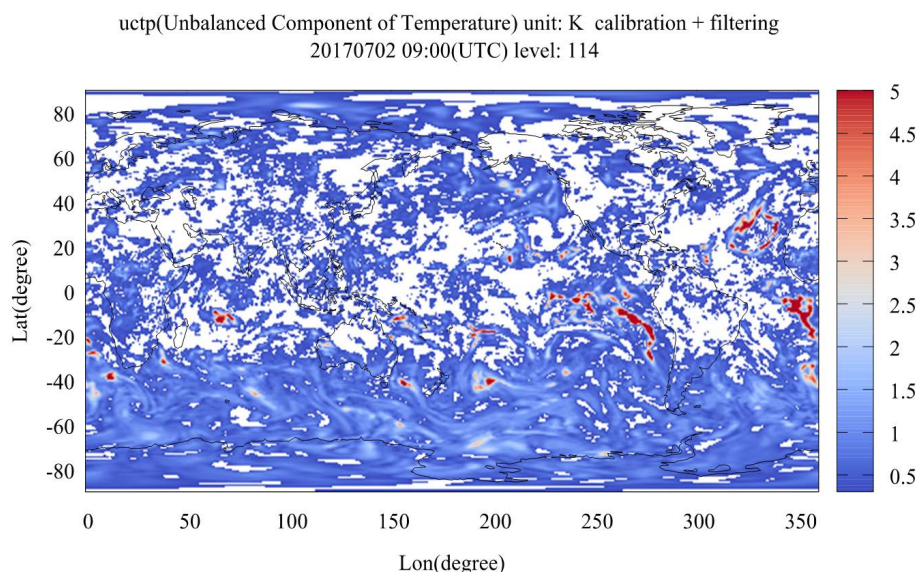


Figure 7. Global distribution unbalanced variance of temperature (level 114, 850 hPa, calibrated and filtered), 2017-07-02 09:00 (UTC)

图 7. 温度非平衡项方差全球分布(第 114 层, 850 hPa, 校正和滤波后)。2017 年 7 月 2 日 09:00 (UTC)

3.2. 讨论

本文对于非平衡项流依赖方差进行分析, 未来可以结合台风、暴雨的个例来检验流依赖非平衡项方差对同化和分析的影响。

致 谢

感谢国防科技大学气象海洋学院曹小群、刘柏年老师的指导。

基金项目

国家重点研发计划(批准号: 2018YFC1506704)和国家自然科学基金(批准号: 41475094)资助的课题。

参考文献

- [1] 张卫民, 朱小谦, 赵军. 气象资料三维变分同化阶段区域分解并行实现[J]. 计算机研究与发展, 2005, 42(6): 1059-1064.
- [2] 钱维宏. 如何提高天气预报和气候预测的技巧[J]. 地球物理学报, 2012, 55(5): 1532-1540.
- [3] Daley, R. (1991) Atmospheric Data Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 2-210.
- [4] 王瑞春. GRAPES 变分框架下背景误差协方差矩阵的优化[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京信息工程大学, 2012.
- [5] Parrish, D.F. and Derber, J.D. (1992) The National Meteorological Center's Spectral Statistical Interpolation Analysis System. *Monthly Weather Review*, **120**, 1747-1763. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1992\)120<1747:TNMCSS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1992)120<1747:TNMCSS>2.0.CO;2)
- [6] Fisher, M. and Andersson, E. (2001) Developments in 4D-Var and Kalman Filtering. ECMWF Technical Memorandum No. 347, 1-36.
- [7] Houtekamer, P.L., Lefaitre, L., Derome, J., et al. (1996) A System Simulation Approach to Ensemble Prediction. *Monthly Weather Review*, **124**, 1225-1242. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1996\)124<1225:ASSATE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1996)124<1225:ASSATE>2.0.CO;2)
- [8] Isaksen, L. (2007) Use of Analysis Ensemble in Estimating Flow-Dependent Background Error Variance. *Proc. ECMWF Workshop on Flow-Dependent Aspects of Data Assimilation*, 11-13 June 2007, 65-86.
- [9] Isaksen, L., Bonavita, M., Buizza, R., et al. (2010) Ensemble of Data Assimilations at ECMWF. ECMWF Technical

- Memorandum No. 636, 45.
- [10] Isaksen, L., Haseler, J., Buizza, R., *et al.* (2010) The New Ensemble of Data Assimilations. ECMWF Newsletter No. 123, 17-21.
 - [11] Courtier, P., Anderson, E., Heckley, W., *et al.* (1998) The ECMWF Implementation of Three-Dimensional Variational Assimilation (3DVAR). I: Formulation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **124**, 1783-1807. <https://doi.org/10.1002/qj.49712455002>
 - [12] Derber, J. and Bouttier, F. (1999) A Reformulation of the Background-Error Covariance in the ECMWF Global Data Assimilation System. *Tellus A*, **51**, 195-221. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v51i2.12316>
 - [13] Liu, C., Xiao, Q. and Wang, B. (2008) An Ensemble-Based Four-Dimensional Variational Data Assimilation Scheme. Part I: Technical Formulation and Preliminary Test. *Monthly Weather Review*, **136**, 3363-3373. <https://doi.org/10.1175/2008MWR2312.1>
 - [14] Liu, C., Xiao, Q. and Wang, B. (2009) An Ensemble-Based Four-Dimensional Variational Data Assimilation Scheme. Part II: Observing System Simulation Experiments with Advanced Research WRF (ARW). *Monthly Weather Review*, **137**, 1687-1704. <https://doi.org/10.1175/2008MWR2699.1>
 - [15] 邵爱梅, 邱晓滨, 邱崇践. 使用混合样本的集合四维变分同化试验研究[J]. 高原气象, 2011, 30(3): 583-593.
 - [16] Pasmans, I. and Kurapov, A. (2019) Ensemble of 4DVARs (En4DVar) Data Assimilation in a Coastal Ocean Circulation Model, Part I: Methodology and Ensemble Statistics. *Ocean Modelling*, **144**, Article ID: 101493. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2019.101493>
 - [17] 刘柏年, 皇群博, 张卫民, 等. 集合四维变分资料同化研究进展[J]. 气象科技进展, 2016, 6(5): 12-23.
 - [18] Bonavita, M., Isaksen, L. and Holm, E. (2012) On the Use of EDA Background Error Variances in the ECMWF 4D-Var. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **138**, 1540-1559. <https://doi.org/10.1002/qj.1899>
 - [19] 刘艳, 薛纪善. GRAPES 的新初始化方案[J]. 气象学报, 2016, 77(2): 165-179.
 - [20] 王若嘉. 为智慧气象之火添柴薪——GRAPES 全球四维变分资料同化系统研发侧记[N]. 中国气象报, 2020, 3(13): 3.
 - [21] 刘永柱, 龚建东, 张林, 等. 线性化物理过程对 GRAPES 4DVAR 的影响[J]. 气象学报, 2016, 77(2): 196-209.
 - [22] 陈耀登, 赵幸, 闵锦忠, 等. 青藏高原和华东地区背景误差协方差特征的对比研究[J]. 大气科学学报, 2015, 38(5): 650-657.
 - [23] 陈耀登, 夏雪, 闵锦忠, 等. 背景误差协方差及其对台风同化和预报的影响[J]. 热带气象学报, 2017, 33(3): 289-298.
 - [24] Barker, D., Huang, X. Y., Liu, Z., *et al.* (2012). The Weather Research and Forecasting Model's Community Variational/Ensemble Data Assimilation System: WRFDA. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **93**, 831-843. <https://doi.org/10.1175/BAMS-D-11-00167.1>
 - [25] Huang, X.Y. (2012) WRFDA 2012 Overview. Egu General Assembly Conference. EGU General Assembly Conference Abstracts.
 - [26] Wang, H., Huang, X. Y., Xu, D., *et al.* (2014) A Scale-Dependent Blending Scheme for WRFDA: Impact on Regional Weather Forecasting. *Geoscientific Model Development*, **7**, 1819-1828. <https://doi.org/10.5194/gmd-7-1819-2014>
 - [27] Bouttier, F., Derber, J. and Fisher, M. (1997) The 1997 Revision of the Jb Term in 3D/4D Var. ECMWF Technical Memorandum, 238.
 - [28] Bonavita, M., Hamrud, M. and Isaksen, L. (2015) EnKF and Hybrid Gain Ensemble Data Assimilation. Part II: EnKF and Hybrid Gain Results. *Monthly Weather Review*, **143**, 150929114615006. <https://doi.org/10.1175/MWR-D-15-0071.1>
 - [29] 张卫民, 曹小群, 宋君强. 以全球谱模式为约束的四维变分资料同化系统 YH4DVAR 的设计和实现[J]. 物理学报, 2012, 61(24): 249202.
 - [30] 曹小群, 宋君强, 张卫民, 等. 多源卫星观测数据在全球四维变分同化系统中的应用[J]. 测绘通报, 2014(S0): 102-107.
 - [31] Fisher, M. (2003) Background Error Covariance Modelling. *Seminar on Recent Developments in Data Assimilation for Atmosphere and Ocean*, Shinfield Park, 8-12 September 2003, 45-64.
 - [32] Fisher, M. (2004) Generalized Frames on the Sphere, with Application to the Background Error Covariance Modelling. *Seminar on Recent Developments in Numerical Methods for Atmospheric and Ocean Modelling*, Shinfield Park, 6-10 September 2004, 87-102.
 - [33] Rabier, F., Mc Nally, A., Andersson, E., *et al.* (1998) The ECMWF Implementation of Three-Dimensional Variational

- Assimilation (3D-Var). II: Structure Functions. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **124**, 1809-1829. <https://doi.org/10.1002/qj.49712455003>
- [34] Bouttier, F. and Courtier, P. (1999) Data Assimilation Concepts and Methods. Meteorological Training Course Lecture Series.
- [35] Barker, D., Huang, W., Guo, Y., *et al.* (2003) A Three-Dimensional Variational (3DVAR) Data Assimilation System for Use with MM5. NCAR the Note, 68.
- [36] Deckmyn, A. and Berre, L. (2005) Wavelet Approach to Representing Background Error Covariance in a Limited Area Model. *Monthly Weather Review*, **133**, 1279-1294. <https://doi.org/10.1175/MWR2929.1>
- [37] 曹小群, 黄思训, 张卫民, 等. 区域三维变分同化中背景误差协方差的模拟[J]. 气象科学, 2008(1): 12-18.
- [38] Lorenc, A.C. (1988) Optimal Nonlinear Objective Analysis. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **12**, 55-67. <https://doi.org/10.1002/qj.49711447911>
- [39] 刘柏年. 集合资料同化及背景误差方差滤波方法研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 国防科技大学, 2017.
- [40] Raynaud, L., Berre, L. and Desroziers, G. (2009) Objective Filtering of Ensemble-Based Background-Error Variances. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **135**, 1177-1199. <https://doi.org/10.1002/qj.438>