

基于部分高斯循环矩阵的带噪1-Bit分布式压缩感知

冷昱珂¹, 周 敏²

¹西南大学数学与统计学院, 重庆

²西南大学信息化建设办公室, 重庆

收稿日期: 2025年2月28日; 录用日期: 2025年5月16日; 发布日期: 2025年5月28日

摘 要

在过去大多数的研究中, 带噪1-bit分布式压缩感知局限于使用高斯随机测量矩阵进行信号的重构。但是, 这类矩阵内存消耗大, 计算速度慢, 阻碍了实际应用的发展。因此, 作为改进, 本文考虑将结构化的部分高斯循环矩阵应用于带噪1-bit分布式压缩感知当中。部分高斯循环矩阵可以通过快速傅里叶变换显著降低计算复杂度, 提高恢复效率。为此, 我们提出了新的鲁棒1-bit分布式压缩感知恢复算法。该算法通过计算符号不一致的数量, 可以自适应地检测到符号翻转的位置, 并进行修正。数值实验表明, 在存在测量噪声和传输噪声的情况下, 部分高斯循环矩阵和高斯随机矩阵的恢复性能相当。在此基础上, 部分高斯循环矩阵的恢复时间更短, 重构效率更高。

关键词

1-Bit分布式压缩感知, 部分高斯循环矩阵, 符号翻转, 联合恢复

Noisy 1-Bit Distributed Compressed Sensing with Partial Gaussian Circulant Matrices

Yuke Leng¹, Min Zhou²

¹School of Mathematics & Statistics, Southwest University, Chongqing

²Informatization Construction Office, Southwest University, Chongqing

Received: Feb. 28th, 2025; accepted: May 16th, 2025; published: May 28th, 2025

Abstract

In most previous studies, noisy 1-bit distributed compressed sensing has been limited to the use of

Gaussian random measurement matrices for signal reconstruction. However, such matrices consume significant memory and have slow computational speeds, which hinder the development of their practical application. Therefore, as an improvement, this paper considers the application of structured partial Gaussian circulant matrices to noisy 1-bit distributed compressed sensing. Partial Gaussian circulant matrices can significantly reduce computational complexity and improve recovery efficiency through fast Fourier transform. To this end, we propose a new robust 1-bit distributed compressed sensing recovery algorithm. This algorithm can adaptively detect and correct sign flip positions by calculating the number of sign inconsistencies. Numerical experiments demonstrate that, in the presence of measurement noise and transmission noise, the recovery performance of partial Gaussian circulant matrices is comparable to that of Gaussian random matrices. Furthermore, the recovery time of partial Gaussian circulant matrices is shorter, and the reconstruction efficiency is higher.

Keywords

1-Bit Distributed Compressive Sensing, Partial Gaussian Circulant Matrices, Sign Flips, Joint Recovery

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

压缩感知(Compressed Sensing, CS) [1]是一种高效的信号采集与恢复技术,它克服了传统奈奎斯特采样定理[2]的限制。目前,CS技术已经广泛应用于雷达成像[3]、磁共振成像[4]、遥感[5]等领域。在CS中,目标是从线性测量值中恢复一个未知的 s -稀疏信号 $x \in R^N$,即信号 x 具有 s 个非零元素,测量值由以下公式给出:

$$y = Ax,$$

其中, $A \in R^{m \times N}$ 为测量矩阵且 $m \ll N$ 。常用的测量矩阵为高斯随机矩阵,因其满足限制性等距性质,可确保信号的重构精度较高。但是,高斯随机矩阵占用的内存大,计算复杂度较高,特别是在大规模问题中,这往往不利于实际的应用。因此,研究者对结构化的测量矩阵展开了探索,该类矩阵可以与向量进行高效的元素乘积,显著提高恢复效率,比如托普利兹结构矩阵[6]、部分循环矩阵[7]。

大多数的实际信号传输过程中,往往是多个信号同时到达处理器,比如分布式网络[8]、联合稀疏模式恢复[9]。所以,Baron等首次提出分布式压缩感知(Distributed Compressed sensing, DCS) [10],即每个信号先独立地通过测量矩阵采样与压缩,然后在解码端进行联合重构。假设 $x_1, \dots, x_L$ 是一组 L 个 N 维稀疏信号且有着共同支撑。 $A^{(1)}, \dots, A^{(L)}$ 为 L 个不同的测量矩阵。那么,DCS的数学模型为:

$$\text{vec}(Y) = A \text{vec}(X),$$

其中, $X \in R^{N \times L}$ 和 $Y \in R^{m \times L}$ 分别表示信号和相应的测量值通过按列排列的方式组成的矩阵, $A \in R^{mL \times NL}$ 是一个由不同的块 $A^{(1)}, \dots, A^{(L)}$ 组成块对角矩阵, $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的向量化。在实际应用过程中,容易发生符号翻转。Sundman等[11]基于联合信号的稀疏性提出了联合正交匹配追踪算法和联合子空间追踪算法针对分布式压缩感知进行鲁棒恢复。但这两个算法假设信号的稀疏性是已知的,而一般情况下稀疏性不能作为先验信息,所以Wang等[12]在保证算法的恢复精度下,提出的分布式压缩感知稀疏自适应匹配追踪算法适用于稀疏性未知的情况。在这些算法当中,使用的测量矩阵为高斯矩阵。

在实际的信号处理过程中, 考虑到存储大小和计算效率的重要性, 需要对收集到的测量值进行量化, 也就是将连续值转换为在某个范围内的离散值。具体来说, 我们需要从量化后的测量值 $Q(Ax)$, 其中 $Q(\cdot)$ 是一个把 N 维的向量映射到有限位数集合的量化器。测量值的转换增强了储存和运输的适用性, 并提高了实施的便利性和操作的快捷性。特别地, Boufounos 等首次在压缩感知中结合了一种极端的粗糙量化, 提出了 1-bit 压缩感知(1-bit Compressed Sensing, 1-bit CS) [13], 即只捕捉信号的符号信息, 而忽略了尺度信息, 从而大大减少了比特数, 显著提高了量化速度。1-bit CS 的数学模型为:

$$y = \text{sign}(Ax),$$

其中, $\text{sign}(\cdot)$ 为符号算子, 即如果 $\langle a_i, x \rangle \geq 0$, $y_i = 1$; 反之, $y_i = -1$, 其中 a_i 为测量矩阵 A 的第 i 行。然而, 在噪声干扰下, 一些符号测量值可能会发生翻转, 这会严重影响恢复算法的重构精度。基于此, Yan 等[14]提出了自适应离群追踪算法, 不需要考虑信号的稀疏性, 通过设置停止条件检测到符号翻转的位置。Movahed 等[15]在重归一化定点迭代算法中嵌入了类似的检测技术, 以提高噪声环境下的信号恢复精度。但是这两类算法都需要提前设置好符号翻转的个数, 而这在实际过程中很难获得。所以, Fu 等[16]提出了鲁棒二进制迭代硬阈值(Robust Binary Iterative Hard Dhrsholding, RBIHT)算法, 不需要噪声水平作为先验条件。除此之外, 该作者应用的异常检测技术是通过计算不一致的数量找到符号翻转的位置。在这些算法中, 测量矩阵仍然是考虑高斯矩阵。但是, 由于在 1-bit CS 中需要进行过采样, 高斯随机矩阵存在的计算速度较慢和存储较大等问题比在 CS 中更加明显。一些学者积极地探索和讨论在存在噪声时的其他测量算子。Dirksen 和 Mendelson [17]使用部分循环矩阵, 基于相关性的算法和 L2-规范正则化, 提出了带噪 1-bit CS 恢复信号时的最佳采样复杂度估计。Liu 等[18]将鲁棒 1-bit CS 和深度学习中的生成先验结合起来, 在理论上证明了部分循环高斯矩阵下的鲁棒 1-bit CS 重构所需的测量数与高斯矩阵相当, 并通过实验证明了部分高斯循环矩阵可以显著地降低计算复杂度, 提高恢复效率。

在本文中, 我们考虑 1-bit 分布式压缩感知(1-bit Distributed Compressed Sensing, 1-bit DCS), 也就是将 1-bit 量化应用到传统的 DCS 中。在无线感知网络[19]、联邦学习[20]和分布式 MIMO 系统[21]等领域, 1-bit DCS 已得到广泛应用。而在实际情况中, 往往会存在噪声干扰。所以, Zayyani 等[22]提出了稀疏一位扩散阶梯下降算法, 通过优化成本函数恢复信号, 且该算法在带噪 1-bit DCS 中有着较好的鲁棒性, 并且对信号有着显著的恢复效果。Yang 等[23]提出了 M-AOP-e 算法, 该算法巧妙地设计了停止准则, 可以有效地进行信号重构。与前面一样, 这些算法依旧考虑使用高斯矩阵。然而现有的高斯矩阵过于单一, 妨碍了实际应用, 因此有必要扩展新的测量矩阵。

基于以上讨论, 我们将在本文中探讨部分高斯循环矩阵在带噪 1-bit DCS 中的应用。部分高斯循环矩阵因其结构的独特性, 在与向量进行乘积时, 可以通过快速傅里叶变换高效计算, 大大降低计算复杂度, 具有更重要的实际意义。受到[16]的启发, 我们提出了一种新的重构算法——D-RBIHT, 该算法不需要将符号翻转的数量作为前提条件。实验结果表明, 在相同的噪声环境和测量条件下, 部分高斯循环矩阵和高斯矩阵有着不相上下的重构性能。更进一步地, 部分高斯循环矩阵的恢复时间明显短于高斯矩阵, 说明部分高斯循环矩阵在计算速度上要优于高斯矩阵, 具有更高的重构效率, 能更好地减少恢复成本。

2. 模型及恢复算法

在本节中, 我们介绍需要恢复的噪声模型和展示重构算法的详细步骤。

在存在噪声干扰时, 我们关注两种噪声。第一种是测量噪声, 即在测量过程中可能会导致一些相反的结果; 第二种是传输噪声, 指的是信号在通过传输通道时, 某些位置可能会发生符号翻转。经过一系

列信号的处理过程, 我们得到已被污染的测量值:

$$y = \text{sign}(\text{sign}(Ax + e) + n), \quad (1.1)$$

其中, $e \in R^{mL}$ 、 $n \in R^{mL}$ 分别是测量噪声和传输噪声。模型中, $x = \text{vec}(X) = (x_1, \dots, x_L)^T$, $y = \text{vec}(Y) = (y_1, \dots, y_L)^T$ 和 $A \in R^{mL \times NL}$ 为块对角部分高斯循环矩阵即所有的块 $A^{(1)}, \dots, A^{(L)}$ 为部分高斯循环矩阵。除此之外, 我们需要定义可应用的信号集,

$$V_{(s,L)} = \left\{ v = \text{vec}(V) : V = (v_1, \dots, v_L) \in R^{m \times L}, | \text{supp}(V) | \leq s, \|v_i\|_2 = \|v\|_{2,1} / L \right\},$$

其中, $\text{supp}(V)$ 表示信号集 $V_{(s,L)}$ 的支撑, 即非零行的个数。在本文中, 我们将通过设计合理的恢复算法从带噪 1-bit DCS 模型(1.1)中重构原始信号, 并与高斯测量的结果进行对比, 突出部分高斯循环矩阵在计算效率上的显著差别。接下来, 我们将介绍本文的算法——D-RBIHT。该算法是在原有的 RBIHT 上经过适当且可广泛应用的拓展后, 用在联合恢复信号的问题上。在 D-RBIHT 中, 我们利用与 RBIHT 一样的异常检测技术, 记录在多次迭代过程中出现不一致的位置。 $\text{reshape}(\cdot, N, L)$ 是指将一个向量 $x \in R^{NL}$ 转换为一个 $N \times L$ 的矩阵, 梯度下降步长 $\mu > 0$ 且需根据算法的实际情况进行选择。 $\eta(\cdot)$ 是硬阈值算子, 在该算法的设置中, 用于保留一个矩阵前 s 行中 2-范数最大的行, 并将剩下的行置为零。 δ 为比例因子。如果测量值中的某个位置不一致的次数超过了由 δ 计算的给定阈值, 那么我们将认为该位置发生了符号翻转。算法 1 展示了更多的细节。

Algorithm 1. D-RBIHT algorithm

算法 1. D-RBIHT 算法

输入: 测量矩阵 $A \in R^{mL \times NL}$, 1-bit 量化值 $y \in R^{mL}$, 步长 $\mu > 0$, 稀疏值 s , 信号个数 L , 比例因子 $\delta > 0$, 外循环次数 n_1 , 内循环次数 n_2 。

外循环: $p = 1, \dots, n_1$ 。

初始化: $x^0 = \frac{A^T x}{\|A^T x\|_2}$, $c = 0^{mL}$ 。

内循环: $q = 0, \dots, n_2$;

$$v^{q+1} = \mu A^T (\text{sign}(Ax^q) - y);$$

$$a^{q+1} = x^q - \text{reshape}(v^{q+1}, N, L);$$

$$x^{q+1} = \eta(a^{q+1});$$

$$I := \{i \in \{1, \dots, mL\} : y \times (\text{Avec}(x^{q+1})) < 0\};$$

$$c_I = c_I + 1;$$

如果 x^{q+1} 一致性, 算法结束;

找到符号翻转的位置并纠正:

$$W := \{i \in \{1, \dots, mL\}, c_i > \delta \times n_2\};$$

$$P := \{i \in \{1, \dots, mL\}, c_i = \max(c_i)\};$$

如果 $W \neq \emptyset$

$$y_W = -y_W$$

否则

$$y_P = -y_P$$

输出: $\hat{x}_l = \frac{\hat{x}_l}{\|\hat{x}_l\|_2}$, $l = 1, \dots, L$ 。

3. 数值模拟实验

在本节中, 我们将在测量噪声和传输噪声两种噪声干扰情况下, 去比较高斯矩阵和部分高斯循环矩阵的重构性能和重构时间。进行比较时, 将从测量速率 m/N 、稀疏性 s 、信号集大小 L 三个维度。在所有的数值实验中, 信号集 $X \in R^{N \times L}$, $|supp(X)| \leq s$, 是通过均匀随机地选择某个支持集 $I \subset [N]$, 然后将所选项填充为均值为 0、方差为 1 的 i.i.d 的高斯随机变量。除此之外, 如果在某个实验中参数没有被指定, 我们默认 $N=200$ 和 $s=3$ 。特别地, 在实验部分, 我们记 GM 为高斯矩阵, PGCM 为部分高斯循环矩阵。最后, 通过重构信号与噪声比(Reconstruction Signal to Noise Ratio, RSNR)来衡量实验效果, RSNR 在分贝(dB)单位下定义为:

$$RSNR = 10 \lg \frac{E(\hat{x})}{E(x - \hat{x})},$$

其中, $\hat{x}$ 为重构信号。RSNR 越高, 表示信号的重构精度越高。重构时间是记录算法从开始执行到结束的时间, 单位为秒(s)。时间越短, 说明算法的重构效率越高。

3.1. 测量噪声

我们规定测量噪声 $e \in R^{mL}$ 中的每一个元素都服从正态分布 $N(0, \sigma_e^2)$ 。所以, 以分贝(dB)为单位的输入(Input Signal to Noise Ratio, ISNR)定义为:

$$ISNR = 10 \lg \frac{E(\|Ax\|^2)}{E(\|e\|^2)},$$

其中, $E(\|e\|^2) = N\sigma_e^2$ 。ISNR 越大, 代表噪声的干扰能力越弱。在第一个实验中, 固定 $M=N=200$, $s=5$, $L=3$ 。在不同的 ISNR 下, 我们比较 GM 和 PCGM 的重构质量。ISNR 的范围为 5 dB 到 25 dB。对于每一个 ISNR, 我们做 500 次的实验, 然后记录平均 RSNR。实验结果展示在图 1 中。从总体情况来看, 不管测量矩阵是 PGCM 还是 GM, 信号的重构精度都随着 ISNR 的增大而提高。除此之外, PGCM 和 GM 下的信号重构精度在不同的 ISNR 值中都差距不大, PGCM 有着微弱的优势。基于此, 说明两者的重构能力在不同程度的测量噪声的影响下, 有着近似的恢复效果。

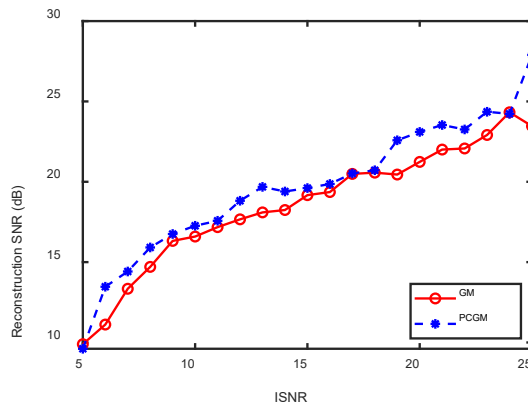


Figure 1. Reconstruction performance of GM and PGCM with different ISNRs

图 1. GM 和 PGCM 在不同 ISNR 下的重构性能

在第二个实验以及后面的实验中, 固定 $ISNR = 25$, 然后从测量速率 m/N 、稀疏度 s 、信号集大小 L

三个维度对 GM 和 PGCM 的重构性能进行观察与比较。实验结果由图 2 展示。从图中可以看出, PGCM 和 GM 在测量速率 m/N 和稀疏度 s 两个维度下, 具有相似的重构性能。在信号集大小 L 这个维度下, PGCM 和 GM 的信号重构精度都随着信号集大小 L 的增大而降低。但是, PGCM 的降低幅度更小, 信号重构精度比 GM 的更高, 这说明 PGCM 受信号集大小 L 变化的影响更小。

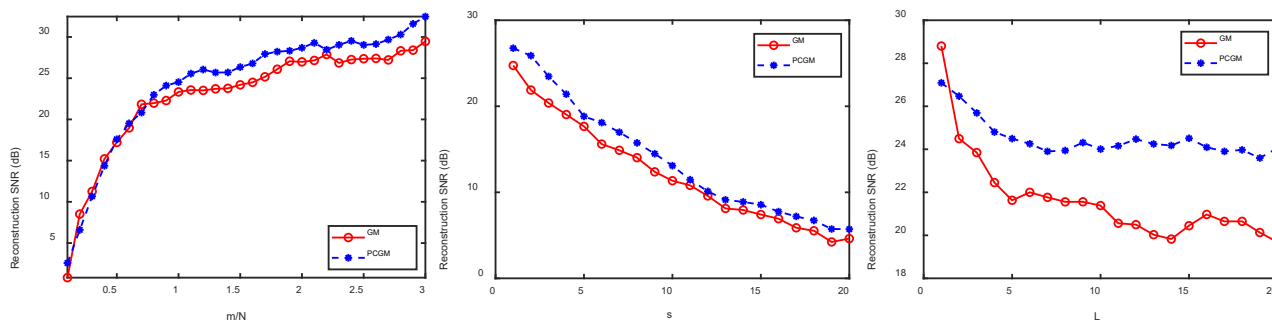


Figure 2. Reconstruction performance of measurement rate m/N , sparsity s , signal set size L , GM and PGCM in algorithm D-RBIHT affected by measurement noise in three different dimensions

图 2. 在三个不同维度下, 测量速率 m/N 、稀疏度 s 、信号集大小 L 、GM 和 PGCM 受测量噪声影响时在算法 D-RBIHT 中的重构性能

在第三个实验中, 将对 PGCM 和 GM 所需的重构时间进行对比。实验结果由图 3 展示。从图中可以看出, PGCM 所需的重构时间不管是在测量速率 m/N 、稀疏度 s 还是信号集大小 L 的影响下, 都比 GM 的所需时间更短。详细地说, 在测量速率 m/N 、信号集大小 L 不断增大时, 刚开始两者的恢复时间差距较小, 后面差距逐渐增大, PGCM 的时间优势逐渐变得明显。对稀疏度 s 来说, 随着稀疏性逐渐变弱, PGCM 和 GM 时间差距逐渐缩小。在稀疏性较强时, 两者的重构时间差距突出。总的来说, 在三个维度的变化下, PGCM 所需的重构时间都要短于 GM, 说明 PGCM 在与向量进行乘积时, 可以通过快速傅里叶变换显著降低复杂度, 提高恢复效率。

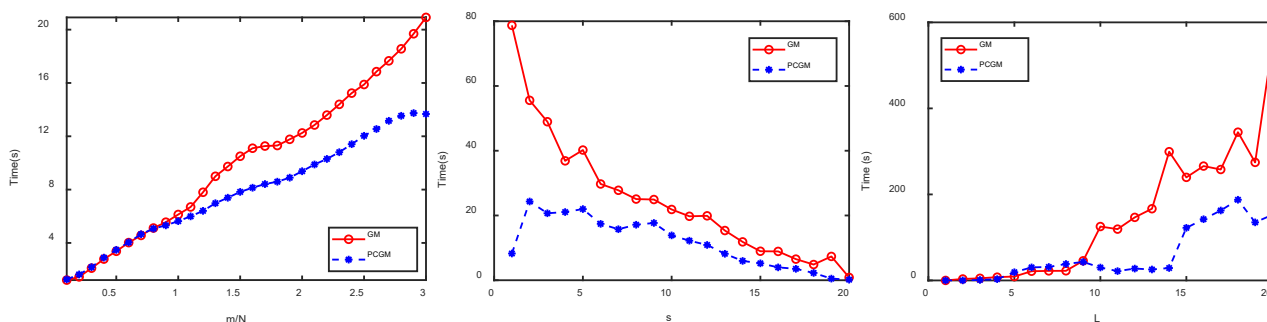


Figure 3. Reconstruction time of measurement rate m/N , sparsity s , signal set size L , GM and PGCM in algorithm D-RBIHT affected by measurement noise in three different dimensions

图 3. 在三个不同维度下, 测量速率 m/N 、稀疏度 s 、信号集大小 L 、GM 和 PGCM 受测量噪声影响时在算法 D-RBIHT 中的重构时间

3.2. 传输噪声

在传输噪声情况下, 符号翻转的概率被定义为符号翻转的个数与测量数之比。在实验中, 我们将随机选择一些测量值翻转其符号。

在第一个实验中, 我们将在 1% 至 20% 的范围内考虑 20 种不同的符号翻转概率, 去比较 GM 和 PGCM 的重构效果。实验情况展示在图 4 中, 可以看到, 随着符号翻转的不断升高, 由 PGCM 和 GM 恢复的信号精度都在不断下降。除此之外, 还可以看到 PGCM 和 GM 在不同的符号翻转中的信号重构精度不相上下, 说明两者的重构性能相当。

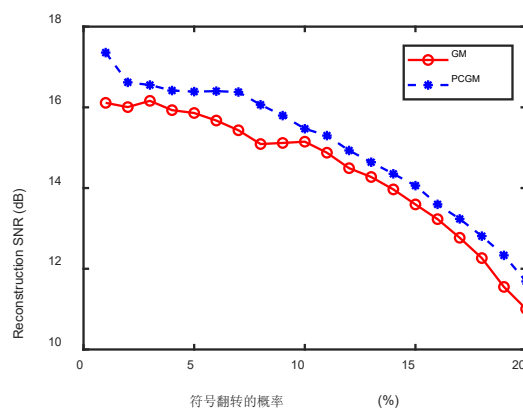


Figure 4. Reconstruction performance of GM and PGCM with different symbol flip probabilities
图 4. GM 和 PGCM 在不同符号翻转概率下的重构性能

在第二个实验中, 为 5%, 同样从三个维度, 测量速率 m/N 、稀疏度 s 、信号集大小 L , 对 PGCM 和 GM 的信号重构精度进行对比。实验结果由图 5 展示。从图中反映的情况可知, PGCM 和 GM 在测量速率 m/N 、稀疏性 s 、信号集大小 L 三个维度中, 表现出来的重构性能相当。

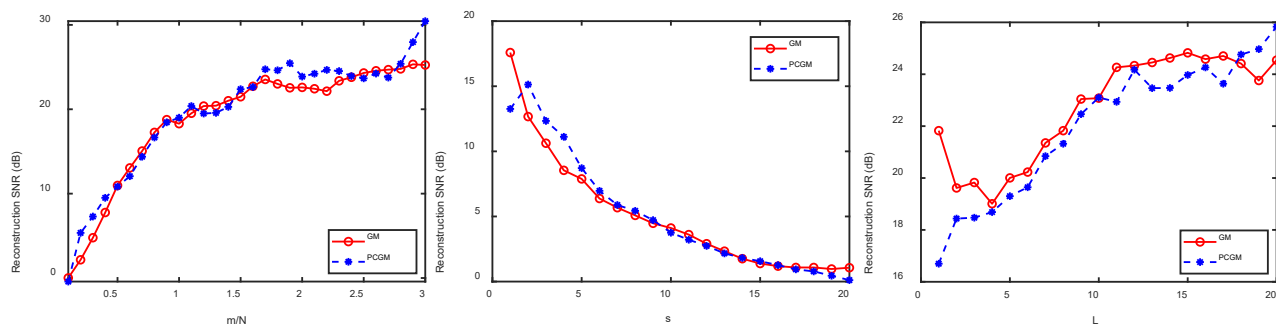


Figure 5. Reconstruction performance of measurement rate m/N , sparsity s , signal set size L , GM and PGCM in algorithm D-RBIHT affected by transmission noise in three different dimensions

图 5. 在三个不同维度下, 测量速率 m/N 、稀疏度 s 、信号集大小 L 、GM 和 PGCM 受传输噪声影响时在算法 D-RBIHT 中的重构性能

在第三个实验中, 保持与第二个实验相同的设置, 比较 GM 和 PGCM 所需的恢复时间。实验结果由图 6 展示。从图中可以看出, 在测量速率 m/N 和信号集大小 L 两个维度下, 呈现出来的实验结果与之前在测量噪声中的表现情况一致。在稀疏度 s 下, PGCM 所需的恢复时间都短于 GM, 有着十分明显的时间优势。总的来说, PGCM 比 GM 的计算速度更快。

最后, 我们简单比较一下 GM 和 PGCM 的检测精度情况。固定 $M = N = 200$, $s = 5$, $L = 3$, 在每个符号翻转率下进行 500 次试验。实验结果由图 7 展示。在图中, 我们可以看到在不同的符号翻转概率下, PGCM 和 GM 的正确检测概率都比较高且几乎没有差距, 更进一步说明了, PGCM 和 GM 有着相当的重构性能。

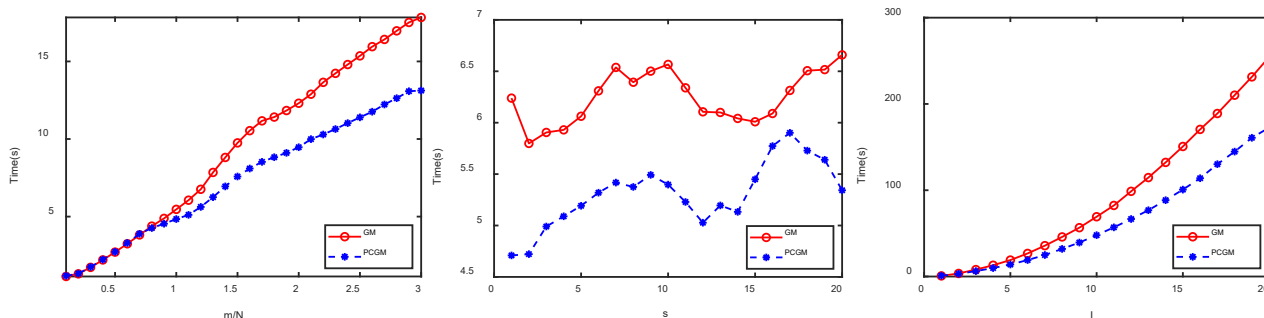


Figure 6. Reconstruction time of measurement rate m/N , sparsity s , signal set size L , GM and PGCM in algorithm D-RBIHT affected by transmission noise in three different dimensions

图 6. 在三个不同维度下, 测量速率 m/N 、稀疏度 s 、信号集大小 L 、GM 和 PGCM 受传输噪声影响时在算法 D-RBIHT 中的重构时间

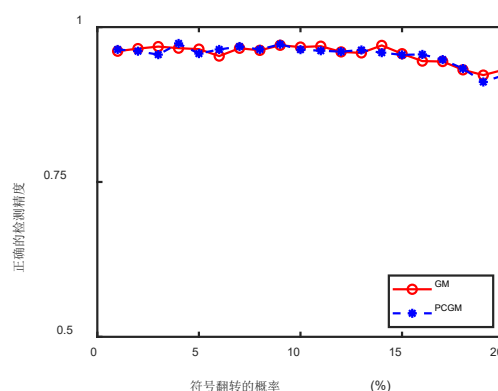


Figure 7. Correct detection accuracy of GM and PGCM with different symbol flip probabilities

图 7. GM 和 PGCM 在不同符号翻转概率下的正确检测精度

4. 总结与展望

在本篇文章中, 我们通过提出的带噪 1-bit DCS 的恢复算法, 证明了在存在测量噪声和传输噪声的情况下, 部分高斯循环矩阵和高斯矩阵有着相似的恢复效果。更进一步说明了, 部分高斯循环矩阵在利用快速傅里叶变换与向量进行乘积时, 可以显著地降低计算复杂度, 缩短计算时间, 更具有实际意义。在未来的工作中, 可以考虑引入自适应策略, 在不知道信号的稀疏水平时, 进行动态调整, 以提高重构精度。此外, 还可以设计更加高效、复杂的 1-bit 分布式压缩感知鲁棒算法, 用来处理更大规模的问题。

参考文献

- [1] Donoho, D.L. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306. <https://doi.org/10.1109/tit.2006.871582>
- [2] Nyquist, H. (1928) Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, **47**, 617-644. <https://doi.org/10.1109/t-aiee.1928.5055024>
- [3] 刘东东, 张远辉, 刘康, 等. 基于压缩感知的 TDM-MIMO 毫米波雷达高分辨三维成像算法及实现[J/OL]. 激光杂志: 1-11. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1085.TN.20240619.1744.006.html>, 2025-02-28.
- [4] 刘存珏, 刘巧红, 李晓欧, 等. 基于非凸全变分和剪切波的磁共振图像重建[J]. 计算机应用与软件, 2025, 42(1): 150-157.
- [5] 程锦丽, 白澜. 高光谱遥感图像压缩感知重构方法研究[J]. 信息与电脑(理论版), 2023, 35(13): 58-60.
- [6] Bajwa, W.U., Haupt, J.D., Raz, G.M., Wright, S.J. and Nowak, R.D. (2007) Toeplitz-Structured Compressed Sensing Matrices.

- 2007 *IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing*, Madison, 26-29 August 2007, 294-298. <https://doi.org/10.1109/ssp.2007.4301266>
- [7] Krahmer, F., Mendelson, S. and Rauhut, H. (2014) Suprema of Chaos Processes and the Restricted Isometry Property. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **67**, 1877-1904. <https://doi.org/10.1002/cpa.21504>
 - [8] Di Lorenzo, P. and Sayed, A.H. (2013) Sparse Distributed Learning Based on Diffusion Adaptation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **61**, 1419-1433. <https://doi.org/10.1109/tsp.2012.2232663>
 - [9] Singh, A. and Dandapat, S. (2016) Weighted Mixed-Norm Minimization Based Joint Compressed Sensing Recovery of Multi-Channel Electrocardiogram Signals. *Computers & Electrical Engineering*, **53**, 203-218. <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2016.01.027>
 - [10] Baron, D., Duarte, F.M., Wakin, B.M., *et al.* (2009) Distributed Compressive Sensing. arXiv: 0901.3403.
 - [11] Sundman, D., Chatterjee, S. and Skoglund, M. (2011) Greedy Pursuits for Compressed Sensing of Jointly Sparse Signals. 2011 *19th European Signal Processing Conference*, Barcelona, 29 August-2 September 2011, 368-372.
 - [12] Wang, Q. and Liu, Z. (2011) A Robust and Efficient Algorithm for Distributed Compressed Sensing. *Computers & Electrical Engineering*, **37**, 916-926. <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2011.09.008>
 - [13] Boufounos, P.T. and Baraniuk, R.G. (2008) 1-Bit Compressive Sensing. 2008 *42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton, 19-21 March 2008, 16-21. <https://doi.org/10.1109/ciss.2008.4558487>
 - [14] Yan, M., Yang, Y. and Osher, S. (2012) Robust 1-Bit Compressive Sensing Using Adaptive Outlier Pursuit. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **60**, 3868-3875. <https://doi.org/10.1109/tsp.2012.2193397>
 - [15] Movahed, A., Panahi, A. and Durisi, G. (2012) A Robust RFPI-Based 1-Bit Compressive Sensing Reconstruction Algorithm. 2012 *IEEE Information Theory Workshop*, Lausanne, 3-7 September 2012, 567-571. <https://doi.org/10.1109/itw.2012.6404739>
 - [16] Fu, X., Han, F. and Zou, H. (2014) Robust 1-Bit Compressive Sensing against Sign Flips. 2014 *IEEE Global Communications Conference*, Austin, 8-12 December 2014, 3121-3125. <https://doi.org/10.1109/glocom.2014.7037285>
 - [17] Dirksen, S. and Mendelson, S. (2023) Robust One-Bit Compressed Sensing with Partial Circulant Matrices. *The Annals of Applied Probability*, **33**, 1874-1903. <https://doi.org/10.1214/22-aap1855>
 - [18] Liu, Z., Ghosh, S. and Scarlett, J. (2021) Robust 1-Bit Compressive Sensing with Partial Gaussian Circulant Matrices and Generative Priors. 2021 *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, Kanazawa, 17-21 October 2021, 1-6. <https://doi.org/10.1109/itw48936.2021.9611397>
 - [19] Yan, S., Liu, M. and Si, J. (2020) Distributed Collaborative Spectrum Sensing Using 1-Bit Compressive Sensing in Cognitive Radio Networks. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **103**, 382-388. <https://doi.org/10.1587/transfun.2019eal2076>
 - [20] Tan, G., Yuan, H., Hu, H., Zhou, S. and Zhang, Z. (2024) A Framework of Decentralized Federated Learning with Soft Clustering and 1-Bit Compressed Sensing for Vehicular Networks. *IEEE Internet of Things Journal*, **11**, 23617-23629. <https://doi.org/10.1109/jiot.2024.3385913>
 - [21] Aabel, L., Jacobsson, S., Coldrey, M., Olofsson, F., Durisi, G. and Fager, C. (2024) A TDD Distributed MIMO Testbed Using a 1-Bit Radio-over-Fiber Fronthaul Architecture. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **72**, 6140-6152. <https://doi.org/10.1109/tmtt.2024.3389151>
 - [22] Zayyani, H., Korki, M. and Marvasti, F. (2016) A Distributed 1-Bit Compressed Sensing Algorithm Robust to Impulsive Noise. *IEEE Communications Letters*, **20**, 1132-1135. <https://doi.org/10.1109/lcomm.2016.2550589>
 - [23] Yang, H. and Yu, N.Y. (2021) A Fast Algorithm for Joint Sparse Signal Recovery in 1-Bit Compressed Sensing. *AEU—International Journal of Electronics and Communications*, **138**, Article ID: 153856. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2021.153856>