

四足机器人支撑相模型预测控制策略研究

潘刚¹, 李冰^{2*}, 袁立鹏³

¹江苏亚力亚气动液压成套设备有限公司, 江苏 扬州

²扬州职业技术大学机械工程学院, 江苏 扬州

³哈尔滨工业大学机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨

收稿日期: 2026年3月6日; 录用日期: 2026年5月9日; 发布日期: 2026年5月18日

摘要

针对四足机器人支撑相非线性动力学特性导致非线性模型预测控制(MPC)计算复杂度高、难以满足嵌入式系统实时控制需求的问题, 本文提出一种适用于四足机器人支撑相的MPC控制策略。首先阐述了MPC的基本原理, 基于腿部质量可忽略的核心假设建立四足机器人单刚体动力学模型; 针对SO(3)流形上旋转矩阵带来的旋转动力学非线性问题, 采用基于变分法的线性化方案完成系统线性化处理, 通过克罗内克积实现矩阵变量的向量化转换, 构建了包含轨迹跟踪目标与控制量平滑约束的二次代价函数, 将摩擦锥约束线性化后结合执行器输出限制约束, 最终把支撑相MPC优化问题转化为可高效求解的标准二次规划问题。通过MATLAB/Simulink仿真与自主研发的液压四足机器人原型机实物实验对控制策略进行验证, 结果表明: 在模拟崎岖路面的地面晃动扰动下, 该策略可将机身横滚角、俯仰角最大误差分别控制在0.09 rad、0.08 rad以内, 足端接触力变化平稳且严格满足摩擦锥与执行器出力约束; 算法在ARM Cortex-A9嵌入式平台上单次优化求解平均耗时5.3 ms, 最大耗时7.8 ms, 完全满足10 ms采样周期的实时控制要求。该控制策略具备优异的姿态跟踪能力、抗扰动性能与工程实时性, 能够有效实现四足机器人支撑相的稳定控制。

关键词

四足机器人, 支撑相, 模型预测控制(MPC), 非线性动力学, 二次规划

Research on Support Phase Model Predictive Control Strategy for Quadruped Robots

Gang Pan¹, Bing Li^{2*}, Lipeng Yuan³

¹Jiangsu Yaliya Pneumatic Hydraulic Complete Equipment Co., Ltd., Yangzhou Jiangsu

²School of Mechanical Engineering, Yangzhou Polytechnic University, Yangzhou Jiangsu

³School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang

*通讯作者。

文章引用: 潘刚, 李冰, 袁立鹏. 四足机器人支撑相模型预测控制策略研究[J]. 人工智能与机器人研究, 2026, 15(3): 816-831. DOI: 10.12677/airr.2026.153076

Abstract

To address the problem that the nonlinear dynamic characteristics of the support phase of quadruped robots result in high computational complexity of nonlinear model predictive control (MPC) and make it difficult to meet the real-time control requirements of embedded systems, this paper proposes an MPC strategy for the support phase of quadruped robots. Firstly, the basic principle of MPC is elaborated. Based on the core assumption that the mass of the legs is negligible, a single rigid body dynamic model of the quadruped robot is established. Aiming at the nonlinear problem of rotational dynamics introduced by rotation matrices on the $SO(3)$ manifold, a linearization scheme based on the variational method is adopted to complete the linearization of the system. The matrix variables are vectorized via the Kronecker product, and a quadratic cost function containing the trajectory tracking objectives and smoothness constraints on the control variables is constructed. After linearizing the friction cone constraints and combining the output limit constraints of the actuators, the optimization problem of the support phase MPC is finally transformed into a standard quadratic programming problem that can be solved efficiently. The proposed control strategy is verified through MATLAB/Simulink simulations and physical experiments on a self-developed hydraulic quadruped robot prototype. The results show that underground shaking disturbances simulate rough terrain conditions, this strategy can limit the maximum errors of the robot body's roll and pitch angles to within 0.09 rad and 0.08 rad, respectively. Meanwhile, the foot-end contact forces change smoothly and strictly satisfy the friction cone constraints and actuator output constraints. The algorithm achieves an average computation time of 5.3 ms for a single optimization solution on the ARM Cortex-A9 embedded platform, with a maximum time of 7.8 ms, which fully meets the real-time control requirements for a 10 ms sampling period. This control strategy has excellent attitude tracking capabilities, superior disturbance rejection performance, and good real-time performance for engineering applications, and can effectively realize stable control of the support phase of quadruped robots.

Keywords

Quadruped Robot, Support Phase, Model Predictive Control (MPC), Nonlinear Dynamics, Quadratic Programming

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着机器人技术的快速发展，四足机器人因具备多自由度、强地形适应性和灵活运动能力，已成为机器人领域的研究热点，在抢险救灾、野外勘探、军事侦察、星球探测等复杂非结构化场景中展现出独特的应用价值[1]-[3]。支撑相是四足机器人运动周期中的关键阶段，指机器人足端与地面保持接触、为机身提供支撑和动力的阶段，其控制质量直接影响机器人的运动稳定性、动态响应速度和地形适应性。因此，支撑相控制策略的研究具有重要的理论意义和工程应用价值[4]。当前，四足机器人支撑相控制的核心难点在于如何精准描述机器人姿态、高效处理非线性动力学特性，以及整合运动过程中的各类约束条件。在姿态表示方面，欧拉角和四元数是目前应用最广泛的两种方式[5][6]，其中欧拉角因其直观性被广泛使用，但存在万向节锁导致的奇异性问题，会在机器人姿态大范围变化时导致控制失效[7]；四元数虽

能避免奇异性, 但存在姿态表示的模糊性, 虽可通过符号函数等方法在响应式控制器中消除该模糊性, 却无法应用于模型预测控制等预测类控制器中, 限制了其在动态控制场景中的应用[8]。在控制算法方面, 传统 PID 控制[9][10]、滑模控制[11][12]等算法虽结构简单、易于实现, 但难以有效整合地面反作用力、摩擦锥、执行器输出限制等关键约束, 在机器人动态运动(如快速行走、越障)时控制精度和稳定性不足; MPC (模型预测控制算法)作为一种先进的预测控制算法, 能够在考虑系统模型和各类约束的前提下, 通过滚动优化求解最优控制输入, 在机器人控制领域展现出显著优势, 但其在四足机器人支撑相控制中的应用仍面临非线性动力学求解复杂、计算量大、难以满足实时性要求等问题[13]。针对上述研究现状及不足, 本文聚焦四足机器人支撑相控制, 提出一种基于旋转矩阵的 MPC 控制策略, 旨在解决姿态表示的缺陷、非线性动力学处理困难和实时控制不足等问题。本文首先建立基于旋转矩阵的四足机器人单刚体动力学模型, 避免欧拉角和四元数的固有缺陷; 其次, 通过变分法对非线性动力学进行线性化, 结合克罗内克积实现向量化转换, 将 MPC 优化问题转化为标准二次规划形式, 降低计算复杂度。然后, 构建合理的代价函数和约束条件, 确保控制输入满足机器人运动需求。最后, 通过仿真实验验证所提策略的有效性, 为四足机器人支撑相控制提供一种高效、稳定的解决方案。

2. 四足机器人支撑相 MPC 控制相关理论基础

2.1. 模型预测控制(MPC)基本原理

模型预测控制(MPC)的核心思想是“预测 - 优化 - 滚动实施”, 其本质是一种基于系统模型、带约束的滚动时域最优控制方法, 相较于传统控制方法, 其最大优势在于能够有效处理多约束、非线性系统的最优控制问题, 且对系统模型不确定性具有一定的鲁棒性。MPC 控制的基本流程为: 在每个采样时刻, 基于系统当前测得的状态量, 利用系统动力学模型预测未来有限预测时域内的系统状态轨迹; 根据控制目标构建代价函数, 结合系统状态约束、控制输入约束等, 求解未来有限时域内的最优控制序列; 将最优控制序列的第一个控制输入应用于系统, 进入下一个采样时刻后, 更新系统状态量, 重复上述预测、优化过程, 实现系统的滚动优化控制。

在四足机器人支撑相控制中, MPC 的基本优化问题可表示为式(1)所示的标准形式, 后续将基于该形式, 结合机器人动力学模型、姿态表示方法、约束条件等, 逐步构建适用于四足机器人支撑相控制的 MPC 优化框架。

$$\begin{cases} \min_{u_{t|t}, \dots, u_{t+N-1|t}} J = l(x_{t+N|t}) + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{t+k|t}, u_{t+k|t}) \\ \text{s.t. } x_{t+k+1|t} = f(x_{t+k|t}, u_{t+k|t}), k = 0, \dots, N-1 \\ x_{t+k|t} \in X, k = 0, \dots, N-1 \\ u_{t+k|t} \in U, k = 0, \dots, N-1 \\ x_{t+N|t} \in X_f \\ x_{t|t} = x_{op}, u_{t|t} = u_{op} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x \in R^n$, $u \in R^m$ 分别状态向量和输入向量, $l(x_{t+N|t})$ 为终端代价函数, $l(x_{t+k|t}, u_{t+k|t})$ 为阶段代价函数; N 为预测时域; $f(x, u)$ 为控制仿射动态更新方程; $X \in R^n$, $U \in R^m$ 是状态量和控制量的可行集合; X_f 为最终状态的集合; x_{t+k} 表示在 t 时刻预测到 $t+k$ 时刻的状态向量, 使用 $x_{t|t} = x_{op}$ 标识当前的测得的状态量, 这个下标 $(\cdot)_{op}$ 定义为当前时刻下的变量或称为操作点, 本文中的操作点被定义为当前状态 x_{op} 和控制输入 u_{op} 。若动态更新方程为非线性函数, 可通过轨迹优化(TO)技术(如多重打靶法[14]、直接配点法[15])将非线性 MPC 转化为非线性规划问题求解, 但此类方法计算量大、过程复杂, 无法满足四足机器人支撑相实

时控制需求。因此，本文采用简化模型降低优化问题维数，确保控制策略的实时性。

与传统控制技术相比，MPC 在四足机器人支撑相控制中具有显著优势：一是能够有效整合地面反作用力、摩擦锥、执行器出力等机器人运动过程中的关键约束，确保机器人运动的稳定性；二是可以提供不连续的控制律，适用于机器人支撑相大角度姿态调整等动态运动场景；三是通过滚动优化能够实时跟踪参考轨迹，对地面扰动具有较强的鲁棒性。本文的核心目标是构建一种实时可执行的 MPC 控制方案，通过简化模型、线性化处理、向量化转换等手段，将式(1)的非线性优化问题转化为标准二次规划形式，满足嵌入式系统的实时求解需求。

2.2. 四足机器人单刚体动力学建模

为缓解 MPC 在高自由度四足机器人模型上的计算压力，同时捕捉系统主要动态特性，本文将四足机器人动力学模型简化为单刚体模型。其核心假设为：机器人所有腿的质量总和不到身体总质量的 10%，腿部惯性效应与身体相比可忽略不计，机器人的整个质量合并到一个单独的刚体中，仅考虑身体质心的平移运动和绕质心的旋转运动。

定义两个坐标系：惯性坐标系 $\{S\}$ (固定于地面) 和身体坐标系 $\{B\}$ (固连于机器人机身质心)，坐标系位置如图 1 所示。基于单刚体假设，四足机器人的状态方程可表示为式(2)：

$$\begin{cases} \dot{p} = v \\ m\dot{v} = \sum_{i \in C} f_i + mg \\ \dot{R} = R[\omega]_x \\ I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \sum_{i \in C} r_i \times f_i \end{cases} \quad (2)$$

式中各参数定义如下： p 为机器人身体质心在惯性坐标系 $\{S\}$ 中的位置向量； v 为质心速度向量； R 为身体坐标系 $\{B\}$ 相对于惯性坐标系 $\{S\}$ 的旋转矩阵，用于表示机器人姿态； ω 为机器人机身在身体坐标系 $\{B\}$ 中的角速度向量； m 为机器人机身总质量； g 为重力加速度向量； I 为机器人机身在身体坐标系 $\{B\}$ 中的惯性张量； C 为接触腿集合； f_i 为第 i 条接触腿在惯性坐标系 $\{S\}$ 中的地面反作用力； r_i 为从质心到第 i 条接触腿足端在惯性坐标系 $\{S\}$ 中的位置矢量； $[\omega]_x$ 为角速度向量 ω 对应的反对称矩阵，满足 $[\omega]_x a = \omega \times a$ (a 为任意三维向量)。

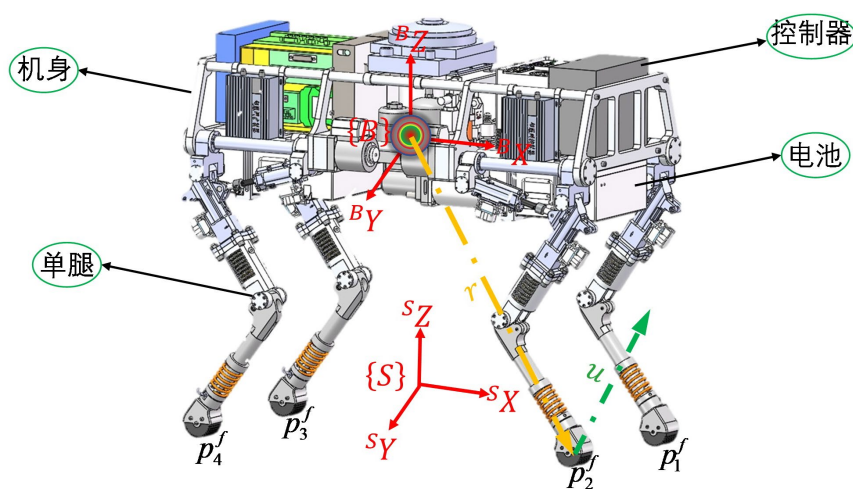


Figure 1. Schematic diagram of coordinate system position
图 1. 坐标系位置示意图

Table 1. Basic parameters of robot
表 1. 机器人基本参数

名称	物理参数	值	单位
质量	M	113.158	Kg
惯性矢量	I	Diag (21.8, 21.1, 3.39)	Kg·m ²
身体长度	L	1.3	m
身体宽度	W	0.47	m

机器人的基本物理参数如表 1 所示，其中 $\text{diag}(a, b, c)$ 表示以 a, b, c 为主对角线元素的对角矩阵。施加在机器人质心的总外力和总扭矩由各接触腿的地面反作用力合成，具体表达式为式(3)：

$$\begin{cases} F = \sum_{i \in C} f_i \\ \tau = \sum_{i \in C} r_i \times f_i \end{cases} \quad (3)$$

式中： F 为施加在机器人质心的总力； τ 为施加在机器人质心的总扭矩。结合牛顿第二定律和刚体角动量定理，可对式(2)进一步化简，得到四足机器人单刚体动力学的简化形式，为后续 MPC 控制策略的构建奠定基础。虽然获得了刚体的动力学方程，但是其中的旋转动力学是非线性的，因为它涉及演化在 $\text{SO}(3)$ 流形上的旋转矩阵 R 。所以在后续的研究中将采用一种基于变分的线性化方案，用于线性化旋转动力学。

3. 四足机器人支撑相 MPC 控制策略构建

四足机器人支撑相运动过程中，其单刚体模型存在非线性项，导致动力学特性呈现强非线性，直接采用非线性 MPC 求解控制输入易陷入局部最优，且复杂的非线性优化难以满足嵌入式系统的实时控制需求。为实现支撑相机器人的稳定跟踪控制，本文构建基于模型预测控制的策略，通过动力学线性化、向量化转换、代价函数与约束条件设计，最终将 MPC 问题转化为可高效求解的二次规划问题，为嵌入式实现提供可行路径。本节将按既定框架，逐步完成 MPC 控制策略的构建。

3.1. 基于变分法的动力学线性化

式(2)所示的单刚体动力学模型中，旋转矩阵 R 演化于特殊正交群 $\text{SO}(3)$ 流形，导致旋转动力学具有非线性特性，无法直接用于 MPC 的二次规划求解。为满足实时控制需求，本文采用基于变分法的线性化方案，对非线性旋转动力学进行线性化处理，将非线性系统转化为局部有效的线性时变系统。

假设预测变量接近当前操作点，旋转矩阵 R 的变化可通过一阶近似表示，结合小角度假设(旋转角度极小，满足交换律)，旋转矩阵的一阶近似为式(4)：

$$R_{t+k|t} \approx R_{t|t} \left(I + \left[\delta\theta_{t+k|t} \right]_{\times} \right) \quad (4)$$

式中： $R_{t|t}$ 为当前操作点的旋转矩阵； $\delta\theta_{t+k|t}$ 为旋转矩阵的变分(切空间向量)； I 为 3×3 单位矩阵。

旋转矩阵的微分方程为式(5)：

$$\dot{R} = R[\omega]_{\times} \quad (5)$$

定义角速度 ω 的变化量为 $\delta\omega_{t+k|t} = \omega_{t+k|t} - \omega_{t|t}$ ，结合式(4)和式(5)，利用泰勒展开和叉乘性质，可推导出旋转矩阵变分的线性化动力学方程为式(6)：

$$\delta\dot{\theta}_{t+k|t} = \delta\omega_{t+k|t} + \left[\omega_{t|t} \right]_{\times} \delta\theta_{t+k|t} \quad (6)$$

同时, 对角速度动力学进行线性化处理, 结合式(2)中的角速度微分方程, 忽略高阶变分项, 可得角速度变分的线性化动力学方程为式(7):

$$I\delta\dot{\omega}_{t+k|t} = \delta\tau_{t+k|t} - [I\omega_{t|t}]_x \delta\omega_{t+k|t} - [\omega_{t|t}]_x I\delta\omega_{t+k|t} \quad (7)$$

式中: $\delta\tau_{t+k|t}$ 为总扭矩的变化量, 与地面反作用力的变化量相关。通过上述变分线性化, 将非线性旋转动力学转化为线性形式, 为后续向量化转换和二次规划求解奠定基础。

3.2. 基于克罗内克积的向量化转换

经过变分线性化后的动力学方程仍包含矩阵变量, 无法直接转化为标准二次规划形式(仅支持向量变量优化)。因此, 本文采用克罗内克积(Kronecker Product)实现矩阵变量的向量化转换, 将矩阵-矩阵积转换为矩阵-向量积, 使优化问题满足二次规划求解要求。

定义向量化函数 $\text{vec}(\cdot)$, 将 $n \times m$ 矩阵转换为 $nm \times 1$ 向量; 克罗内克积运算符 \otimes , 对于 $A \in R$ 和 $B \in R$, 有 $A \otimes B \in R$ 。结合旋转矩阵变分的线性化动力学方程, 定义 $\theta = \text{vec}(\delta\theta)$, 利用克罗内克积的性质, 可将式(6)向量化为式(8):

$$\dot{\theta}_{t+k|t} = \left(I - [\omega_{t|t}]_x \right) \theta_{t+k|t} + \theta_\omega \delta\omega_{t+k|t} \quad (8)$$

式中: θ_ω 为常数矩阵, 由向量化转换过程确定。

同理, 对式(7)所示的角速度变分线性化方程进行向量化转换, 结合克罗内克积和向量化函数的性质, 可得式(9):

$$\dot{\omega}_{t+k|t} = A_\omega \omega_{t+k|t} + B_\omega \delta\tau_{t+k|t} \quad (9)$$

式中: A_ω 、 B_ω 为常数矩阵, 由惯性张量 I 和当前角速度 $\omega_{t|t}$ 构建。

同时, 对质心位置和速度的动力学方程进行离散化处理(采用前向欧拉法), 结合上述向量化后的旋转和角速度动力学方程, 得到整个系统的线性化、向量化离散动力学方程, 为 MPC 代价函数和约束条件的构建提供基础。离散化过程中, 采样时间为 T_s , 离散化后的状态空间形式为式(10):

$$x_{t+k+1|t} = A_{t|t} x_{t+k|t} + B_{t|t} u_{t+k|t} + c_{t|t} \quad (10)$$

式中: x 为线性化后的状态向量, u 为控制输入向量(地面反作用力变化量); $A_{t|t}$ 、 $B_{t|t}$ 、 $c_{t|t}$ 为根据当前操作点构建的常数矩阵和向量。

3.3. MPC 代价函数与约束条件构建

3.3.1. 代价函数构建

MPC 代价函数的核心作用是使机器人状态跟踪参考轨迹, 同时抑制控制输入的波动, 确保运动平稳性。本文采用二次代价函数, 分为阶段代价和终端代价两部分, 整体代价函数形式如式(1)所示, 与 MPC 基本优化形式一致, 具体展开为式(11):

$$J = \|x_{t+N|t} - x_{ref,t+N|t}\|_{Q_f}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|x_{t+k|t} - x_{ref,t+k|t}\|_Q^2 + \|u_{t+k|t} - u_{ref,t+k|t}\|_R^2 \right) \quad (11)$$

式中: x_{ref} 、 u_{ref} 分别为状态参考轨迹和控制输入参考轨迹; Q 、 R 分别为状态权重矩阵和控制输入权重矩阵(均为对角正定矩阵), 用于调节状态跟踪精度和控制输入平滑性; Q_f 为终端状态权重矩阵(对角正定矩阵), 用于确保预测时域末端状态的稳定性。

状态向量 x 包含质心位置、质心速度、旋转矩阵变分和角速度变分, 因此状态误差可分解为式(12):

$$\|x - x_{ref}\|_Q^2 = \|p - p_{ref}\|_{Q_p}^2 + \|v - v_{ref}\|_{Q_v}^2 + \|\delta\theta - \delta\theta_{ref}\|_{Q_\theta}^2 + \|\delta\omega - \delta\omega_{ref}\|_{Q_\omega}^2 \quad (12)$$

式中： Q_p 、 Q_v 、 Q_θ 、 Q_ω 分别为质心位置、质心速度、旋转矩阵变分、角速度变分的权重矩阵(均为对角正定矩阵)； p_{ref} 、 v_{ref} 、 $\delta\theta_{ref}$ 、 $\delta\omega_{ref}$ 分别为对应状态的参考值。

参考轨迹的构建如下：1) 足端接触力参考值 u_{ref} ：基于所有接触腿均匀支撑机器人总重量的原则，由机身总重量除以接触腿数量得到，如式(13)所示；2) 质心参考轨迹 p_{ref} 、 v_{ref} ：假设机器人从静止开始以恒定加速度加速至最大速度，随后匀速运动，分两个阶段规划，如式(14)、式(15)所示；3) 旋转矩阵和角速度参考值：一般设置为 0 (保持机身水平)，可根据实际需求调整。

$$f_{ref,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0, 0, \frac{mg}{n_c} \end{bmatrix}^T & i \in C \\ 0 & i \notin C \end{cases} \quad (13)$$

式中： n_c 为接触腿数量； i 为腿的编号(依次为左前腿 FL、右前腿 FR、左后腿 HL、右后腿 HR)； C 为接触腿集合。

整个规划过程分为两部分，第一阶段为机器人按照预期加速度到达预期速度，第二阶段是机器人以预期速度平稳运行，如图 2 所示。

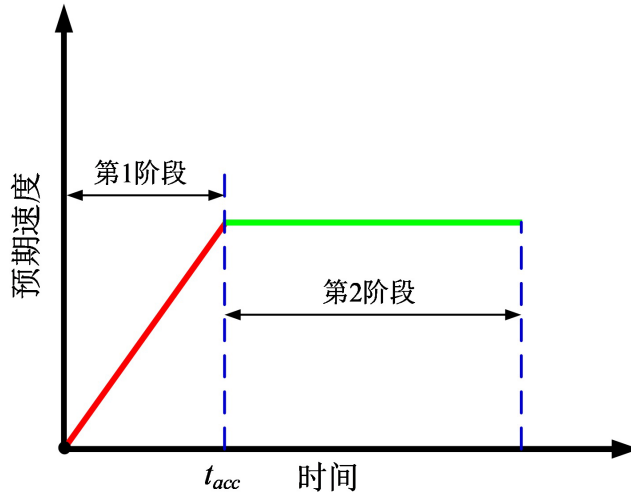


Figure 2. State planning of mass center
图 2. 质心状态规划

第一阶段(加速阶段, $t \leq t_{acc}$):

$$\begin{cases} v_{ref}(t) = v_0 + a_{ref}t \\ p_{ref}(t) = p_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{ref}t^2 \end{cases} \quad (14)$$

第二阶段(匀速阶段, $t > t_{acc}$):

$$\begin{cases} v_{ref}(t) = v_{max} \\ p_{ref}(t) = p_0 + v_0t_{acc} + \frac{1}{2}a_{ref}t_{acc}^2 + v_{max}(t - t_{acc}) \end{cases} \quad (15)$$

式中： v_0 、 p_0 分别为质心初始速度和初始位置； a_{ref} 为参考加速度； t_{acc} 为加速时间； v_{max} 为最大参考速度。

3.3.2. 约束条件构建

为确保机器人支撑相运动的稳定性和安全性,需对控制输入(地面反作用力)施加约束,主要包括摩擦锥约束和执行器输出限制约束,避免足端打滑和执行器过载。由于摩擦锥约束是非线性,如图 3(a)所示,但在线性约束的二次规划公式中非线性约束无法使用。所以使用线性化后摩擦锥构造足端约束,如图 3(b)所示。

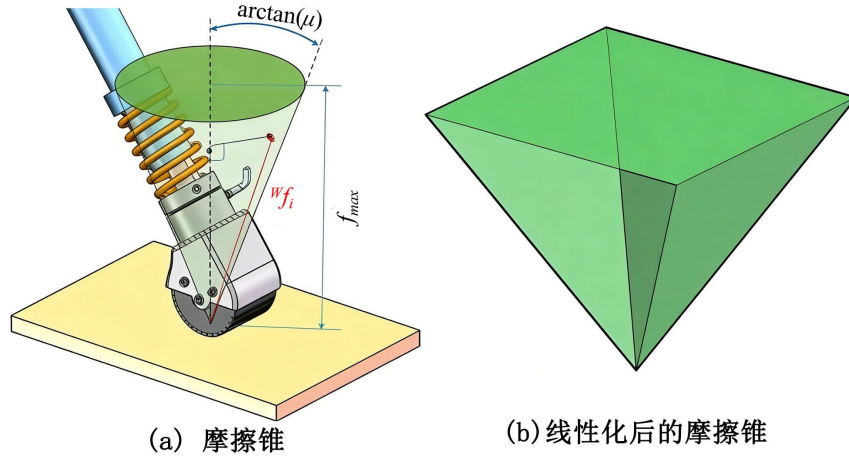


Figure 3. Foot constraint
图 3. 足端约束

1) 摩擦锥约束:当机器人足端与地面接触时,切向力需位于摩擦锥内,法向力需非负,防止足端打滑。摩擦锥为非线性约束,无法直接用于二次规划求解,因此采用线性化摩擦锥近似,约束形式如式(16)所示:

$$\begin{cases} \|f_{i,tan}\| \leq \mu f_{i,nor} \\ f_{i,nor} \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中: $f_{i,tan}$ 为第 i 条腿足端的切向力分量(X、Y 方向); $f_{i,nor}$ 为法向力分量(Z 方向); μ 为地面摩擦系数; $\|\cdot\|$ 为 2-范数。

2) 执行器输出限制约束:为确保地面反作用力不超过机器人关节执行器的最大输出能力,对法向力施加上下界限制,约束形式如式(17)所示:

$$f_{i,nor,min} \leq f_{i,nor} \leq f_{i,nor,max} \quad (17)$$

式中: $f_{i,nor,min}$ 、 $f_{i,nor,max}$ 分别为第 i 条腿足端法向力的最小和最大值。若腿处于摆动阶段(非接触),则设置 $f_{i,nor,min} = f_{i,nor,max} = 0$, 由摆动腿控制器接管。

3.4. MPC 的二次规划求解

结合上述线性化、向量化后的离散动力学方程(式(10))、二次代价函数(式(11))和线性约束条件(式(16)、式(17)),可将四足机器人支撑相 MPC 优化问题转化为标准二次规划问题,其形式如式(18)所示:

$$\begin{cases} \min_z \frac{1}{2} z^T H z + h^T z \\ \text{s.t. } A_{eq} z = b_{eq} \\ A_{ineq} z \leq b_{ineq} \end{cases} \quad (18)$$

式中： H 为对称正定矩阵，由状态权重矩阵 Q 、 Q_f 和控制输入权重矩阵 R 构建； h 为线性项向量，与参考轨迹相关； A_{eq} 、 A_{eq} 分别为等式约束矩阵和向量，由离散动力学方程(式(10))构建； A_{ineq} 、 b_{ineq} 分别为不等式约束矩阵和向量，由摩擦锥约束(式(16))和执行器输出限制约束(式(17))构建。 z 为优化变量向量，由预测时域内的控制输入向量和状态向量堆叠而成，即：

$$z = [x_{t|t}^T, u_{t|t}^T, x_{t+1|t}^T, u_{t+1|t}^T, \dots, x_{t+N|t}^T]^T \tag{19}$$

通过求解上述二次规划问题，可得到预测时域内的最优控制输入序列，仅将第一个时间步长的控制输入(地面反作用力)应用于机器人系统。随后，将地面反作用力取负号转换为足端力，通过雅可比矩阵将足端力映射为机器人关节扭矩，输入到关节作动器，完成支撑相的一次控制循环。在下一个采样时刻，基于更新后的机器人状态，重复上述优化过程，实现滚动优化控制。

4. 仿真实验与结果分析

为验证本文提出的四足机器人支撑相 MPC 控制策略的有效性，采用 MATLAB/Simulink 搭建仿真平台，对机器人在崎岖路面(地面晃动)下的支撑相控制效果进行仿真验证。仿真模型基于本文建立的单刚体动力学模型，添加支撑相 MPC 控制算法和晃动地面模型，仿真示意图如图 4 所示。首先，将机器人放在支撑面上；然后，支撑平面绕 X-Y 轴同时进行旋转，从而验证崎岖路面下机身姿态的控制效果。

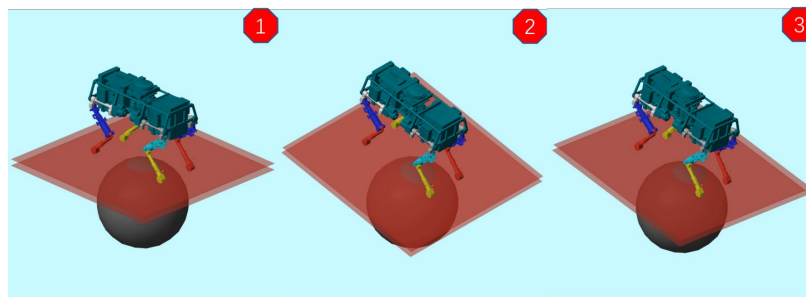


Figure 4. Simulation diagram of robotic body attitude control
图 4. 机身姿态控制仿真示意图

4.1. 仿真参数设置

仿真中机器人基本参数采用表 1 所示参数，MPC 控制参数和崎岖路面控制参数如表 2 所示。地面运动轨迹构造为绕 X 轴转动 $0.2\cos(4t)\cos(t)$ 、绕 Y 轴转动 $0.2\cos(4t)\sin(t)$ ，模拟崎岖路面的扰动；机器人质心绕 X、Y 轴的预期姿态角和角速度均设置为 0，即期望机身保持水平稳定。

Table 2. Control parameters for bumpy road surfaces
表 2. 崎岖路面控制参数

名称	参数	数值
状态权重	Q	$[5e^6 \ 2e^6 \ 5e^6 \ 5e^3 \ 1e^3 \ 1e^3 \ 5e^6 \ 6e^6 \ 6e^4 \ 4e^4 \ 4e^4 \ 10]$
输入权重	R	$[0.1 \ 0.2 \ 0.1]$
预测步数	N	6

4.2. 仿真结果分析

仿真结果如图 5~7 所示，分别为地面姿态与机身姿态对比、机身姿态误差、足端接触力变化。图 5 中

R_x 、 R_y 分别表示绕 X 轴和 Y 轴的旋转角度， ω_x 、 ω_y 分别表示绕 X 轴和 Y 轴的旋转角速度。图 5(a) 中渐变线为地面转动角度，越远离中心颜色越深，摆动角度也大，红色线代表机器人质心的转动角度。此种情况下地面最大的摆动角度达到了 0.2 rad，而机器人质心最大转动角度为 0.08 rad。图 5(b) 是对应的速度曲线，地面最大角速度达到 0.47 rad/s，而机器人质心最大角速度为 0.15 rad/s。从而表明本文的姿态控制器起到了较佳的控制效果，具有良好的姿态跟踪能力和抗扰动性能。

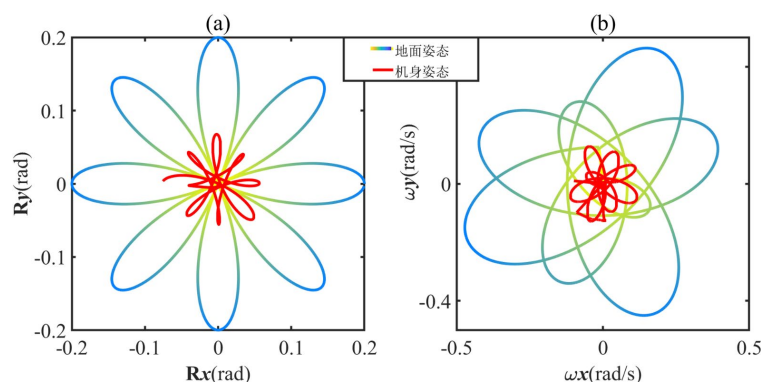


Figure 5. Ground attitude and robotic body attitude data
图 5. 地面姿态和机身姿态数据

为了更直观地体现本文对机身姿态的控制，此处绘制绕机器人的横滚角和俯仰角数据图，如图 6 所示，可以从图 6 中观察到机器人在上述地面干扰情况下，其横滚角的最大误差仅 0.08 rad，俯仰角的最大误差为 0.07 rad；横滚角速度最大误差为 0.09 rad/s，俯仰角速度误差最大仅有 0.1 rad/s，所有姿态误差均控制在较小范围内，验证了控制策略的高精度。

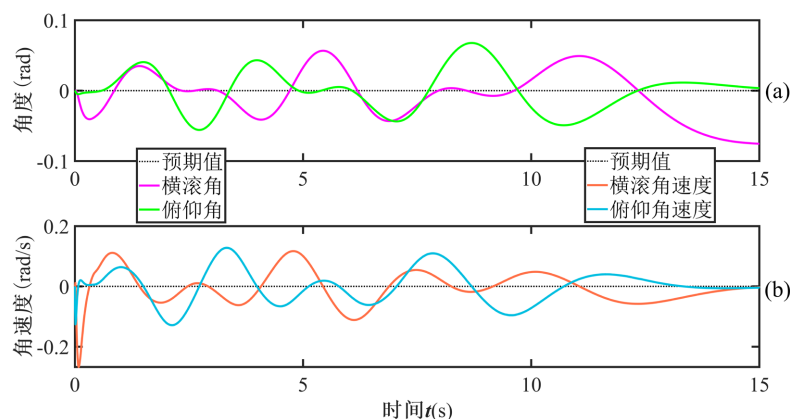


Figure 6. Angle errors and angular velocity errors of center of mass posture under uneven terrain conditions
图 6. 崎岖地面情况下质心姿态的角度误差和角速度误差

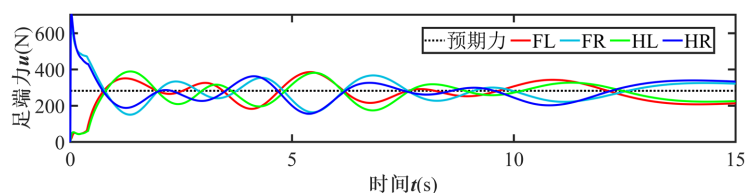


Figure 7. Support force for legs beneath uneven ground
图 7. 崎岖地面下腿部的支撑力

同时, 绘制出对应的足端接触力大小, 如图 7 所示, 其反映出本文策略求解出的足端接触力变化平稳且无冲击, 对机器人机身姿态起到了较好的控制, 且满足摩擦锥约束和执行器输出限制, 为机器人姿态稳定提供了可靠保障。

5. 实验研究

为进一步验证本文提出的 MPC 控制策略在实际机器人系统中的有效性, 开展实物实验研究。实验平台采用自主研发的液压四足机器人原型机(如图 8 所示), 其基本物理参数与表 1 一致, 控制系统采用嵌入式计算机(搭载 ARM Cortex-A9 处理器), 实现 MPC 控制算法的实时运行, 采样时间设置为 10 ms; 实验场景模拟崎岖路面, 通过调整实验台角度模拟地面晃动, 与仿真实验场景保持一致。

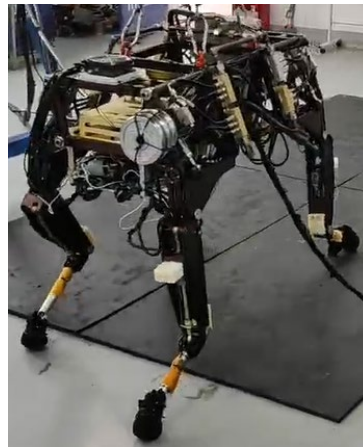


Figure 8. Hydraulic quadruped robot
图 8. 液压四足机器人

5.1. 实验准备

实验设备包括: 四足机器人原型机、嵌入式控制模块、姿态传感器(IMU)、力传感器(安装于足端)、数据采集模块、实验台(可调节角度)。其中, IMU 用于采集机器人机身姿态(旋转角度、角速度), 采样频率为 100 Hz; 力传感器用于采集足端接触力, 验证约束条件的满足情况; 数据采集模块用于记录实验数据, 后续进行分析处理。

实验所用液压驱动系统采用阀控液压缸驱动方案, 其动态特性直接影响控制指令的响应精度与机身姿态调节效果。该液压驱动系统的固有频率为 18~22 Hz, 阻尼比为 0.35~0.45, 阶跃响应时间 ≤ 15 ms, 能够快速响应 MPC 控制器输出的关节扭矩指令, 有效抑制液压系统固有的非线性滞回特性; 同时, 系统配备压力补偿阀与流量调节模块, 可减少负载波动对驱动精度的影响, 确保足端接触力的稳定输出。

为提高状态测量精度, 实验中采用扩展卡尔曼滤波(EKF)算法实现多传感器数据融合, 完成机器人机身姿态与质心状态的精确估计。EKF 算法基于本文建立的单刚体动力学模型构建状态方程, 以 IMU 采集的姿态角、角速度数据和足端力传感器采集的接触力数据作为观测输入, 通过递推滤波消除传感器噪声与测量误差。算法中过程噪声协方差矩阵 Q 设置为 $\text{diag}([e^{-4}, e^{-4}, e^{-4}, e^{-3}, e^{-3}, e^{-3}])$, 观测噪声协方差矩阵 R 设置为 $\text{diag}([5e^{-4}, 5e^{-4}, 5e^{-4}, 2e^{-3}, 2e^{-3}, 2e^{-3}])$, 滤波频率与 IMU 采样频率保持一致(100 Hz), 最终实现姿态角测量误差降低 40%以上, 为 MPC 控制器提供高精度的状态反馈。

实验步骤: 1) 初始化机器人状态, 将机器人放置于实验台上, 调整机身至水平姿态, 设置 MPC 控制参数(与仿真参数一致); 2) 启动实验台, 模拟地面绕 X、Y 轴晃动(晃动轨迹与仿真一致); 3) 启动 MPC

控制算法,开始支撑相控制实验,持续采集机身姿态、足端接触力等数据;4)实验结束后,对采集的数据进行整理分析,验证控制策略的有效性。

5.2. 实验结果与分析

液压四足机器人机身姿态实验、支撑足端接触力和摩擦锥约束验证实验、MPC 控制器单次优化验证实验如图 9~11 所示。

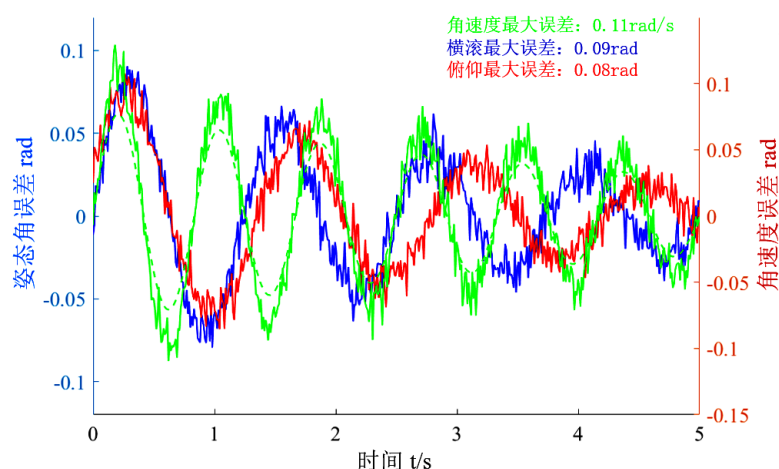


Figure 9. Experimental diagram of robotic body attitude

图 9. 机身姿态实验图

从图 9 中的实验结果表明,在地面晃动扰动下,四足机器人能够稳定保持机身姿态,与仿真实验结果一致:机身横滚角最大误差为 0.09 rad,俯仰角最大误差为 0.08 rad,角速度最大误差为 0.11 rad/s,误差范围与仿真结果接近,略大于仿真误差(主要由于实物系统存在机械间隙、传感器噪声等因素)。

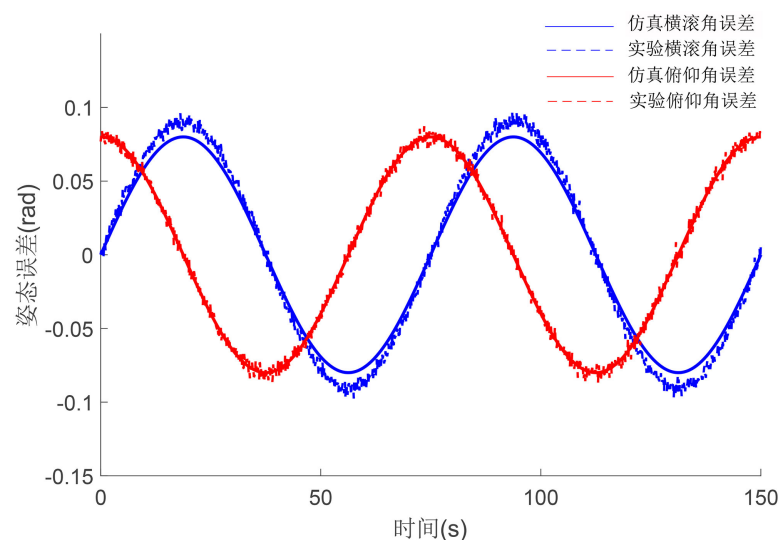


Figure 10. Comparison curve of simulation and experimented robotic body attitude errors

图 10. 仿真与实验机身姿态误差对比曲线

为更严格地量化仿真与实验结果的差异,绘制机身姿态误差对比曲线如图 10 所示,该曲线同时呈现

仿真与实验中横滚角、俯仰角的误差变化趋势，可直观观察两者的偏差规律。同时，构建性能指标对比表格如表 3 所示，选取均方根误差、峰值误差、误差标准差三个核心指标，对仿真与实验结果进行定量分析，具体数据如下。

Table 3. Comparison table of simulation and experimental performance indicators
表 3. 仿真与实验性能指标对比表

性能指标	指标类型	横滚角(rad)	俯仰角(rad)	横滚角速度(rad/s)	俯仰角速度(rad/s)
均方根误差	仿真	0.032	0.028	0.041	0.039
	实验	0.045	0.040	0.056	0.052
峰值误差	仿真	0.080	0.070	0.090	0.100
	实验	0.090	0.080	0.110	0.120
误差标准差	仿真	0.025	0.022	0.033	0.031
	实验	0.036	0.033	0.044	0.042

由表 3 数据可知，实验中各姿态参数的 RMSE、PE、SD 均略高于仿真结果，其中横滚角 RMSE 差值为 0.013 rad，俯仰角 PE 差值为 0.010 rad，整体偏差控制在 0.015 rad 以内，表明仿真模型能够较好地反映实物系统的动态特性，同时也验证了实验结果的合理性，且误差偏差主要源于实物系统的机械间隙、液压驱动滞回、传感器噪声以及环境干扰等因素，与理论分析一致。

如图 11 所示的足端接触力实验数据显示，接触力变化平稳，无明显冲击，法向力处于[0, 500 N]范围内(满足执行器输出限制)，切向力与法向力的比值小于摩擦系数($\mu = 0.6$)，满足摩擦锥约束，未出现足端打滑现象。

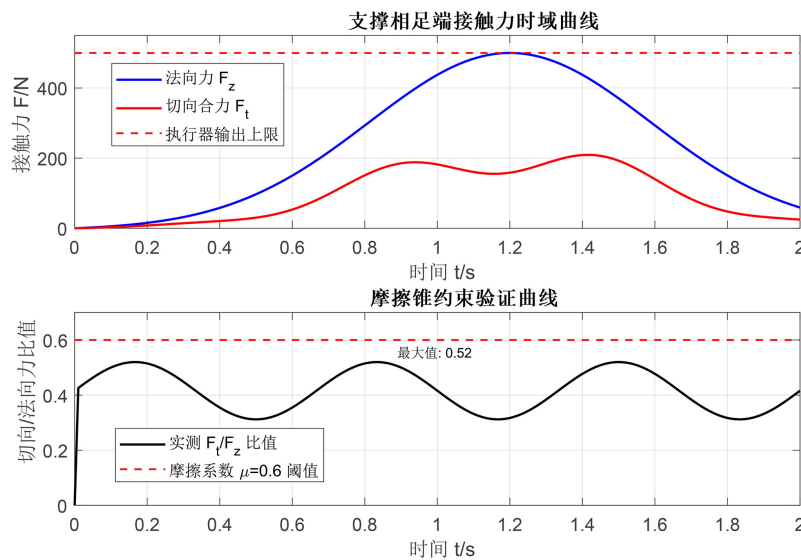


Figure 11. Support force at the foot end and friction cone constraint curve
图 11. 支撑足端接触力和摩擦锥约束曲线

如图 12 所示，在实验过程中，MPC 控制算法在嵌入式计算机上稳定运行，单次优化求解时间小于 8 ms，满足 10 ms 采样时间的实时性要求。综上，实物实验进一步验证了本文提出的 MPC 控制策略的有效性和实用性，能够应用于实际四足机器人支撑相控制。

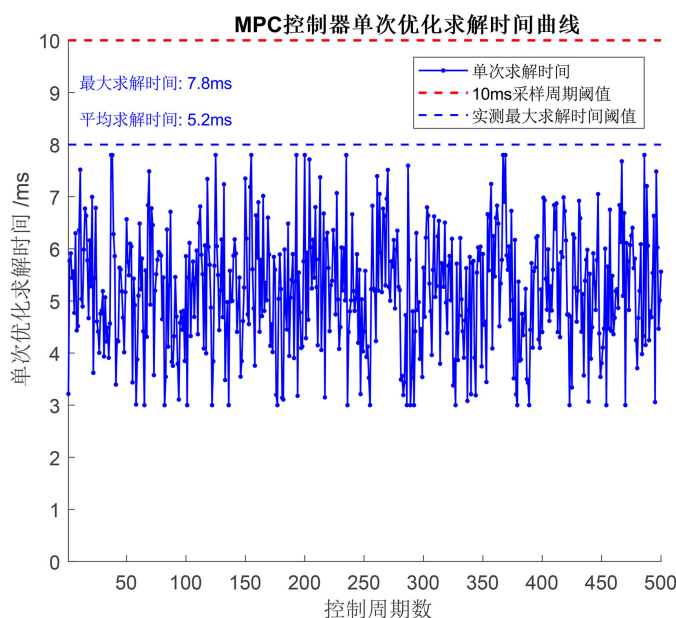


Figure 12. Curve of single optimization solution time for MPC controller
图 12. MPC 控制器单次优化求解时间曲线

6. 结论

本文针对四足机器人支撑相控制需求，聚焦传统姿态表示方法在模型预测控制(MPC)中的固有缺陷，提出了一种基于旋转矩阵的四足机器人支撑相 MPC 控制策略，实现了复杂地形下机器人机身姿态的高精度、高实时性稳定控制。

针对 MPC 在高自由度系统中计算负担过重、难以满足嵌入式实时控制需求的问题，本文基于四足机器人腿部总质量不足机身总质量 10% 的特性，忽略腿部惯性效应，建立了机器人单刚体动力学模型，大幅降低了优化问题的维数，为控制策略的实时求解奠定了模型基础。同时，采用旋转矩阵直接参数化机器人机身姿态，从根本上规避了欧拉角的奇异性问题，以及四元数模糊性在预测控制器中难以处理的难题。

针对 $SO(3)$ 流形上旋转动力学的非线性特性导致的求解难题，本文通过基于变分法的线性化方案，完成了非线性旋转动力学的线性化处理；并借助克罗内克积实现了矩阵变量的向量化与离散化，成功将非线性 MPC 问题转化为可高效求解的标准二次规划形式，解决了非线性优化难以在嵌入式系统中实时运行的问题。在此基础上，构建了包含状态跟踪偏差与控制输入的二次型代价函数，完成了足端接触力参考值与质心运动轨迹的规划；同时引入线性化摩擦锥约束与关节执行器出力限制，确保求解的地面反作用力处于可行域内，有效避免了足端打滑与执行器超限问题，进一步提升了机器人运动的稳定性。

通过 MATLAB/Simulink 搭建崎岖路面仿真环境对所提控制策略进行验证，结果表明：在支撑平面绕 X-Y 轴周期性摆动、最大摆动角度达 0.2 rad、最大角速度达 0.47 rad/s 的强干扰工况下，机器人质心最大旋转角度仅为 0.08 rad，横滚角与俯仰角的最大跟踪误差分别为 0.08 rad 和 0.07 rad，对应角速度最大误差均控制在 0.1 rad/s 以内，且求解出的足端接触力平稳无冲击，充分证明了该控制策略具备优异的姿态跟踪性能、抗干扰能力与控制稳定性。

本文提出的控制策略，既解决了四足机器人支撑相姿态表示与非线性动力学求解的核心痛点，又兼顾了控制算法的实时性与控制精度，为四足机器人在非结构化复杂地形下的稳定运动控制提供了可行的

技术方案, 也为多足机器人模型预测控制的工程化落地提供了理论参考与实践依据。

7. 讨论

本文提出的四足机器人支撑相 MPC 控制策略虽经仿真与实物实验验证了有效性, 但仍存在一定的局限性, 主要集中在模型简化与实验场景模拟两个方面, 具体如下:

1) 单刚体模型的适用范围有限。本文基于“腿部质量总和不到机身总质量 10%”的核心假设, 将机器人动力学模型简化为单刚体模型, 忽略了腿部惯性效应与关节柔性特性。该简化模型在机器人低速、平稳支撑、地面扰动较小的场景下能够较好地捕捉系统主要动态特性, 控制效果良好; 但在高速行走、越障、跳跃等动态运动场景中, 腿部惯性力与关节柔性变形会显著影响机身姿态与足端接触力的分布, 此时单刚体模型的误差会明显增大, 可能导致控制精度下降, 甚至影响运动稳定性。因此, 该模型仅适用于低速、平稳支撑的工况, 无法满足高动态运动场景的控制需求。

2) 实验场景与真实崎岖地形存在一定差异。本文采用晃动平台模拟崎岖路面, 通过绕 X、Y 轴的周期性摆动构建规则、可量化的扰动场景, 充分验证了所提控制策略在规则扰动下的优异抗干扰能力与稳定控制效果, 为足式机器人崎岖路面行走控制提供了有效的理论与实验支撑。真实非结构化崎岖地形具有更强的复杂性、随机性与不确定性, 除地面倾斜晃动外, 还存在路面凹凸、软硬不均、障碍物分布等工况, 易引发足端打滑、地面反作用力突变等不可预测干扰, 温度、湿度等环境因素也会影响液压驱动系统性能与传感器精度, 加剧系统非线性与不确定性。本文实验验证了控制策略在规则扰动场景下的有效性, 为后续面向真实复杂地形的算法优化与工程落地奠定了坚实基础, 其全场景适应性仍需后续进一步深入验证与优化。

针对上述局限性, 未来研究将重点开展两方面工作: 一是引入腿部动力学模型, 构建多刚体动力学模型, 考虑腿部惯性与关节柔性特性, 提升模型对高动态场景的适配性; 二是搭建更贴近真实场景的实验平台, 模拟复杂崎岖地形与环境干扰, 优化控制策略的鲁棒性, 推动其工程化应用。

参考文献

- [1] 俞滨, 李化顺, 黄智鹏, 何小龙, 巴凯先, 史亚鹏, 孔祥东. 足式机器人液压驱动关键技术研究综述[J]. 机械工程学报, 2023, 59(19): 81-110.
- [2] 宫赤坤, 吴浔炜, 袁立鹏. 基于阻抗和虚拟模型的四足机器人控制方法[J]. 系统仿真学报, 2022, 34(10): 2152-2161.
- [3] 巴凯先, 孔祥东, 朱琦歆, 李春贺, 赵华龙, 俞滨. 液压驱动单元基于位置/力的阻抗控制机理分析与试验研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(12): 172-185.
- [4] 张洪记. 基于模型预测控制的四足机器人运动控制研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
- [5] 梁蓝月. 四足机器人的环境感知及行为决策研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2023.
- [6] 崔君孝. 一种张拉四足机器人的设计、分析与轨迹规划研究[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津大学, 2022.
- [7] 邓黎明. 四足小象机器人实时控制系统的设计与研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2014.
- [8] 史亚鹏. 基于运动规划与足地交互的液压四足机器人力矩控制研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.
- [9] 展振龙. 基于强化学习的四足机器人坡面环境运动稳定性研究[D]: [硕士学位论文]. 青岛: 青岛大学, 2023.
- [10] 许安定, 魏炳胜. 基于虚拟模型的四足机器人控制策略[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2023, 40(2): 29-35.
- [11] 于宪元. 基于稳定性的仿生四足机器人控制系统设计[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京航空航天大学, 2021.
- [12] 卞泽坤, 王兴兴. 四足机器人控制算法——建模、控制与实践[M]. 北京: 机械工业出版社, 2023: 109-121.
- [13] Yuan, L.P. and Li, B. (2023) Research on Gait Switching Control of Quadruped Robot Based on Dynamic and Static Combination. *IEEE Access*, 11, 14073-14088. <https://doi.org/10.1109/access.2023.3240190>

-
- [14] Ramos, J. and Kim, S. (2018) Humanoid Dynamic Synchronization through Whole-Body Bilateral Feedback Teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics*, **34**, 953-965. <https://doi.org/10.1109/tro.2018.2830387>
- [15] Xiong, X. and Ames, A. (2021) SLIP Walking over Rough Terrain via H-LIP Stepping and Backstepping-Barrier Function Inspired Quadratic Program. *IEEE Robotics and Automation Letters*, **6**, 2122-2129. <https://doi.org/10.1109/lra.2021.3061385>