

# 基于SRTM的沅江流域水系提取与分形特征研究

苏琳叶

长江大学, 湖北 武汉

收稿日期: 2022年4月14日; 录用日期: 2022年5月16日; 发布日期: 2022年5月24日

## 摘要

为完善沅江流域治理的基础数字地形信息, 同时为沅江流域地理信息系统建设提供一定的信息支持, 基于沅江流域的SRTM数据, 利用ArcGIS软件的水文分析模块和提取分析模块等, 提取了沅江流域的河网水系, 同时采用网格法和分叉比河长比2种方法, 计算了沅江流域的水系分维数, 对比分析了网格法和分叉比河长比两种方法, 并判断了此流域的发育情况、构造运动程度和侵蚀旋回阶段。研究表明, 两种方法计算的沅江流域水系的分形维数分别为1.9327和1.9412, 满足分支比河长比计算方式大于网格法计算方式的规律, 前者计算工作量大于后者, 但可靠度较后者高。从水系分维值可以判断出研究区的流域发育阶段属于老年期, 该水系的发育情况较为完善, 构造运动强烈, 属于侵蚀旋回四级阶段。

## 关键词

水系, 分形维数, 沅江流域, SRTM

## Study on River Systems Extraction and Fractal Characteristics of Yuan River Basin Based on SRTM

Linye Su

Yangtze University, Wuhan Hubei

Received: Apr. 14<sup>th</sup>, 2022; accepted: May 16<sup>th</sup>, 2022; published: May 24<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

To perfect Yuan River basin based digital terrain information, at the same time for Yuan River ba-

in geography information system construction to provide certain information support, based on Yuan River basin SRTM DEM data, using the hydrological analysis module and extracting analysis module of ArcGIS software, etc., to extract the Yuan River drainage basin, at the same time, using the grid method and bifurcation is longer than the river than the two methods. The fractal dimension of the river system in the Yuanjiang River Basin was calculated, the grid method and the bifurcation to river length ratio were compared and analyzed, and the development of the basin, the degree of tectonic movement and the cycle stage of erosion were judged. Research shows that: the fractal dimensions of the Yuanjiang River drainage system calculated by the two methods were 1.9327 and 1.9412, respectively, which satisfied the rule that the branch-to-river ratio calculated by the two methods was larger than that calculated by the grid method. The calculation workload of the former method was greater than that of the latter, but the reliability of the former method was higher than that of the latter. According to the fractal dimension of the river system, the development stage of the basin in the study area belongs to the old age, the development of the river system is relatively perfect, the tectonic movement is strong, and it belongs to the four stages of erosion cycle.

## Keywords

River System, Fractal Dimension, Yuan River, Shuttle Radar Topography Mission

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

传统的水系描述上, 主要采用水系形状等定性描述的方法来描述, 而水流方向、汇流累积量等定量描述作为辅助。由于水系河网的外表的不可微分性, 无法用欧氏几何进行描述, 至今为止还未知如何准确地定量描述水系河网和流域地形地貌的结构特征[1]。20世纪60年代, 分形学的奠基人 Mandelbrot [2] 在1957年提出了一种基于“粗糙化”海岸线的公式, 第一次提出了分维的概念。近几十年来, 采用分形理论对水系河网结构特征来定量描述也在学术界得到了充分的认可[3] [4] [5]。Gupta 等[6]运用统计学方法证明了分形理论中的部分经验公式。汪富泉[7]通过分析能量和熵的关系, 阐述了冲击河流平面形态分形蜿蜒的原理。何自立[8]利用盒维数法计算了秦岭典型流域水系分维值, 分析其与水文特征和流域形态的相关性及空间分异性。费俊源[9]提取了雅鲁藏布江流域356个不同面积尺度的子流域, 并使用拐点法确定了最佳汇水面积阈值, 计算了所有子流域的盒维数。张艳如[10]利用网格法计算燕沟流域水系分形维数, 利用高程面积曲线法刻画了该流域的地貌侵蚀发育阶段。此后诸多学者对不同区域水系分形特征进行了大量研究。

为了完善沅江流域治理的基础数字地形信息, 本研究使用 ArcGIS 软件提取沅江流域的 SRTM 数据和水流的流向、汇流累积量、河网水系等流域特征数据, 同时采用网格法和分叉比河长比算法2种方法, 对比了这两种计算方式, 同时对流域水系的分维含义作出了解释, 借以分析流域的发育阶段、构造运动强度以及侵蚀旋回阶段等, 并对分形方法对于沅江流域地貌研究的重要作用进行了探讨。本文的技术路线图如图1所示。

## 2. 研究区概况

沅江, 别名为沅水, 是湖南省洞庭湖流域四大水系之一, 属于长江支流。源头为云贵高原苗岭东南

部的斗篷山，流经贵州省、湖南省、湖北省、重庆市、广西省，在常德市德山汇入西洞庭湖。

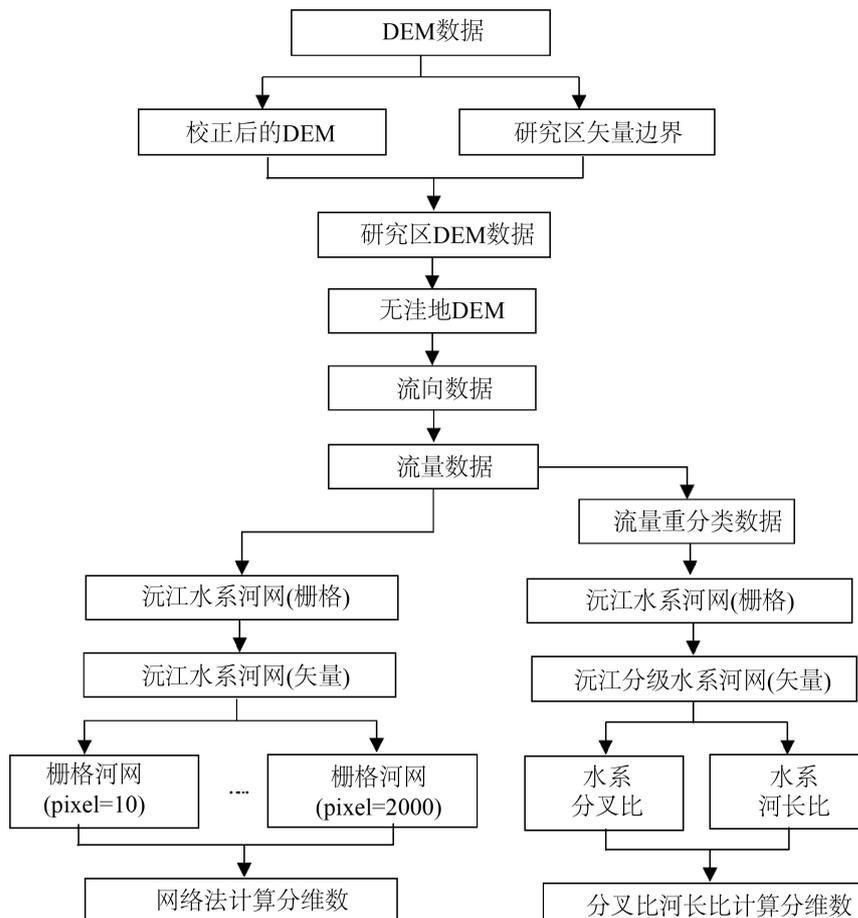


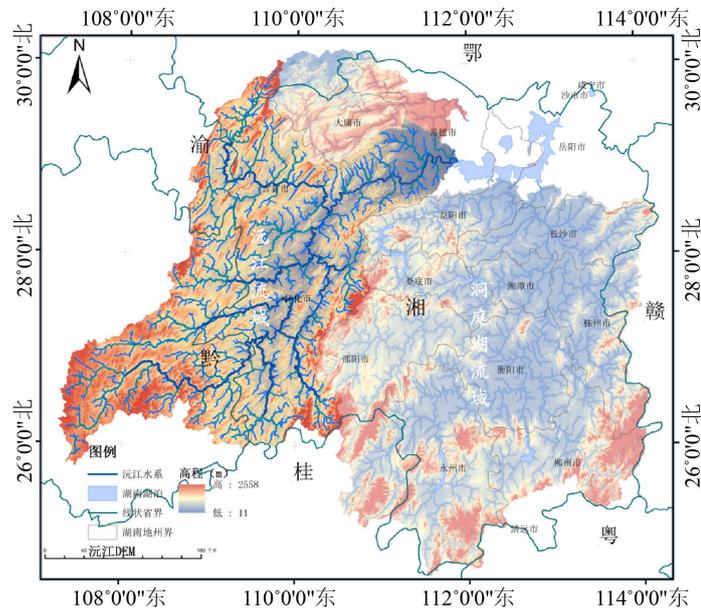
Figure 1. Technology roadmap

图 1. 技术路线图

沅江流域面积为 89647 平方公里，流域全长 1033 千米，是洞庭湖四大水系中最长的河流。沅江发育良好，支流众多，其中 13 条支流的流域面积超过 1000 平方千米，长度超过 5 千米以上的支流数目为 1491 条，属于羽状水系。沅江流域形状为平行四边形，由西南向东北斜，南北长东西窄。地势上跨越了我国的第二、第三级阶梯。流经的地貌主要为丘陵，植被覆盖较差，在坡面耕地上，有显著或严重的侵蚀现象发生[11]。研究区如图 2 所示。

### 3. 研究方法与流程

传统分维计算几乎依赖手工操作，这种方法既耗时耗力，又精度低且容易出错。正是因为传统的分维计算的种种缺点，本研究选择基于 SRTM 的分析方法，从数据的下载到最后的分析，都是以计算机自动化的形式进行，精度高、效率高、省时省力。通过地图影像或遥感影像等来获取地表水系，只是停留在平均意义上的特征分析，其描述即各种参数的量化是从外部出发，不能对水系结构的本质特性进行剖析。数字高程模型(DEM)数据通过有序数组形式表示地表高程，包含着丰富的水文资源信息与地形地貌信息，由 DEM 可以派生出等坡向、流量、坡度变化率等大量地貌特性信息[12]。



**Figure 2.** Schematic diagram of the study area  
**图 2.** 研究区示意图

### 3.1. 数据来源

#### 3.1.1. SRTM 数据

本文所使用数据是 SRTM 数据，是 DEM 的一种。SRTM 的中文全称为航天飞机雷达地形测绘使命 (Shuttle Radar Topography Mission)，是美国国家航空航天局(NASA)和国防部国家测绘局(NIMA)联合测量。SRTM 是基于 WGS84 和 EGM96 的 DEM 数据，在 90%置信水平下的垂直误差均小于 16 m。SRTM 数据每经纬度方格提供一个文件，精度有 1 arc-second 和 3 arc-seconds 两种，称作 SRTM1 和 SRTM3，或者称作 30 M 和 90 M 数据，SRTM1 的文件里面包含  $3601 \times 3601$  个采样点的高度数据，SRTM3 的文件里面包含  $1201 \times 1201$  个采样点的高度数据。本文使用的是 90 M 数据，即 SRTM3 数据。

#### 3.1.2. SRTM 数据预处理

一副生产出来的 SRTM 数据，由于其坐标系可能和研究区域数据有一定的出入，需要进行坐标校正。在生产过程中，也许会不可避免的产生很多误差，表现为 SRTM 数据中的错误点，需要进行消除操作。另外，下载的 SRTM 数据不是精确研究范围，所以需要镶嵌或者裁剪。

ArcGIS 是一个可伸缩的、全面的 GIS 平台，可用其来收集、组织、管理、分析、交流和发布地理信息。ArcGIS 包含了全球范围内的底图、地图数据、应用程序，可用于创建 Web 地图、发布 GIS 服务、共享地图、数据 and 应用程序。本文使用 ArcGIS 实现从 DEM 数据中提取沅江流域的河网，并完成水系分形维数的计算。使用 ArcGIS 的 Create the Mosaic Data Set 工具进行沅江流域 SRTM 的镶嵌，然后使用 Hydrology 工具生成沅江流域边界，并使用沅江流域边界和 Crop Tool 裁剪沅江流域 SRTM，最后使用 Mountain Shadow Tool 进行山体阴影提取，并渲染，叠加相应色带的 SRTM。

### 3.2. 沅江流域河流网络提取

#### 3.2.1. 无洼地 SRTM 生成

无洼地 SRTM 生成包括计算初始流向确定 Z 限制值，并计算洼地、填充洼地[13]，洼地填充后可以

得到无洼地的 SRTM，并根据使用 fill 工具设置 Z 限制值，确定要被填平洼地的最深值，小于该值的数据被保留，大于该值的洼地将被填充。

### 3.2.2. 水流方向计算

DEM 中某像元的水流方向即为水流离开此栅格单元时的指向[14]。在 ArcGIS 中，采用 D8 法计算水流方向。D8 法将中心像元的 8 个相邻像元进行编码，每一个像元只有 8 种可能流向，中心像元的水流流向则由其中的某一值来决定[15]。

D8 算法计算水流方向，见公式(1)。

$$S = \frac{H_z}{D_c} \quad (1)$$

式中： $H_z$ ， $D_c$  为 2 个像元中心之间的距离。

ArcGIS 中水流方向计算：添加填洼后的 SRTM 数据后，使用 Flow Direction 计算流向。

### 3.2.3. 汇流累积量计算

在模拟地表径流时，通过计算水流方向数据来计算汇流累积量[16]。汇流累积量的基本原理是：假设 DEM 每一个像元处有一个单位的水量，并根据自然水流由上往下的自然规律和研究区地形的水流方向数据，计算出各像元点所流过的水流量，最终计算出汇流累积量[17]。ArcGIS 中汇流累积量计算：使用 Flow Accumulation 进行汇流累积量计算。

### 3.2.4. 沅江流域河网提取

采用地表径流漫流模型，确定出河网的阈值，将栅格的汇流累积量与阈值比较，大于阈值的栅格被赋值为 1，否则为 NODATA。ArcGIS 中河流网络提取：使用 Raster Calculator 工具提取网络，选择适宜的阈值，最终生成的沅江流域河网水系图如图 3 所示：

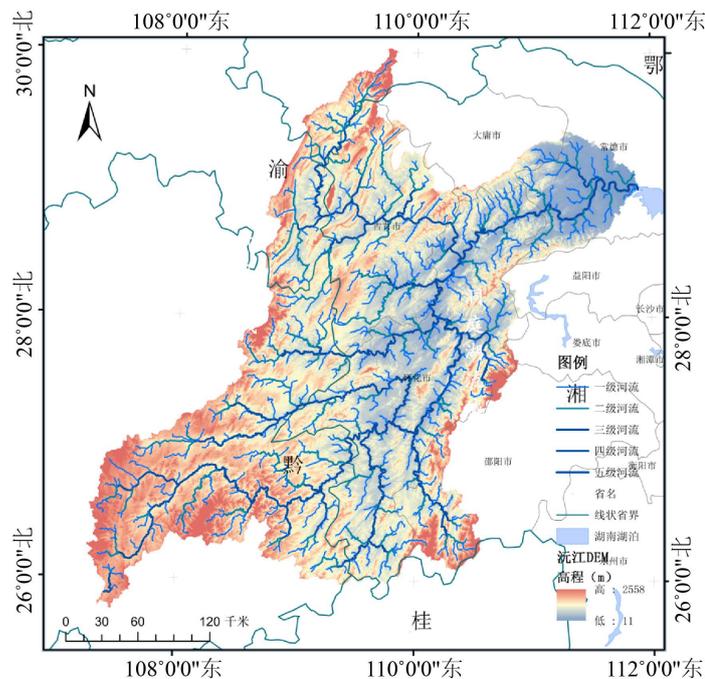


Figure 3. River Network and Water System in the Yuanjiang River Basin  
图 3. 沅江流域河网水系图

### 3.3. 沅江流域水系分形维数的计算

分形是非线性科学的前沿理论，主要用于描述整体与部分是相似的[18]。根据水系的分维数可以判断一个水系的发育程度[19]。本研究的水系分维数采用网格法与分叉比河长比 2 种方法进行计算。

#### 3.3.1. 网格法计算计盒维数

网格法计算分形的计盒维数可以抽象的理解成需要多少网格才能覆盖线体，通过对网格边长的逐渐减少，并对比网格数随网格边长的变化，最后计算出分维数。其计算公式(2)如下。

$$N(r) \propto r^{-D} \tag{2}$$

等式两边取对数公式变换如下

$$\lg N(r) = -D \lg r + A \tag{3}$$

式中： $N(r)$ 是网格数， $r$ 是网格的边长， $A$ 为待定常数， $D$ 为分维数，式(3)斜率的绝对值为其取值。

在 ArcGIS 中，将矢量的水系河网转换成栅格，用像元的大小来控制正方形的网格大小，得到不同的栅格像元数。最后通过要素的属性表来获取每一次输入不同像元  $r$  大小时覆盖水系网络所用的网格数  $N(r)$ ，并进行对数运算，结果见表 1。将  $\lg r$  和  $\lg N(r)$  两列的值绘制成线性方程(见图 4)，得二者关系式为  $\lg N(r) = -1.9327 \lg r + 11.308$ ， $R^2 = 0.9725$  ( $R$ 为复相关系数)，即  $\lg N(r)$  与  $\lg r$  之间十分线性相关。最终算得沅江流域网格法计算的计盒维数即水系分维数为  $D = 1.9327$ 。

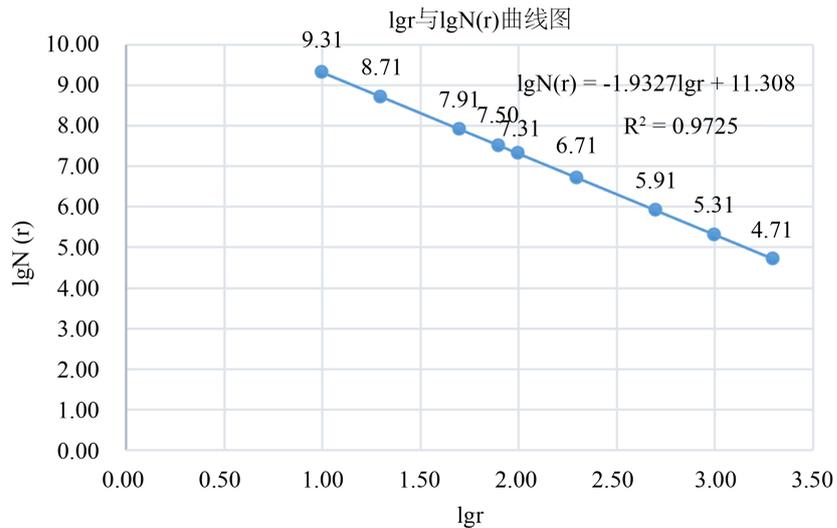


Figure 4. Curves of  $\lg r$  and  $\lg N(r)$   
图 4.  $\lg r$  与  $\lg N(r)$  曲线图

Table 1. Calculation table of dimension of grid method box  
表 1. 网格法计盒维数计算表

正方形网格边长 $r$	$\lg r$	$\lg N(r)$	水系所覆盖的网格数
10	1.00	9.31	2055646890
20	1.30	8.71	513922886
50	1.70	7.91	82227717
80	1.90	7.50	32124410

Continued

100	2.00	7.31	20561464
200	2.30	6.71	5240366
500	2.70	5.91	823374
1000	3.00	5.31	206067
2000	3.30	4.71	51744

### 3.3.2. 分叉比与河长比计算分维数

河网水系结构的节点与分支构成了河网水系的基本结构。Horton [20] [21] [22]在流域方面的研究提出了分形理论, 在开展流域侵蚀发育的定量形态研究过程时, 提出 Horton 定律——即水系组成定律。Horton-Strahler 的水道数目定律公式表示为

$$N_k = R_b (S - K) \quad (4)$$

其中  $N_k$  是  $k$  级河流的数目,  $R_b$  是河流的分枝比

由 Horton-Strahler 定理可得计算  $K$  级河流的河流长度公式(5)。

$$L(K) = N_k \times L_k = L_1 R_L^{K-1} R_B^{K-K} \quad (5)$$

式(5)求和得河网总长计算公式如下(6), (7)。

$$\sum L = L_1 R_L^{\gamma-1} \left| \frac{R_B}{R_L} \right|^{\gamma-1} = L_1 R_B^{\gamma-1} \quad (6)$$

$$L_1 = L_\gamma \left( \frac{1}{R_1} \right)^{\gamma-1} \quad (7)$$

取对数并将式(5)代入式(4)得式(8)。

$$\sum L = L_1 \left( \frac{L_g R_B}{L_g R_L} \right)^{\gamma-1} \quad (8)$$

当  $\gamma \rightarrow 0$ , 有  $L_1 \rightarrow 0$ , 视  $L_1$  为量测长度  $r$ , 得式(9)。

$$L = N \times r \sim r^{1-d} \quad (9)$$

由式(8)、式(9)得式(10)。

$$D = \frac{L_g R_B}{L_g R_L} \quad (10)$$

因为  $D$  取值范围[1, 2], 便得式(11)。

$$D = \min \left[ \max \left( 1, \frac{L_g R_B}{L_g R_L} \right), 2 \right] \quad (11)$$

由上述公式可知, 河流分维数与河长比和分叉比有关。分支比越大, 河流的分支数目越多, 河道越蜿蜒, 河流发育的程度越好, 其水系的分维数也就越大。在计算分维数时, 河网的平均分支比与平均河长比的比值即为分维数。

由水系河网分维值的计算公式, 分别计算出沅江流域水系的平均分叉比(见表 2)和平均河长比(见表

3), 并将两者分别取对数, 得到河网分维值  $D$ , 见公式(12)

$$D = \frac{L_g R_B}{L_g R_L} = 1.9412 \quad (12)$$

**Table 2.** Calculation table of bifurcation ratio

**表 2.** 分叉比计算表

河道级别	河道数目	相邻两级河道 分支比	相邻两级河道 总数	第三项 x 第四项	平均分叉比
1	2070				
2	507	4.08	2577	10514.16	
3	135	3.76	642	2413.92	
4	26	5.19	161	835.59	
5	6	4.33	32	138.56	
6	1	6	7	42.00	
累计总量			3419	13944.23	4.08

**Table 3.** River length ratio calculation table

**表 3.** 河长比计算表

河道级别	河道平均长度	相邻两级河道 长度比	相邻两级河道 平均长度之和	第三项 x 第四项	平均河长比
1	5592.48				
2	11393.95	2.04	16986.43	34652.3172	
3	22497.58	1.97	33891.53	66766.3141	
4	52209.5	2.32	74707.08	173320.4256	
5	192175.33	3.68	224384.83	825736.1744	
6	580445.65	3.02	772620.98	2333315.36	
累计总量			1105604.42	3399138.274	3.07

有关资料表明, 基于网格法的分形计算方式所得出的盒维数应小于分叉比河长比方法所得出的分形维数, 本次计算符合该规律, 由此可见是合理科学的。

## 4. 研究的结果与讨论

### 4.1. 分形计算方法对比分析

网格法与分叉比河长比计算结果分别为为 1.9327 和 1.9412。分叉比河长比的工作量大、计算量大, 需要对河网进行分级, 并分别计算水系的平均河长比和平均分叉比, 但是分叉比河长比的算法在水系分形研究中普遍使用, 所以其科学性经过了大量研究成果检验, 较网格法科学。网格法计算工作量小, 效率高, 无须河流分级操作, 且只需用矢量转栅格控制像元大小。但是由于矢量河网无法描述河宽变化, 一般视为同级的河流只能设置一致的宽度, 所以在转换为栅格的过程中会有误差, 无法真实反映河面面积, 与真实网格数有差异, 所以精度较分叉比河长比的算法低。

## 4.2. 检验分形维数的合理性

### 4.2.1. 水系合理性

为了考量 SRTM 提取河网的科学性, 使用 SRTM 提取河流并设置不同阈值, 最终与 Google earth 上的沅江流域河流地表形态进行对比, 当阈值取 1000 时提取的较为符合实际情况。查询关于沅江流域的水文资料, 沅江流域的确处于老年发育阶段, 河网密度大, 弯曲程度大。

### 4.2.2. 计算合理性

研究表明, 同时基于网格法的分形计算方式所得出的计盒维数应小于分叉比河长比方法所得出的分形维数, 本次计算符合该规律, 由此可见是合理科学的, 表明利用 SRTM 提取的水系并计算分维数具有可行性的。

## 4.3. 河网水系分形维数分析

### 4.3.1. 流域发育阶段分析

根据李后强的流域地貌发育阶段划分, 当水系分维值在 1~1.6 区间时, 流域地貌发育为幼年期, 在 1.6~1.89 区间时为壮年期, 在 1.89~2.0 区间时为老年期。用网格法与分叉比河长比方法 2 种方法计算得到的水系分维值为 1.9327、1.9412, 按以上划分流域地貌发育阶段的原则进行判断, 研究区域水系处于流域地貌发育的老年期, 水系发育情况良好, 河网密度大, 地面侵蚀严重。并与沅江现有水文资料进行对比, 该结果与区域实际情况相符合。

### 4.3.2. 构造运动程度分析

根据孔凡臣提出的构造运动程度与水系分维值成正比, 水系分维值越大, 构造运动越强烈。水系分维值的取值范围是在 1~2 之间, 基于 SRTM 提取的河网水系分别用网格法与分叉比河长比方法 2 种方法计算得到的水系分维值为 1.9327、1.9412, 本次计算的分维值趋于最大值 2, 说明沅江流域的构造运动强烈。

### 4.3.3. 侵蚀旋回阶段分析

根据侵蚀旋回阶段划分原理, 当水系分维值在 1.0~1.4 区间之内, 属于侵蚀旋回一级阶段; 当水系分维值在 1.4~1.6 属于侵蚀旋回二级阶段; 当水系分维值在 1.6~1.8 属于侵蚀旋回三级阶段; 当水系分维值在 1.8~2.0 属于侵蚀旋回四级阶段; 基于 SRTM 提取的河网水系分别用网格法与分叉比河长比方法 2 种方法计算得到的水系分维值为 1.9327、1.9412, 水系分维值在 1.8~2.0 区间, 本研究计算的沅江流域的分形值, 表明沅江流域处于侵蚀旋回四级阶段。

## 5. 总结

研究结果表明:

1) 两种方法计算的沅江流域水系的分形维数分别为 1.9327 和 1.9412, 满足分叉比河长比方法计算分维数大于网格法计算方式的规律, 前者计算工作大于后者, 但是前者是大家公认的方法, 已得到验证, 前者可靠度较后者高。

2) 基于 SRTM 数据提取的河网水系, 经过对比分析, 选取不同阈值, 最后发现阈值取 1000 时, 用 SRTM 提取的沅江流域水系的流域特征与地貌分布与原始水系基本吻合, 表明利用 SRTM 提取的水系并计算分维数具有可行性的。

3) 两种方式计算的分维值均大于 1.89, 其流域地貌发育位于老年期, 水系河网密度大, 发育情况良好, 构造运动强烈, 处于侵蚀旋回四级阶段。

## 参考文献

- [1] 陈彦光. 简单、复杂与地理分布模型的选择[J]. 地理科学进展, 2015, 34(3): 321-329.
- [2] Mandelbrot, B. (1967) How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*, **156**, 636-638. <https://doi.org/10.1126/science.156.3775.636>
- [3] 秦耀辰, 刘凯. 分形理论在地理学中的应用研究进展[J]. 地理科学进展, 2003, 22(4): 426-436.
- [4] 甘露. 基于 DEM 的黄土高原河网分形盒维数研究[D]: [硕士学位论文]. 南充: 西华师范大学, 2021.
- [5] 郭丹丹, 张世伟, 吴劲, 许丹, 蒋川. 基于 Horton 分形的灌区灌溉水有效利用系数影响因素分析[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2020, 56(3): 436-444.
- [6] Gupta, V.K. and Waymire, E. (1989) Statistical Self-Similarity in River Networks Parameterized by Elevation. *Water Resources Research*, **25**, 463-476. <https://doi.org/10.1029/WR025i003p00463>
- [7] 汪富泉, 李后强, 艾南山, 刘兴年, 丁晶. 水流、泥沙运动及河床演变中的分形与自组织[J]. 大自然探索, 1999(3): 55-61.
- [8] 何自立, 晁智龙, 王双银, 马孝义. 秦岭山脉典型流域水系分形特征及空间分异性[J]. 水电能源科学, 2019, 37(9): 13-16.
- [9] 费俊源, 吴鹏飞, 刘金涛. 基于盒维数的雅鲁藏布江流域水系分形维数及影响因素研究[J]. 中国农村水利水电, 2021(11): 78-82+89.
- [10] 张艳如, 李国庆, 刘冠, 鲁奇, 杜盛. 陕西省延安市燕沟流域水系分形与地貌侵蚀发育研究[J]. 水土保持研究, 2022, 29(2): 7-10. <https://doi.org/10.13869/j.cnki.rswc.2022.02.026>
- [11] 任志森. 沅江中游河流阶地发育及其对气候—新构造运动的响应[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国地质大学, 2019. <https://doi.org/10.27493/d.cnki.gzdzy.2019.001478>
- [12] 孟宪萌, 张鹏举, 周宏, 刘登峰. 水系结构分形特征的研究进展[J]. 地球科学进展, 2019, 34(1): 48-56.
- [13] 莫奇京, 罗蔚生, 杨桂贤. 基于 ASTER GDEM 的石漠化综合治理中的小流域提取研究——以广西石漠化综合治理应用为例[J]. 林业调查规划, 2011, 36(5): 22-25+35.
- [14] 边占新, 赵军华, 侯国力. 基于 ArcGIS 的流域数字特征提取模型[J]. 石家庄铁路职业技术学院学报, 2010, 9(3): 43-47.
- [15] 蒋刚, 曹广超, 曹生奎, 张广帅. 基于 ArcGIS 与 DEM 的青海湖流域水系模拟[J]. 宿州学院学报, 2013, 28(9): 80-84.
- [16] 王云, 梁明, 汪桂生. 基于 ArcGIS 的流域水文特征分析[J]. 西安科技大学学报, 2012, 32(5): 581-585.
- [17] 林庆, 林孝松, 王奎. 基于 DEM 的山区县域小流域划分——以重庆市忠县为例[J]. 重庆第二师范学院学报, 2015, 28(4): 160-163+169.
- [18] 刘莹, 胡敏, 余桂英, 李小兵, 刘晓林. 分形理论及其应用[J]. 江西科学, 2006(2): 205-209. <https://doi.org/10.13990/j.issn1001-3679.2006.02.029>
- [19] 原晓平. 基于 DEM 的格尔木河流域数字地形分析[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国地质大学, 2013.
- [20] Tarboton, D.G. (1996) Fractal River Networks, Horton's Laws and Tokunaga Cyclicity. *Journal of Hydrology*, **187**, 105-117. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(96\)03089-2](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(96)03089-2)
- [21] Saha, R., Upadhyaya, S.K. and Wallender, W. (2010) Modified Horton's Equation to Model Advance Trajectory in Furrow Irrigation Systems. *Journal of Irrigation & Drainage Engineering*, **136**, 248-253. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0000157](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000157)
- [22] Veitzer, S.A. and Gupta, V.K. (2000) Random Self-Similar River Networks and Derivations of Generalized Horton Laws in Terms of Statistical Simple Scaling. *Water Resources Research*, **36**, 1033-1048. <https://doi.org/10.1029/1999WR900327>