Advances in Geosciences 地球科学前沿, 2026, 16(11), 1575-1588
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ag
https://doi.org/10.12677/ag.2026.1611139

Hans汉斯

基于Tikhonov正则化的地磁反演建模与实验分析

李　博[1,2]

[1]河北红山巨厚沉积与地震灾害国家野外科学观测研究站，河北　邢台
[2]保定地震监测中心站，河北　保定

收稿日期：2026年10月4日；录用日期：2026年10月31日；发布日期：2026年11月11日

摘　要

在测点数远少于待求物性单元数的极端稀疏条件下，地表总场磁异常反演地下磁化率分布的性能边界与参数敏感性直接决定结果可信度。本文以棱柱体偶极核构建灵敏度矩阵，构建含数据残差项与深度加权正则项的Tikhonov目标泛函，基于广义奇异值分解稳定计算L曲线与广义交叉验证(GCV)函数，并以真实磁测数据与已知真模型的合成基准开展系统实验。结果表明：深度加权能以噪声量级的拟合代价消除系统性浅部聚集偏差，其有效标定参数β与z_0使质心深度沿参数网格单调变化、存在质心无偏等值线，据此可先验校正标定过冲，参考深度z_{ref}则仅为会被正则化参数吸收的规范自由度；巨大零空间使GCV分母中的迹$\mathrm{trace}(I - AA^{+})$趋于常数、GCV函数近乎平坦，极小点漂移至噪声内插或过度平滑区，而利用噪声水平先验的偏差原理选参保持稳定；模型相对误差在全参数网格内几乎不变，逐点重建不可达，深度加权改善的是深度定位的方向性偏差。据此为稀疏磁测反演提炼出规避浅部聚集、参数过冲与过拟合三类风险的实践准则。

关键词

Tikhonov正则化，地磁反演，深度加权，L曲线，广义交叉验证

Tikhonov Regularization for Geomagnetic Inversion: Modeling and Experimental Analysis

Bo Li[1,2]

[1]Hebei Hongshan National Observatory on Thick Sediments and Seismic Hazards, Xingtai Hebei
[2]Baoding Central Seismic Station of Hebei Province, Baoding Hebei

Received: October 4, 2026; accepted: October 31, 2026; published: November 11, 2026

文章引用: 李博. 基于 Tikhonov 正则化的地磁反演建模与实验分析[J]. 地球科学前沿, 2026, 16(11): 1575-1588.
DOI: 10.12677/ag.2026.1611139

Abstract

Under extremely sparse conditions where the number of survey points is far smaller than the number of model cells, the performance boundary and parameter sensitivity of recovering the subsurface susceptibility from surface total-field magnetic anomalies directly determine the credibility of the inversion. The sensitivity matrix is built with a prism/dipole kernel, a Tikhonov objective functional comprising a data-misfit term and a depth-weighted regularization term is formulated, and the L-curve and generalized cross-validation (GCV) functions are computed stably via the generalized singular value decomposition; systematic experiments are conducted on real magnetic survey data and on a synthetic benchmark with a known true model. The results show that depth weighting removes the systematic shallow-clustering bias at a data-misfit cost on the noise level, and that its effective calibration parameters β and z_0 move the center-of-gravity depth monotonically across the parameter grid with an unbiased-centroid contour, so that calibration overshoot can be corrected a priori, while the reference depth z_{ref} is merely a gauge freedom absorbed by the regularization parameter. A huge null space renders the denominator trace of GCV nearly constant and the GCV function nearly flat, so that its minimum drifts into the noise-interpolation or over-smoothing region, whereas discrepancy-principle-based selection with a reliable noise-level prior remains stable. The model relative error is nearly invariant over the whole calibration grid, indicating that pointwise reconstruction is unattainable and that depth weighting improves only the directional bias of depth positioning. Practical guidelines are accordingly distilled for users of sparse magnetic inversion to avoid shallow clustering, calibration overshoot, and overfitting.

Keywords

Tikhonov Regularization, Geomagnetic Inversion, Depth Weighting, L-Curve, Generalized Cross-Validation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

地磁勘探通过观测地表磁场异常推断地下磁性体(磁铁矿体、基性岩体、构造破碎带等)的空间分布与物性参数，是矿产勘查与区域构造研究的重要手段[1]。地下磁性介质在地球主磁场中被磁化，产生叠加于背景场之上的次生磁场，在地面表现为总场强度异常 ΔT。由 ΔT 反推地下物性分布本质上是线性/弱非线性积分方程反问题，并因观测有限、含噪且未知参数众多而具有典型不适定性——解未必存在、未必唯一，且对数据扰动高度不稳定(Hadamard 判据) [2]。

早期位场反演依赖人工解释与简单几何体正演试算，主观性强且难以保证客观性。Tikhonov 于 1963 年提出正则化思想，通过“数据拟合”与“模型约束”的折中泛函获得唯一且物理可接受的解，奠定现代反演的理论基石[3]-[5]。磁法领域，Parker [6]建立了位场反演的一般框架，Oldenburg 与 Li 的三维磁法反演框架与深度加权技术(指数 $\beta=3$)成功抑制了核函数随深度衰减导致的浅部聚集偏差[7] [8]；Tarantola 从贝叶斯角度证明 Tikhonov 正则化等价于高斯–马尔可夫先验下的最大后验估计[9]。国内姚长利、郭良辉、刘天佑等围绕三维重磁反演形成了数据空间反演与相关成像[10]-[13]、联合反演与遗传算法[14] [15]、

聚焦反演[16]、约束策略与神经网络[17]-[19]等技术路线，为本文方法选择提供了参考。

尽管方法体系相对成熟，实际资料处理仍面临两难：一方面地面磁测网常仅数十个测点，远少于待求物性单元数，反演高度欠定；另一方面 λ 的选取直接决定解的平滑程度与可信度，不当将欠拟合或过拟合。改进 L 曲线模型函数、随机广义奇异值分解(RGSVD)结合 GCV 的算法及偏差原理，提升了参数选取稳健性[20]-[22]。Li 与 Oldenburg 的 $\beta=3$ 深度加权虽已成标准，但其指数 β 与参考偏移 z_0 常依赖经验；本文合成基准显示，标准 $\beta=3$ 标定在消除系统性浅部聚集的同时会残留深度过冲，说明 β 与 z_0 需结合场源尺度标定。

本文在上述方法体系基础上，利用一组真实地面磁测数据(35 个测点，已做 IGRF 背景场剥离的总场磁异常 ΔT)开展完整的方法实现与实验分析。主要工作包括：正问题的棱柱体偶极核离散化、反演系统的不适定性量化、深度加权 Tikhonov 目标泛函构建、基于广义奇异值分解的稳定 L 曲线/GCV 参数选取，以及合成基准与实测数据两层次的反演验证。全文旨在为稀疏磁测资料的反演处理提供一套可复现、可解释的建模流程与实证结果。本文的定位并非提出新的正则化算法，而是把既有 Tikhonov 深度加权反演作为被考察对象，在测点数远少于单元数的极端稀疏条件下，定量考察其性能边界(可恢复什么、不可恢复什么)与参数敏感性(β、z_0、λ 选取如何影响结果)，并据此为使用者提炼规避浅部聚集、参数过冲与过拟合风险的实践指南。

2. 正问题物理模型与观测方程

2.1. 静磁方程与磁位

在无自由电流、准静态的地磁观测场景中，磁场满足 Maxwell 静磁近似：

$$\nabla\times H=0,\nabla\cdot B=0,B=\mu_0\left(H+J\right) \tag{1}$$

式中 H 为磁场强度，B 为磁感应强度，J 为磁化强度(感磁与剩磁之和，A/m；本文以 J 记磁化强度，以避开与 2.2 节起表示单元总数的 M 相混淆)。由$\nabla\times H=0$ 可引入标量磁位 U 使 $H=-\nabla U$，代入散度方程得磁位泊松方程：

$$\nabla^2U=\nabla\cdot J \tag{2}$$

由泊松方程的格林函数解，异常体的磁位可写为磁化强度的体积分，据此可求得任一观测点的磁场分量与总场强度异常(位场正演的通用理论参见文献[23])。

2.2. 离散观测方程

将研究区规则剖分为 M 个常量物性棱柱体单元，设第 j 单元磁化率为 κ_j、体积为 V_j。在偶极近似下(单元尺寸远小于单元至观测点距离时成立)，观测点 i 处总场异常为各单元偶极场的叠加。记单元至观测点的矢径矢量为 R_{ij}、其模长(距离)为 R_{ij}，感应场单位方向为 f_0 (由倾角 I、偏角 D 确定)，则磁偶极子在观测方向的总场异常为：

$$\Delta T_i=\sum_{j=1}^{M}\frac{F_0V_j}{4\pi}\frac{3\cos^2\theta_{ij}-1}{R_{ij}^3}\kappa_j \tag{3}$$

其中 F_0 为感应场强度幅值；θ_{ij} 为感应场方向与单元－观测点连线的夹角，$\cos\theta_{ij}$ 由单位方向矢量 f_0 与矢径单位矢量的点积给出。该式已按 SI 制化简：因磁化强度 $J=\kappa F_0/\mu_0$ (A/m)，偶极场中的 $\mu_0/4\pi$ 与 $1/\mu_0$ 相消，故式中仅保留 $1/4\pi$。写成矩阵形式即第一类线性反问题：

$$d=Am+e \tag{4}$$

$d \in R^N$为观测异常矢量，$m \in R^M$为以式(3)中κ_j为分量的单元物性矢量(通常$M \gg N$，欠定)，$A \in R^{N \times M}$为灵敏度矩阵(雅可比)，元素由式(3)预计算，e为观测噪声。

实际计算中，先对观测点坐标与单元中心作矢径几何解析，逐列(单元)批量填充A，并采用稀疏存储以节约内存；正则算子L依平滑需求取恒等(零阶、小范数阻尼)、一阶差分(梯度惩罚)或二阶差分(曲率惩罚)。本文取$L = Wz$ (深度加权对角阵)，必要时再叠加零阶小范数，以兼顾解的聚焦性与稳定性。

2.3. 实验区数据与坐标处理

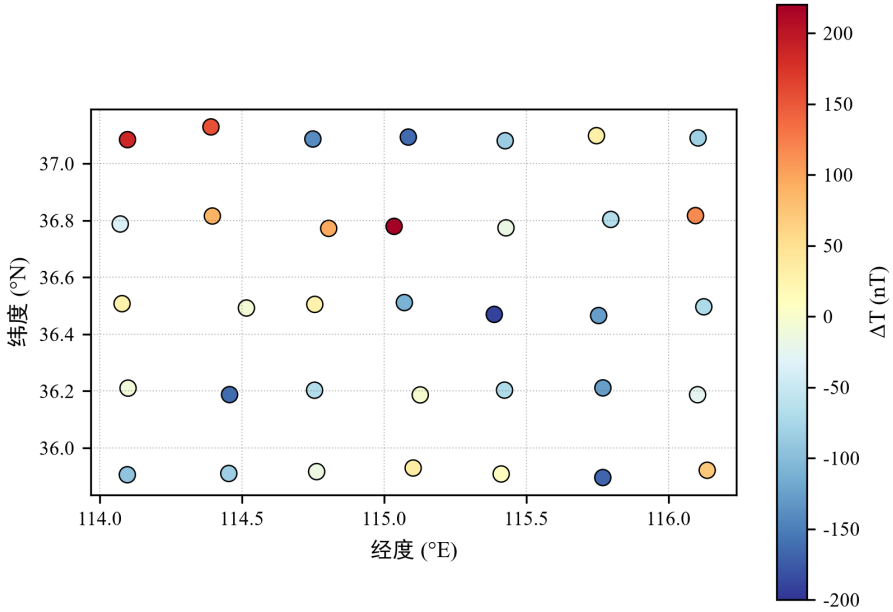


Figure 1. Distribution of measurement points and total-field magnetic anomaly ΔT
图 1. 测点分布与总场磁异常 ΔT

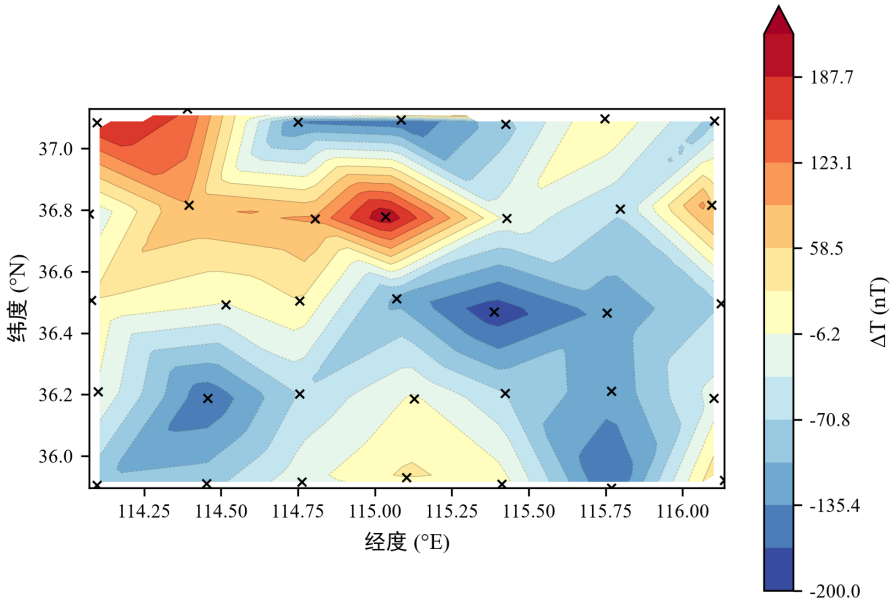


Figure 2. Contour map of the total-field magnetic anomaly
图 2. 总场磁异常平面等值线

本文实验区位于我国华北地区(约 114.0˚E~116.1˚E、35.9˚N~37.1˚N)，35 个测点覆盖约 184.7 km × 137.2 km (反演网格略大于该范围，以减弱边界效应)。将经纬度按等距圆柱投影转换为局部东(E) - 北(N) - 上(U)直角坐标(米)，测点高程作为 U 方向偏移。感应场取 F_0 = 53330.5 nT (由 IGRF 背景场均值确定)、倾角 I = 58˚、偏角 D = −6.2˚。图 1 给出测点空间分布与 ΔT 着色，图 2 为其平面等值线，可见异常呈明显正负分区，暗示地下存在具有一定规模的磁性不均匀体。

3. 反问题的不适定性分析

对灵敏度矩阵 A 作奇异值分解 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，奇异值 σ_i 缓慢衰减至数值零。直接最小二乘解 $m_{\mathrm{LS}} = \sum_i \left(u_i^T d\right)/\left(\sigma_i\right)v_i$ 中，小 σ_i 对小噪声 e 产生约 $1/\sigma_i$ 的放大，这是必须正则化的数学根源。

本实验网格取 25 × 19 × 9 = 4275 个单元(水平覆盖 200.7 km × 153.2 km，垂向 1~9 km，单元尺度 8.03 km × 8.07 km × 0.89 km)，N = 35，故 $M \gg$ N，零空间维数高达 M − N = 4240。这是反问题非唯一性的直接来源：存在无穷多组物性分布产生几乎相同的地表异常。在本文采用的深度加权归一化算子下，35 维值域内的广义条件数 $\kappa_g \approx 7.50$ (值域内数值条件尚好)，但庞大的零空间使得直接反演毫无意义——必须引入正则化，在无穷多解中挑选物理可接受者。表 1 汇总了关键量化指标，为后续正则化设计提供依据。

从 Hadamard 三要素看，本系统解的稳定性因小奇异值放大噪声而丧失，唯一性因 4240 维零空间而彻底丧失，只有正则化解的存在性得以保全；这正是必须正则化的根本原因。也正因唯一性缺失，任何单一反演解都只是无穷多等价解中的一个代表，评价解的质量不能仅看数据拟合，还需借助深度加权等先验约束对解的结构施加约束。

Table 1. Quantitative indicators of the ill-posedness of the inversion system
表 1. 反演系统不适定性量化指标

指标	数值
测点数 N/单元数 M	35/4275
零空间维数 M-N	4240
实测 ΔT 范围/RMS	[−190.97, 221.49] nT/104.47 nT
单元尺寸(东 × 北 × 深)	8.03 × 8.07 × 0.89 km
深度加权广义条件数 κ_g	7.50

4. Tikhonov 正则化方法

4.1. 目标泛函与深度加权

标准 Tikhonov 目标泛函为[4] [24]：

$$\Phi(m) = \|Am - d\|_{Wd}^2 + \lambda^2 \|W_z(m - m_0)\|_{W_m}^2 \tag{5}$$

式中 $\lambda > 0$ 为正则化参数，Wd = diag(1/σi^2)为数据加权(按观测误差 σi)，m_0 为参考模型(通常取 0)，W_z 为深度加权对角阵；第一项为数据残差项、第二项为深度加权正则项。正则算子可按需求取零阶(小范数)、一阶(梯度惩罚)或二阶(曲率惩罚) [25]；在磁法反演中，为抵消核函数 1/R^3 的深度衰减，必须引入深度加权 Wz = diag(wj)，其元素

$$w_j = \left(\frac{z_j + z_0}{z_{ref} + z_0}\right)^{-\beta/2} \tag{6}$$

取深度加权指数 $\beta = 3$、参考深度 $z_{ref} = 3$km、参考偏移 $z_0 = 1.5$ km。该加权在浅部($(z_j + z_0)$小)给予较强惩罚、深部给予较弱惩罚，从而把物性质量向深部推移，抑制浅部聚集(标定不当亦会使质量过度下移，见 6.2 节)。本文对深度加权作以 z_{ref} 为参考的归一化，使正则项数量级为 O (1)，λ 落在常规范围，便于不同策略公平比较。此外，还可叠加盒式约束(物性范围)、非负/符号约束或稀疏 Total Variation 约束，以嵌入更具体的地质先验。需进一步指出，z_{ref} 在权函数中仅以常数因子$(z_{ref} + z_0)^{(\beta/2)}$出现，并不改变加权随深度的相对形状；当 λ 由数据自适应选取时，该常数因子会被 λ 精确吸收，因而 z_{ref} 不构成独立的标定自由度。数值检验表明：取 $\beta = 3$、$z_0 = 1.5$ km 并令 z_{ref} 依次为 1、2、3、5、8 km，λ 与$(z_{ref} + z_0)^{(3/2)}$之积恒为 6.417×10^8 (相对离散 1.5×10^{-15})，质心深度恒为 6.2211 km (极差 0 km)，真正控制深浅权重分配的是 β 与 z_0。

从贝叶斯视角，Tikhonov 正则化解等价于在高斯－马尔可夫先验 $m \sim N(m0, \lambda^{-2}Wz^{-2})$下的最大后验估计[9]，正则项即先验协方差的负对数。这一等价关系说明：正则化并非“人为外加的光滑”，而是在已知物性统计分布下的最优推断；正则化参数 λ 则对应信噪比，表征“数据约束”与“先验约束”之间的相对权重。该视角也为引入非高斯先验与贝叶斯不确定性量化提供了统一框架。

4.2. 数值求解

目标泛函对 m 二次可微，最优解满足法方程$\left(A^T W_d A + \lambda^2 W_z^T W_z\right) m = A^T W_d d$。为避免显式构造并求逆大型($M \times M$)法方程，本文采用增广系统 + LSQR 迭代求解：对给定 λ，解

$$\min_m \left\| Am - d \right\|^2 + \lambda^2 \left\| W_z m \right\|^2 \tag{7}$$

该形式数值稳定，无需对深度加权作显式 $1/w$ 缩放(后者会因动态范围过大而破坏矩阵条件数)。LSQR 作为 Lanczos 型共轭梯度法，迭代过程本身提供“早停”隐式正则化，适合大规模稀疏问题。需要强调的是，本文的 LSQR 求解以固定的 λ 进行，早停仅作为数值加速手段，正则化程度完全由 λ 控制，从而与 L 曲线/GCV 的参数选取流程清晰分离，保证实验结论可归因于正则化策略本身而非迭代次数的偶然选择。

4.3. 正则化参数选取

L 曲线法在双对数坐标绘制($\log\|Am-d\|$, $\log\|W_z m\|$)，曲线呈“L”形，其拐角(corner)对应最优 λ，可通过曲率最大化自动定位；优点是不需噪声水平先验、直观稳健[26]。

广义交叉验证(GCV)最小化留一法预测误差的估计：

$$V(\lambda) = \frac{\left\| Am_\lambda - d \right\|^2}{trace\left(I - A_\lambda^\dagger\right)^2} \tag{8}$$

其极小点给出客观的参数估计[27]。

偏差原理(Morozov)在已知噪声水平 δ 时，选取使残差$\left|Am - d\right| \approx \delta$ 的最小 λ。

Table 2. Comparison of regularization parameter selection methods
表 2. 正则化参数选取方法对比

方法	需噪声水平	客观度	本文用法
L 曲线	否	中(需拐角判定)	主选，稳健
GCV	否	高	辅助交叉验证
偏差原理	是	高(若 δ 准)	合成算例主选(见 6.4 节)

本文在数据加权并入 A 与 d 后(等价于取 $\mathrm{Wd}=I$)，构造 35×35 对称矩阵 $B=AW_z^{-2}A^T$ 并作本征分解(与增广系统(A, Wz)的广义奇异值分解等价)，精确计算上述残差、模型范数与 GCV 函数(数值稳定，规避了满秩 SVD 的尺度病态)，进而定位 L 曲线拐角与 GCV 极小点。三种方法的对比见表 2。

5. 实验数据与方法

5.1. 实测数据

采用 35 个地磁总强度测点的真实数据。每个测点含经纬度、高程、观测总场 F、IGRF 背景场 F 及经背景场剥离后的总场磁异常 ΔT。数据 RMS 为 104.47 nT，空间上呈现明显的正负异常分区(图 1、图 2)，暗示地下存在具有一定规模的磁性不均匀体。该数据构成反演实验的真实观测约束。

5.2. 合成基准数据

为在已知真解下检验算法，构建合成真模型：在研究区中心下方、深度 4~6 km 的层位赋磁化率 $\kappa=0.04$ (SI 单位制，无量纲)的宽缓块体，水平范围以±40 km 为掩码界定。受网格离散制约，实际激活单元为 9 (东) × 9 (北) × 3 (深) = 243 个，对应块体尺度约 72.3 km × 72.6 km × 2.67 km——即掩码标称的±40 km 边界落在相邻单元中心之间，实现后的块体略小于标称尺寸，此处以实际剖分结果为准。由式(3)的正演算子生成无噪异常，叠加 SNR = 20 dB 的高斯白噪声(噪声标准差 $\sigma_n=5.32$ nT)，得到合成观测。该尺度下异常信号(RMS 53.2 nT)可被 35 个稀疏测点分辨，用于验证深度加权对浅部聚集偏差的校正能力，并量化解的拟合优度。

5.3. 反演参数设置

灵敏度矩阵 A 由式(3)偶极核预计算。分别对“深度加权”(正则项换为$|W_z m|^2$)与“无深度加权”($W_z=I$)两种配置反演，参数 λ 由 L 曲线/GCV 自适应选取；合成数据另以偏差原理(残差 ≈ 噪声水平)校核。

5.4. 误差与稳定性评价指标

为定量刻画反演解的质量与算法的稳定性，定义如下指标：

(1) **均方根拟合残差与约化 χ^2**。$RMS=\sqrt{N^{-1}\|Am-d\|^2}$，$\chi_\nu^2=RMS^2/\sigma^2$，其中 σ 为观测噪声水平；$\chi_\nu^2\approx1$ 表示残差与噪声水平吻合、解未过拟合。

(2) **方差解释率** $R^2=1-\|Am-d\|^2\big/\left|d-\bar{d}\right|^2$，衡量反演对观测异常的还原程度。

(3) **模型相对误差** $E_m=\left|m-m^{true}\right\|\big/\left\|m^{true}\right|$，仅在合成基准(已知真模型)下可算，用于评估空间重建精度。

(4) **质心深度(CoG)** $z_{CoG}=\sum_j z_j\left|m_j\right|\big/\sum_j\left|m_j\right|$，反映恢复物性的平均赋存深度，是检验浅部聚集偏差的直接指标。

(5) **噪声敏感度与稳定性**：对观测叠加不同实现的随机噪声重复反演，统计 CoG 的均值与标准差(变异系数)，量化解对观测噪声的鲁棒性。

上述指标在第 6 节逐一报告。

6. 结果与分析

6.1. 不适定性量化结果

对应第 3 节，系统零空间维数 4240、值域广义条件数 7.50，表明反演高度欠定。图 3、图 4 给出实测数据的 L 曲线与 GCV 函数，二者选取的 λ 存在明显分歧(成因分析见 6.4 节)。

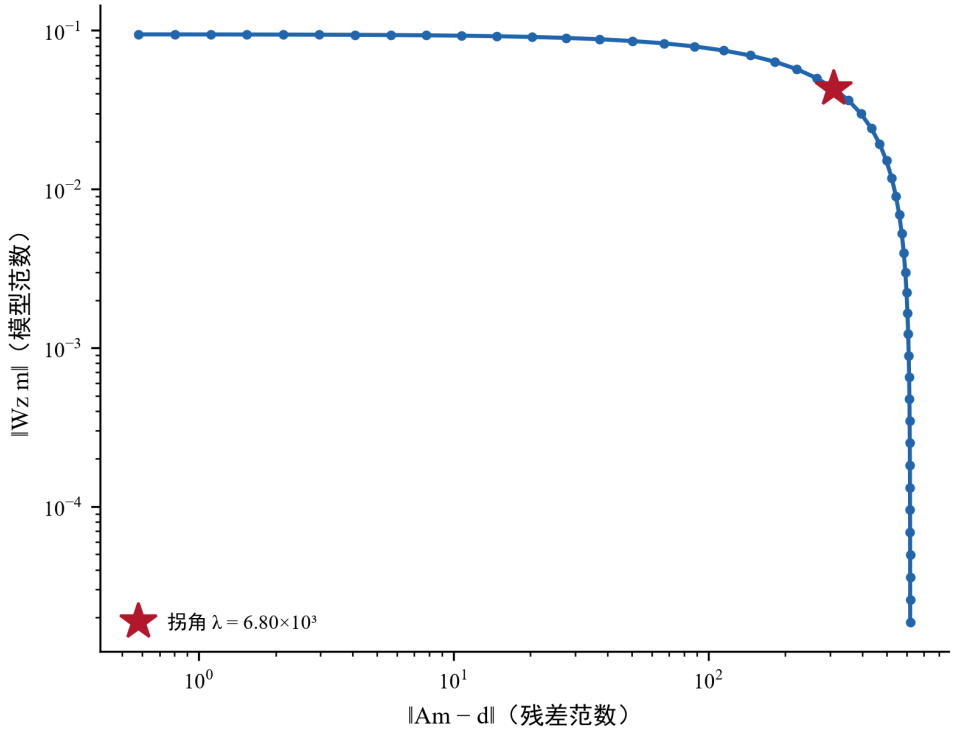


Figure 3. L-curve of the measured data
图 3. 实测数据 L 曲线

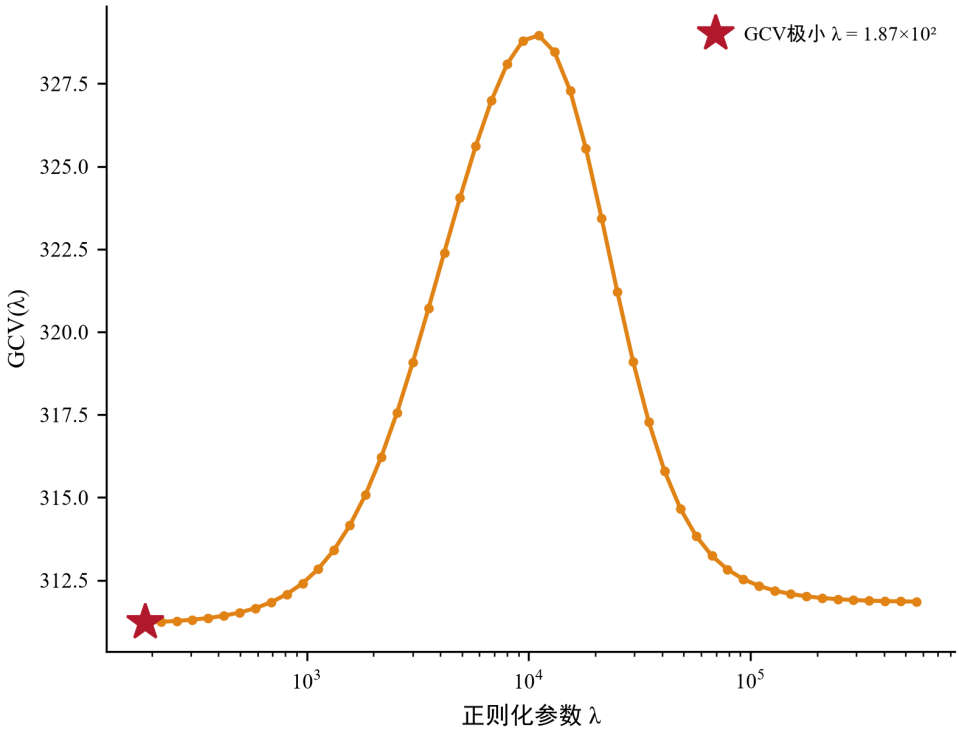


Figure 4. Generalized cross-validation function of the measured data
图 4. 实测数据广义交叉验证函数

6.2. 合成基准验证：深度加权校正浅部聚集

合成基准中，深度加权与无加权两种正则化解对含噪数据的拟合程度相当(RMS 分别为 5.84 nT 与 6.97 nT，约化 χ^2 分别为 1.20 与 1.71，与噪声水平同量级)，但恢复模型的空间位置差异显著(图 5)：

- 真模型质心深度 5.00 km；
- 深度加权解质心深度 6.22 km (相对真值偏深约 24%)；
- 无深度加权解质心深度 3.95 km (明显偏浅，呈典型浅部聚集)。

即在二者数据拟合几乎相同(非唯一性的直观体现)时，仅深度加权解把物性质量置于真值所在的深部区间(偏深约 24%)，无加权解则明显向浅部聚集(偏浅约 22%)。该结果定量验证了深度加权的必要性，也说明在欠定反问题中正则化承担着“择模”的关键角色。需指出，受 4240 维零空间主导，恢复模型相对真模型的逐点误差仍较大(约 99%)，这是稀疏观测下的固有分辨率极限，而非算法缺陷；深度加权改善的是深度定位的方向性偏差，而非逐点重建精度。图 5 东－深度垂直剖面直观显示，深度加权恢复(5b)的质量集中区较无加权(5c)明显下移，更接近真模型(5a)的深部位置。

表 3 汇总了合成基准下两种策略的关键指标对比。可见深度加权在保持数据拟合(约化 $\chi^2 \approx 1.20$)与无加权(约化 $\chi^2 \approx 1.71$)相当的同时，将质心深度由偏浅的 3.95 km 校正至 6.22 km，把系统性偏差由−21%反转为+24%。需明确指出：就绝对偏差而言，深度加权解(1.22 km)略大于无加权解(1.05 km)，因此本文的实证结论是“深度加权消除了浅部聚集的方向性偏差”，而非“绝对深度更准确”；残余的+24%过冲源于 $\beta = 3$、参考偏移 $z_0 = 1.5$ km 的标定，可通过减小 β 或增大 z_0 进一步校正(见 6.6 节)。这一结果为深度加权的标定敏感性提供了定量线索(系统性参数扫描见讨论(2)及后续工作)，也印证了其作为“择模”算子的核心作用。

Table 3. Comparison of inversion results for the synthetic benchmark
表 3. 合成基准反演结果对比

指标	真模型	深度加权	无深度加权
RMS 拟合/nT	—	5.84	6.97
约化 χ^2 ($\sigma = 5.32$ nT)	1.00	1.20	1.71
质心深度/km	5.00	6.22	3.95
模型相对误差	—	99.26%	99.64%

注：约化 χ^2 以噪声水平 $\sigma = 5.32$ nT 计算；真模型对含噪数据拟合的 χ^2 取 1.00 为基准。

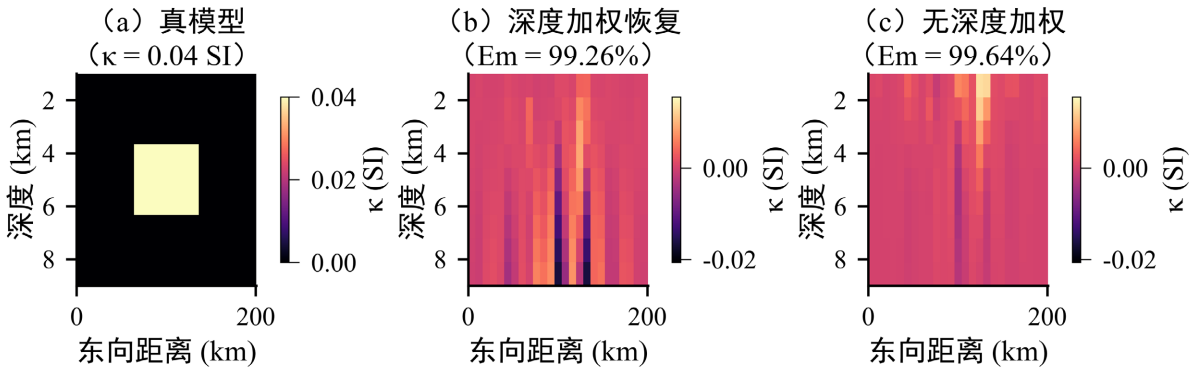


Figure 5. Synthetic benchmark: east-depth vertical section (susceptibility κ)
图 5. 合成基准：东－深度垂直剖面(磁化率 κ)

6.3. 实测数据反演结果

对 35 个测点实测 ΔT 施加深度加权 Tikhonov 反演。L 曲线选定 $\lambda^* = 6.80 \times 10^3$，对应残差 RMS 52.4 nT，较数据 RMS (104.5 nT)降低约 50%，方差解释率约 73%；恢复模型质心深度由无加权的 3.84 km 移至 6.17 km (图 6)，与合成结论一致地显示深部偏移，表明地下主要磁性不均匀体的有效中心位于较深处。不同深度的水平切片显示磁化率呈区域性分布，与异常平面分区(图 2)大体吻合，说明反演在稀疏数据下仍保留了主要异常体的空间结构信息。需指出，73%的方差解释率是 L 曲线选取 $\lambda^* = 6.80 \times 10^3$ 的结果——若改用 GCV 给出的 λ，残差可压至近零(见 6.4 节)，故该数值刻画的是本文的选参准则，而非方法拟合能力的上限。

值得说明的是，恢复质心 6.17 km 应理解为地下主要磁性不均匀体的整体平均赋存深度指示，而非某一具体矿体的精确定深。受 4240 维零空间主导，各深度切片上物性的绝对值存在非唯一性，但其水平分区与地表异常分区(图 2)的一致性，说明反演在稀疏观测下已捕获到主要场源的结构性位置信息，这一结论与合成基准中深度加权校正浅部聚集的发现相互印证。

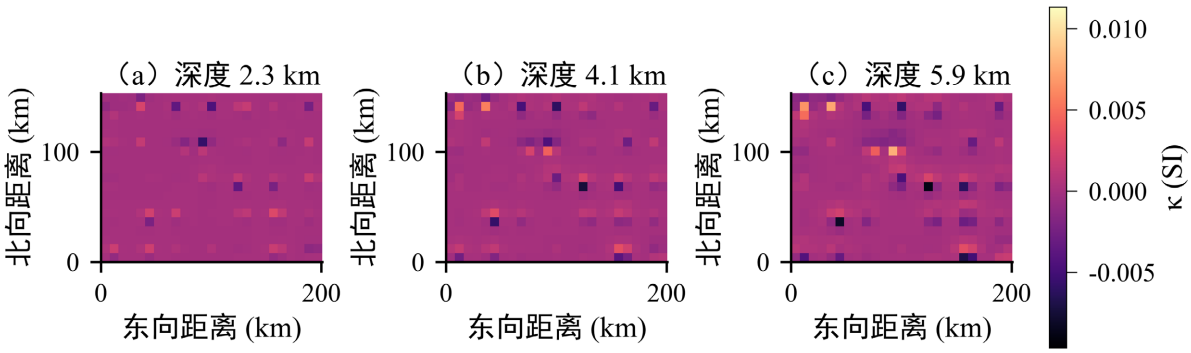


Figure 6. Real-data inversion: horizontal slices of susceptibility at different depths
图 6. 实测数据反演：不同深度磁化率水平切片

6.4. 正则化参数方法对比与 GCV 失效机理

同一实测数据下，L 曲线与 GCV 给出不同 λ：L 曲线拐角 $\lambda_L^* = 6.80\times10^3$ (RMS 52.4 nT，保守稳定)；GCV 极小 $\lambda_{GCV}^* = 1.87 \times 10^2$ (RMS ≈ 0.1 nT，近零残差，存在过拟合风险)。二者分歧源于系统严重欠定——数据可被几乎完美拟合，L 曲线据此倾向于更大正则化以避免过拟合，而 GCV 在如此稀疏数据下极小值不够稳健。本文以 L 曲线解作为主结果——GCV 给出的 λ 使残差降至 0.1 nT，远低于任何合理的观测噪声水平，属噪声内插而非信号拟合，故判为过拟合；并据此指出：在稀疏磁测中宜以 L 曲线为主、GCV 为辅，并应结合已知的误差预算(偏差原理)与地质先验进行校核。

从式(8)的结构可给出 GCV 在本系统中失效的直接机理。式(8)分母中的迹量度“未被解吸收”的观测自由度：若在模型空间取迹，则 $\mathrm{trace}(I - AA^{+}) = M - \mathrm{N_{eff}}$，其中有效自由度 $\mathrm{N_{eff}} \le \mathrm{N} = 35$，故该迹恒落在 $M - \mathrm{N} = 4240$ 与 $M = 4275$ 之间，随 λ 的相对变化不足 1%——分母近乎退化为常数，GCV 函数近似变为对残差范数的单调追踪，极小点必然被推向残差趋零的噪声内插方向。本文实现按 Hansen [2]的约定在数据空间取迹($\mathrm{trace} = \mathrm{N} - \mathrm{N_{eff}}$)，此时分子(残差平方和)与分母平方同由谱尾部小奇异值分量的滤波因子控制、随 λ 减小同步衰减，二者近乎相消：实测数据的 GCV 值在 λ 跨七个数量级范围内总相对起伏不足 6%，残差平方和却变化逾 5 个数量级，曲线在名义极小点 $\lambda_{GCV}^* = 1.87 \times 10^2$ 附近极端平坦、最小值落在扫描区间下界——“极小点”实为网格边界与数值微差的产物，而非稳健的误差折中位置。合成基准上

GCV 同样失去判别力(见下文)。两种口径殊途同归：零空间维数 $M-\mathrm{N}$ 越大，GCV 的判别力越弱，此即其在极端稀疏条件下失效的根本原因。

作为对照，在已知噪声水平的条件下，基于偏差原理(4.3 节)的选参表现出良好的稳定性。合成基准中，以真实噪声水平构造残差目标 $\delta=\sigma_n\sqrt{\mathrm{N}}$ ($\sigma_n=5.32$ nT)，偏差原理给出 $\lambda_{\mathrm{DP}}=2.17\times10^3$，残差 RMS5.84nT、约化 χ^2_ν = 1.20，与噪声水平精确吻合；对应质心深度 6.22 km、模型相对误差 99.26% (表 3)。同一基准下，两种免先验准则均告失效：GCV 函数近乎平坦(最大/最小值之比仅约 1.1)，最小值退至扫描区间上界($\lambda=5.60\times10^5$)，残差 RMS 达 51.5 nT、约为噪声水平的 10 倍，属严重欠拟合；L 曲线拐角($\lambda=5.77\times10^3$，RMS 22.9 nT，$\chi^2_\nu\approx18.6$)虽优于 GCV，仍明显偏保守。可见当具备可靠误差预算时，偏差原理不受 GCV 平坦化与 L 曲线拐角偏移的影响，是极端稀疏条件下最稳健的选参方式；表 2 中偏差原理的用法亦据此更新为“合成算例主选”。

6.5. 误差与稳定性量化

合成基准下，两种正则化解相对真模型的逐点重建误差均较高(深度加权 99.26%、无加权 99.64%)，印证了第 3 节关于 4240 维零空间主导、稀疏观测下逐点重建不可达的判断。然而二者的深度定位偏差方向相反且差异显著：深度加权解质心偏差约+24% (偏深)，无加权解偏差约−21% (偏浅)，再次说明深度加权虽不能精修各单元物性，却把解的整体深度分布由系统性偏浅校正为轻微偏深，落在真值所在的深度量级。

稳定性方面，对合成观测施加 25 次独立随机噪声扰动(噪声标准差固定为 5.32 nT)重复反演：深度加权解质心深度(合成基准)均值为 6.22 km、标准差仅 0.01 km (变异系数约 0.1%)；无加权解均值 3.96 km、标准差 0.01 km (变异系数 0.3%)。二者的离散度处于同一量级(标准差均为 0.01 km)，说明该指标刻画的是正则算子的确定性(同一 W_z 与噪声模型下的可重复性)，并不携带“是否接近真值”的信息；因此对深度加权有效性的判断只能依据质心偏差的方向与量级(+24%对−21%)，而不能依据该离散度。需强调，约化 χ^2 与 RMS 仅反映“数据拟合”层面，而 CoG 与模型相对误差揭示“解的结构”层面；在欠定反问题中，拟合良好绝不意味着解唯一，这正是正则化择模意义之所在。

6.6. 深度加权标定参数的消融分析

6.2 节显示，本文标定($\beta=3$、$z_0=1.5$ km)使质心由−21%移至+24%，存在系统性过冲。为把这一单点观察转化为可查的标定规律，本节扫描 $\beta\in\{0,1,2,3,4\}$ 与 $z_0\in\{0.3,1.5,3.0,6.0\}$ km 共 20 组组合(图 7(a))：合成基准上 λ 由 Morozov 偏差原理选取，实测数据上由 L 曲线拐角选取，以检验该规律的可迁移性。

Table 4. Centroid depth of the synthetic-benchmark inversion and its bias over the β-z_0 grid
表 4. β 与 z_0 网格下合成基准反演质心深度及偏差

β\z_0 (km)	0.3	1.5	3.0	6.0
0	3.95 (−21.0%)	3.95 (−21.0%)	3.95 (−21.0%)	3.95 (−21.0%)
1	5.01 (+0.2%)	4.78 (−4.5%)	4.60 (−8.1%)	4.40 (−12.0%)
2	5.92 (+18.4%)	5.56 (+11.3%)	5.25 (+5.0%)	4.87 (−2.5%)
3	6.59 (+31.8%)	6.22 (+24.4%)	5.85 (+16.9%)	5.34 (+6.8%)
4	7.05 (+41.0%)	6.73 (+34.5%)	6.35 (+27.0%)	5.78 (+15.6%)

表 4 给出 20 组组合的合成基准质心及偏差(括号内为百分数)。$\beta=0$ 时权函数退化为单位阵、等价无加权，质心恒为 3.95 km (−21.0%)且与 z_0 无关；$\beta>0$ 后质心随 β 单调加深、随 z_0 单调变浅，方向相反且

连续可调(图 7(b))。实测复算趋势一致($r = 1.0000$)，仅系统性偏浅 0.04~0.10 km (图 7(c))。

可见深度加权既非“越强越好”亦非“越深越好”，其实质是把质心沿深度连续平移的自由度。网格上存在一条零偏差等值线，大致经过 $\beta = 1$、$z_0 \approx 0.3$k m 与 $\beta = 2$、$z_0 \approx 5$ km；正文所用 $\beta = 3$、$z_0 = 1.5$ km 位于其深侧，故出现+24%过冲。但质心无偏并不等价于模型被正确恢复：图 7(d)显示全网格模型相对误差始终为 99.1%~100.7%，几乎不随标定改变。在 4240 维零空间主导下，深度加权能平移质心却无法恢复真实物性分布，质心只能作为标定与比较的指标。

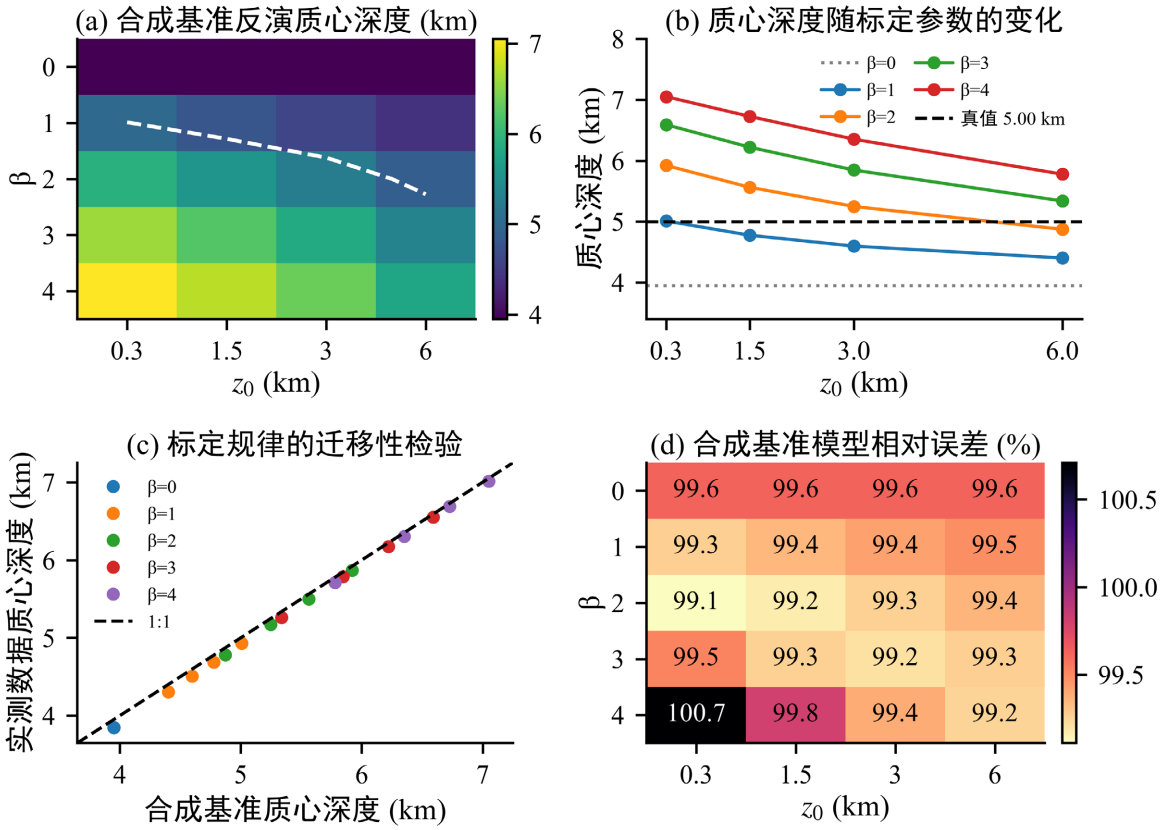


Figure 7. Ablation of the depth-weighting calibration parameters: variation of the centroid depth and of the model relative error with β and z_0

图 7. 深度加权标定参数消融：质心深度与模型相对误差随 β、z_0 的变化

7. 讨论

(1) 分辨率与模型假设。35 个测点对 4275 个单元严重欠定，恢复结果是在正则化约束下的一种稳定代表模型，而非唯一真解。实测残差 RMS 约 52.4 nT 的“拟合下限”，可能源于剩磁、网格外深部场源或偶极近似的简化，提示后续应引入剩磁方向约束与更精细的核函数。恢复模型在浅部单元仍可能出现非物理解(如浅层伪异常)，这正是深度加权未能完全消除，而需结合地质先验进一步约束之处。需补充说明，网格垂向底界 9 km，而深度加权解质心(合成 6.22 km、实测 6.17 km)距底界仍有约 2.8 km，故质心估计未受垂向截断的直接限制。

(2) 深度加权的尺度敏感性。本文对深度加权作以 $z_{\mathrm{ref}} = 3$ km 为参考的归一化，使 λ 处于常规量级，便于不同策略公平比较；4.1 节的规范不变性数值检验与 6.6 节的消融进一步表明，z_{ref} 会被自适应选取的 λ 精确吸收，不构成独立的标定自由度，实际可调的仅有指数 β 与参考偏移 z_0：质心随 β 单调加深、随 z_0

单调变浅，网格上存在一条质心无偏(5.00 km)的等值线，本文所用 $\beta = 3$、$z_0 = 1.5$ km 位于其深侧，故出现+24%过冲。β 与 z_0 还可由 Euler 反褶积/DEXP 估计的结构指数 N 进一步约束，从而自适应地匹配真实源几何[28]；但调至质心无偏亦不改善模型相对误差。

(3) 参数选取的鲁棒性。L 曲线与 GCV 在稀疏数据下分歧明显，与“欠定/病态程度高时 GCV 极小点漂移”的认识一致[2] [26] [27]。建议多准则联合定位(L 曲线拐角∩GCV 极小，以偏差原理校核)，并在留一/子样本交叉验证下防止过拟合。

(4) 本文实测方差解释率约 73%、深度加权质心由 3.84 km 移至 6.17 km，与 Li & Oldenburg 关于深度加权抑制浅部聚集的结论定性一致；但本文仅在 35 个测点这一密度下验证，未设观测密度梯度实验，故结论支持“该密度下可用”，尚不足以推广为“对观测密度具有鲁棒性”；RGSVD + GCV、改进 L 曲线等方法可作为进一步对比的方向[20] [21]。

(5) 扩展方向。可将零阶小范数推广至一阶/二阶光滑约束、盒式/非负约束(BVLS)或稀疏 Total Variation 正则以刻画块状边界[29]；非线性磁化方向反演、重磁联合反演与贝叶斯不确定性量化是后续重点。

(6) 本文还有两项局限：一是标定参数扫描已完成，但观测密度仅 35 个测点一种配置，向其他密度的可外推性未检验；二是未将实测误差预算纳入偏差原理，模型误差与观测噪声尚未分离。后续应补充观测密度梯度实验，并把误差预算嵌入参数选取准则。

8. 结论

本文系统实现了基于 Tikhonov 正则化的三维地磁反演建模流程，并以真实地面磁测数据(35 个测点)与合成基准完成了实验验证。本文的着力点不在于提出新算法，而在于定量刻画经典深度加权 Tikhonov 方法在极端稀疏观测下的性能边界与参数敏感性，并据此形成可供使用者规避风险的实践准则。主要结论如下：

(1) 地磁反演高度不适定，本文系统零空间维数达 4240，必须通过正则化在无穷多解中择模；

(2) 深度加权($\beta = 3$)有效消除浅部聚集的方向性偏差——合成基准中质心偏差由无加权的−21% (3.95 km)反转为+24% (6.22 km，真值 5.00 km)，二者数据拟合相当；深度加权并未减小绝对偏差(1.22 km 对 1.05 km)，但把解由系统性偏浅校正为轻微偏深，残余过冲由深度加权标定决定，凸显正则化的择模作用；

(3) 实测数据反演方差解释率约 73%，深度加权使恢复质心由 3.84 km 移至 6.17 km；

(4) 在严重欠定下 L 曲线与 GCV 存在分歧，宜以 L 曲线为主并结合偏差原理与地质先验选取参数；

(5) 深度加权的有效标定自由度是 β 与 z_0——z_{ref} 只是会被自适应 λ 精确吸收的规范自由度；质心随 β 单调加深、随 z_0 单调变浅，该规律可由合成基准迁移至实测数据($r = 1.0000$)；但调至质心无偏并不降低模型相对误差，故质心不能作为模型正确性的证据；

(6) 方法在本文 35 个测点的极稀疏配置下可获得稳定可解释的结果(其对观测密度的鲁棒性尚需不同密度下的系统检验)，后续可通过剩磁约束、精细核函数与联合反演进一步提升分辨率与可信度。

基金项目

河北省地震科技星火计划“基于 Tikhonov 正则化方法的地磁场反演方法研究”(编号：DZ2026121400004)、地震科技星火计划“固定台站与流动地磁数据联合分析‘参考基准模型’研究”(编号：XH26003A)和科技基础资源调查专项“地磁数据整编及中国地磁场模型构建”(编号：2024FY101101)。

参考文献

[1] 管志宁. 地磁场与磁力勘探[M]. 北京: 地质出版社, 2005.

[2] Hansen, P.C. (1998) Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics.

https://doi.org/10.1137/1.9780898719697

[3] Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y. (1977) Solutions of Ill-Posed Problems. Winston & Sons.

[4] Zhdanov, M.S. (2002) Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. Elsevier.

[5] Tikhonov, A.N. (1963) On the Solution of Ill-Posed Problems and the Method of Regularization. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **151**, 501-504.

[6] Parker, R.L. (1994) Geophysical Inverse Theory. Princeton University Press.

[7] Li, Y. and Oldenburg, D.W. (1996) 3-D Inversion of Magnetic Data. *Geophysics*, **61**, 394-408. https://doi.org/10.1190/1.1443968

[8] Li, Y. and Oldenburg, D.W. (1998) 3-D Inversion of Gravity Data. *Geophysics*, **63**, 109-119. https://doi.org/10.1190/1.1444302

[9] Tarantola, A. (2005) Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898717921

[10] 李泽林, 姚长利, 郑元满, 等. 数据空间磁异常模量三维反演[J]. 地球物理学报, 2015, 58(10): 3804-3814.

[11] 郭良辉, 孟小红, 石磊. 磁异常 ΔT 三维相关成像[J]. 地球物理学报, 2010, 53(2): 435-441.

[12] 孟小红, 刘国峰, 陈召曦, 等. 基于剩余异常相关成像的重磁物性反演方法[J]. 地球物理学报, 2012, 55(1): 304-309.

[13] 陈召曦, 孟小红, 郭良辉. 重磁数据三维物性反演方法进展[J]. 地球物理学进展, 2012, 27(2): 503-511.

[14] 冯杰, 刘天佑, 杨宇山, 等. 3D 井地磁测联合反演技术及应用[J]. 地球物理学进展, 2010, 25(5): 1685-1691.

[15] 姚长利, 郝天珧, 管志宁, 等. 重磁遗传算法三维反演中高速计算及有效存储方法技术[J]. 地球物理学报, 2003, 46(2): 252-258.

[16] 李金朋, 张英堂, 范红波, 等. 基于χ2准则的磁梯度张量3D聚焦反演方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(2): 255-261.

[17] 朱裕振, 强建科, 王林飞, 等. 深埋铁矿磁测数据三维反演分析与找矿靶区预测[J]. 物探与化探, 2019, 43(6): 1182-1190.

[18] 管志宁, 侯俊胜, 黄临平, 等. 重磁异常反演的拟 BP 神经网络方法及其应用[J]. 地球物理学报, 1998, 41(2): 242-251.

[19] 姚长利, 郝天珧, 管志宁. 重磁反演约束条件及三维物性反演技术策略[J]. 物探与化探, 2002, 26(4): 253-257.

[20] Fang, Y., Li, S., Liu, G., Meng, X., Wang, J. and Zheng, S. (2024) An Efficient Three-Dimensional (3D) Inversion Algorithm for Recovering Magnetic Targets When Remanence Exists. *Acta Geophysica*, **72**, 4027-4043. https://doi.org/10.1007/s11600-024-01292-9

[21] Liu, F. and Yan, B. (2024) Local Magnetic Field Inversion Based on the Modified L-Curve Model Function Method. *IEEE Sensors Journal*, **24**, 29232-29242. https://doi.org/10.1109/jsen.2024.3410988

[22] Gschwentner, A., Roppert, K. and Kaltenbacher, M. (2024) Determination of Local Magnetic Material Properties Using an Inverse Scheme. *IEEE Transactions on Magnetics*, **60**, 1-4. https://doi.org/10.1109/tmag.2023.3299620

[23] Blakely, R.J. (1995) Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511549816

[24] Oldenburg, D.W. and Li, Y. (2005) 5. Inversion for Applied Geophysics: A Tutorial. In: Butler, D.K., Ed., *Near-Surface Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, 89-150. https://doi.org/10.1190/1.9781560801719.ch5

[25] Constable, S.C., Parker, R.L. and Constable, C.G. (1987) Occam's Inversion; a Practical Algorithm for Generating Smooth Models from Electromagnetic Sounding Data. *Geophysics*, **52**, 289-300. https://doi.org/10.1190/1.1442303

[26] Hansen, P.C. (1992) Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve. *SIAM Review*, **34**, 561-580. https://doi.org/10.1137/1034115

[27] Golub, G.H., Heath, M. and Wahba, G. (1979) Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter. *Technometrics*, **21**, 215-223. https://doi.org/10.1080/00401706.1979.10489751

[28] Cella, F. and Fedi, M. (2012) Inversion of Potential Field Data Using the Structural Index as Weighting Function Rate Decay. *Geophysical Prospecting*, **60**, 313-336. https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.00974.x

[29] Portniaguine, O. and Zhdanov, M.S. (2002) 3-D Magnetic Inversion with Data Compression and Image Focusing. *Geophysics*, **67**, 1532-1541. https://doi.org/10.1190/1.1512749