

# Revise the Result to the Equations of the Acoustic Waves of Smectic A Phase Liquid Crystal

Hui Zhang, Lei Zhou

Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing  
Email: hzhang@bnu.edu.cn

Received: Aug. 16<sup>th</sup>, 2012; revised: Aug. 29<sup>th</sup>, 2012; accepted: Sep. 9<sup>th</sup>, 2012

**Abstract:** For the equations of the acoustic waves of Smectic A of liquid crystal, we strictly mathematically discuss the equations from the viewpoint of physical phenomenon and mathematics. After comparing these conclusions we know that the mathematical solution is the limit of the answer from the physics phenomenon. We revise the original results obtained only from phenomenon, which is also a supplement for the original results.

**Keywords:** Smectic A Liquid Crystal; The Acoustic Waves; Mathematical Theory

## 修正层状 A 相液晶的声学波模式下方程的结果

张 辉, 周 蕾

北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京  
Email: hzhang@bnu.edu.cn

收稿日期: 2012 年 8 月 16 日; 修回日期: 2012 年 8 月 29 日; 录用日期: 2012 年 9 月 9 日

**摘 要:** 本文用数学的严格求解的方法, 对层状 A 相液晶模型在声学波模式下, 所得到的方程组进行更加严格地讨论, 分别从物理学现象角度和数学理论角度得到结论, 并进行对比。并得到数学严格解是物理现象学角度解的一种极限情况。从而修正了原本仅从现象得到的结果, 是对于原有结果的一种补充。

**关键词:** 层状 A 相液晶; 声学波; 数学理论

### 1. 引言

De Gennes 所著的液晶方面的权威著作 *The Physics of Liquid Crystal* (《液晶物理学》) 中对于液晶的层状 A 相 ( $S_A$ ) 声学波方程的讨论部分, 给出了很有意思的结果。该书第八章 8.1.6 节中所陈述的方程组讨论的结果, 是基于对实验结果的猜测, 并非从方程出发所得到的结果<sup>[1]</sup>。针对于这一点, 本文主要是从方程出发, 用所得到的计算结果应用于实验结论的解释。而理论上的严格求解比较模糊。本文针对详细的解法进行了进一步的探讨, 从而得出严格理论结果与实际猜测的结论的差距。

在谢毓章教授所著的《液晶物理学》中第十二章

中对于层状 A 相液晶的多种理论模型进行了研究, 给出了计算方法<sup>[2]</sup>。但是对于一个重要参数——交叉体积弹性模量  $C$  的论述并没有, 因而在本文中, 将对这一重要参数加以讨论, 对于液晶的理论研究具有一定的意义。

### 2. 声学波方程的讨论

为了本文的完整性, 本节内容是<sup>[1]</sup>中的简洁重述。当波矢相对于层面倾斜的时候, 在  $x, z$  平面内的情况就发生变化: 层的位移量  $u$  与层间空间的调整有关。类似地, 速率  $v_x$  与晶体体积的扩张系数  $\theta$  有关。由于这个原因, 猜想两种声波, 用于描述密度振幅的耦合

和层间空间的耦合。这两种声波必须满足以下特征：

- 1) 湿度对这两种声波的影响很弱；
- 2) 在声学波模式下，渗透作用很微弱，几乎可以忽略；
- 3) 该声波是绝热的而不是等温的，也就是这个变化的过程是熵恒定的<sup>[3]</sup>。

以上的假设是在不考虑外场存在的条件下提出的，也就是说  $H = 0$ 。

通过使用声学的办法或者是光的散射，已经可以在  $S_A$  中观测到这种波。假设方程的解  $u$  形式为  $e^{i(q_x x + q_z z - \omega t)}$ ，得到下面的方程组：

$$\left. \begin{aligned} i\omega\theta + iq_x v_x + iq_z v_z &= 0 \\ -i\rho\omega v_z &= -iq_z P + g_z \\ -i\rho\omega v_x &= -iq_x P \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中

$$-i\omega u = v_z, \quad g_z = -q_z^2 B^0 u + iC^0 q_z \theta, \quad -P = A^0 \theta + iC^0 q_z u$$

速率  $v_z$  可以认为在存在干扰的情况下，层状液晶发生转动时产生了角速度  $\omega$ ，在单位时间内，层的位移量与分子的长度近似，那么转动的速率  $v_z = -i\omega u$ ，符号仅仅表示转动的方向。 $g_z$  的表达形式是忽略了外场的作用简化而得到的。压强的变化主要是由于密度的变化  $\theta$  ( $\theta = -\frac{\delta\rho}{\rho}$ )，由于层的位移而产生的体积的膨胀，即体积的弹性模量  $C$  和  $z$  轴方向上层位移的变化量相关，继而不难理解  $-P = A^0 \theta + iC^0 q_z u$  了，其中压强  $P$  前面的符号，表示方向。

### 3. 声学波方程有解的条件

本节的内容是[1]中的结论，主要是实验现象学结论，为了便于和严格的数学结论对比，我们首先陈述。对于方程(1)，其中的未知量是  $\theta$ 、 $v_x$ 、 $v_z$ ，用于描述液晶层发生变化的量是角速度以及局部质量的变化(密度的变化)，所以我们考虑方程有解的条件，从而得出关于  $\rho\omega$  的关系。

方程组(1)有唯一非零解的条件，当且仅当系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix} \omega & q_x & -iq_x \omega \\ iq_z (A^0 + C^0) & 0 & \rho\omega^2 - (B^0 + C^0) q_z^2 \\ q_x A^0 & \rho\omega & iC^0 q_x q_z \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

或

$$\begin{aligned} (\rho\omega^2)^2 - \rho\omega^2 (A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2) \\ + q_x^2 q_z^2 (A^0 B^0 - C^0) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

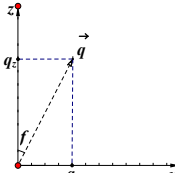
将方程(3)中的  $\rho\omega^2$  作为方程的未知项，那么这就是一个关于  $\rho\omega^2$  的一元二次方程。我们知道液晶的密度在某一时刻的局部是不变的，而由于外界对于区域内液晶的扰动可以使液晶产生不同方向的转动速度，因而我们假设  $\rho\omega_1^2$ 、 $\rho\omega_2^2$  是方程(3)的两个解，根据韦达定理，得到

$$\left. \begin{aligned} (\rho\omega_1^2)(\rho\omega_2^2) &= q_x^2 q_z^2 (A^0 B^0 - C^0) \\ \rho\omega_1^2 + \rho\omega_2^2 &= A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在这里，引入声速<sup>[3]</sup>  $C_i = \frac{\omega_i}{q}$  以及角  $f$ ，其中角  $f$  是波矢  $q$  与光轴( $z$  轴)的夹角，那么我们可以得到

$$\left. \begin{aligned} C_1^2 C_2^2 &= \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{q_x^2}{q^2} \cdot \frac{q_z^2}{q^2} (A^0 B^0 - C^0) \\ C_1^2 + C_2^2 &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q_x^2}{q^2} A^0 + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q_z^2}{q^2} (A^0 + B^0 + 2C^0) \end{aligned} \right\}$$

通过角  $f$  引入我们可以得到如下关系：

$$\left. \begin{aligned} \sin f &= \frac{q_x}{q} \\ \cos f &= \frac{q_z}{q} \end{aligned} \right\}$$


因而有

$$\left. \begin{aligned} C_1^2 C_2^2 &= \frac{\cos^2 f \sin^2 f (A^0 B^0 - C^0)}{\rho^2} \\ C_1^2 + C_2^2 &= \frac{A^0 + (B^0 + 2C^0) \cos^2 f}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

从方程(4)和(5)可以知道在波动传递过程中， $\theta$  和  $u$  的调整变化是成对出现的。 $A$  属于一般  $10^{10} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$  的范围，从一个系统到另一个系统时， $B$  和  $C$  可以进行理想的变化，常常  $A \gg B, C$ 。

$$C_1 = \left( \frac{A^0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

这种波的极限是一种必要的密度调节, 定义这种波为“第一声音”。这里的“第一声音”的表达式并不是严格的计算结果, 这里可以说是通过实验现象所得到的结果, 这种结果可以用来解释实验现象却不能用来解释方程(5)。想要用结果真正解释方程(5)就有必要通过严格的数学计算来给出现有结果的补充。

将式(6)带入到方程(5)的第一式中我们得到:

$$A^0 C_2^2 = \frac{A^0 B^0 - C_0}{\rho} \sin^2 f \cos^2 f$$

在这里, 我们忽略  $C_0$  对于方程的影响, 并经过适当的近似化简得到“第二声音”如下:

$$C_2 = \left( \frac{B^0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \sin f \cos f \quad (7)$$

这种波与  $u$  的调整一致, 称其为第二传播模型的速度。“第二声音”的名称来自于它类似于超流体氦与复杂序参量的相的波动有关。在层状 A 相液晶中, 层位移  $u$  与相紧密相关; 因此他们具有相似性。

值得注意的是  $C_2$  的角独立性, 方程(7)表示当  $f = \pi/2$  时  $C_2 = 0$ , 这个模型与波荡模式是一致的。从传递到强衰减行为的连续变化, 同时便随传递速率的消失已经被强压下瑞利实验中的弯电效应证实。当  $f = 0$  时  $C_2 = 0$ , 第二声速依然消失。当  $f \rightarrow 0$  的时候, 渗透作用显得十分重要, 此时渗透模式解中描述模型成立。

注意布里渊实验必须在频率为千兆赫的领域中进行, 这与我们对流体力学系统的定义不一致, 因为集中非流体力学的模型(例如两极松弛, 相对于层面的倾斜, 层状液晶序参量模型等等)常常低于这个频率。其中有些已经在理论上进行研究。当  $f \geq \pi/4$  时, “第二声音”的消失和  $B$  在 10 到 30 范围内的高频值以及流体力学系统溃动: 猜想层状液晶在千兆赫范围内比在千赫范围内变得更硬。度量可压缩的具有弹性的常量是一个难题: 超出  $10^6 \sim 10^7$  Hz 以上的频率将不再属于流体力学系统范围; 低于  $10^3 \sim 10^4$  Hz 以下的频率将会有其他运动的介入<sup>[1]</sup>。

#### 4. 声学波的数学解

本节我们将推导出严格的数学结论, 并与前一节的结论加以对比。有关方程(3)的解法, 我们试图从数

学的角度得到解。对于方程

$$\begin{aligned} & (\rho\omega^2)^2 - \rho\omega^2 \left( A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2 \right) \\ & + q_x^2 q_z^2 (A^0 B^0 - C^{02}) = 0 \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[ A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2 \right]^2 - 4q_x^2 q_z^2 (A^0 B^0 - C^{02}) \\ &= A^{02} q_x^4 + (A^0 + B^0 + 2C^0)^2 q_z^4 \\ &+ 2A^0 q_x^2 q_z^2 (A^0 + B^0 + 2C^0) \\ &- 4q_x^2 q_z^2 (A^0 B^0 - C^{02}) \end{aligned}$$

由于常常有  $A \gg B, C$ , 对上式我们做一些近似

$$A^0 + B^0 + 2C^0 \approx A^0 \quad (8)$$

如果我们假设  $B^0 \approx c_1 \varepsilon, C^0 = c_2 \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon > 0$  并且是一个无限接近于 0 的无穷小量,  $c_1, c_2$  是常数, 那么有

$$A^0 B^0 - C^{02} = \varepsilon (A^0 c_1 - c_2^2 \varepsilon) \quad (9)$$

由于  $A^0 c_1 - c_2^2 \varepsilon$  是一个有界的常量, 所以我们有

$$A^0 B^0 - C^{02} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (A^0 c_1 - c_2^2 \varepsilon) \approx 0 \quad (10)$$

根据(8)和(10)两个近似, 我们可以得到以下近似:

$$\Delta \approx A^{02} q_x^4 + A^{02} q_z^4 + 2A^{02} q_x^2 q_z^2 = A^{02} (q_x^2 + q_z^2)^2 \quad (11)$$

所以我们有

$$\rho\omega_i^2 = \frac{A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

其中  $i = 1, 2$ 。当  $i = 1$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \rho\omega_1^2 &= \frac{A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2 + A^0 (q_x^2 + q_z^2)}{2} \\ &= \frac{2A^0 q_x^2 + (2A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2}{2} \end{aligned}$$

故

$$\omega_1^2 = \frac{2A^0 q_x^2 + (2A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2}{2\rho}$$

所以

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{\omega_1^2}{q^2} = \frac{2A^0 q_x^2 + (2A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2}{2\rho q^2} \\ &= \frac{A^0 q_x^2}{\rho q^2} + \frac{2A^0 + B^0 + 2C^0}{2\rho} \frac{q_z^2}{q^2} \end{aligned} \quad (12)$$

这里我们依然引入角度  $f$ ,  $f$  是波矢  $q$  与光轴  $z$  之间的夹角。在  $x, z$  平面内我们有  $\sin f = q_x/q, \cos f = q_z/q$ ; 另外我们再次需要利用关系  $A \gg B, C$ , 那么我们得到近似解如下

$$C_1^2 \approx \frac{A^0}{\rho} \sin^2 f + \frac{A^0}{\rho} \cos^2 f = \frac{A^0}{\rho}$$

所以有  $C_1 \approx \sqrt{A^0/\rho}$ 。所以这里的“第一声速”与(6)式一样。对于这个式子, 如果我们把液晶分子的弹性模量  $A^0$  当成一个常数, 那么有  $C_1 \sim 1/\sqrt{\rho}$ 。这说明当液晶的密度越大那么声速就会相对小, 也就是外力的干扰对于液晶的分子排列影响越小; 相反, 当液晶的密度越小, 声速就会相对大, 也就是外力对于液晶分子排列的干扰就会越大。这与实际的自然现象也是相符的。

那么利用类似的方法, 接下来我们来计算“第二声音”的结果。当  $i=2$  时, 有

$$\begin{aligned} \rho\omega_2^2 &= \frac{A^0 q_x^2 + (A^0 + B^0 + 2C^0) q_z^2 - A^0 (q_x^2 + q_z^2)}{2} \\ &= \frac{(B^0 + 2C^0) q_z^2}{2} \end{aligned}$$

所以

$$\omega_2^2 = \frac{(B^0 + 2C^0) q_z^2}{2\rho}$$

所以

$$C_2^2 = \frac{\omega_2^2}{q^2} = \frac{(B^0 + 2C^0) q_z^2}{2\rho q^2} = \frac{(B^0 + 2C^0)}{2\rho} \cos^2 f$$

所以

$$C_2 = \sqrt{\frac{(B^0 + 2C^0)}{2\rho}} \cos f \quad (13)$$

这里解得的第二声速与式(7)不一样, 主要是我们这并没有用带入法解答“第二声速”, 而是用数学中严格的计算得到的结果。在式(7)和式(13)之间, 最明显的区别是交叉体积弹性模量  $C^0$ 。

从(13)可以看出第二声速与渗透作用是有关的, 并且渗透作用显得十分重要。而对于式(7)来说, 当  $f \rightarrow 0$  的时候, 渗透作用显得十分重要。我们不妨可以认为(13)是式(7)的极限情况。

这里对于将式(13)作为式(7)的极限情况进一步说明。

我们将式(7)和式(13)进行联立

$$\begin{cases} C_2 = \sqrt{\frac{B^0}{\rho}} \sin f \cos f \\ C_2' = \sqrt{\frac{(B^0 + 2C^0)}{2\rho}} \cos f \end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_2}{C_2'}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{\frac{B^0}{\rho}} \sin f \cos f}{\sqrt{\frac{(B^0 + 2C^0)}{2\rho}} \cos f}\right)^2 \\ &= \frac{2B^0}{B^0 + 2C^0} \sin^2 f = \frac{2B^0}{B^0 + 2C^0} \left(\frac{1 - \cos 2f}{2}\right) \end{aligned}$$

对于上式我们对两边取极限  $f \rightarrow 0$ , 得到下面的极限式:

$$\lim_{f \rightarrow 0} \left(\frac{C_2}{C_2'}\right)^2 = \frac{2B^0}{B^0 + 2C^0} \lim_{f \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2f}{2}\right) = 0$$

当  $f=0$  时,

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_2' &= \sqrt{\frac{B^0 + 2C^0}{\rho}} \end{aligned}$$

当  $f \rightarrow 0$  时, 也就是说液晶分子的波矢  $q$  没有与光轴平行, 分子层的厚度等于一个分子的长度, 这正是渗透模式所描述的液晶状态。此时渗透作用显得很重要。如果我们考虑交叉体积弹性模量  $C^0$  对于第二声音的影响, 则第二声音是微弱的存在的。

对于第一声音与第二声音, 他们共同描述了不同的液晶模型(振荡模式、渗透模式)。第一声音是液晶普遍存在的, 可用于解释多个模型。相对于第一声音, 第二声音显得不是那样的普遍, 而是通过波矢的偏转情况将不同的模式进行了整合。

## 5. 结论

我们通过数学的严格解法得到关于理论与实际现象学猜测的差距。数学模型来源于对实际物理现象的假设, 在这种科学的假设之下得到的结论能够用于描述一种或多种现象。本文主要是通过理论的求解来解释实验的想象, 相对于通过现象得到结果的物理方法, 有异曲同工的效果。本文的结果也是对于原有结

果的一种补充。

- [2] 谢毓章. 液晶物理学[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 1-3, 587-638.
- [3] 贾月梅. 流体力学[M]. 北京: 国防工业出版社: 第 13 章.

## 参考文献 (References)

- [1] P. G. de Gennes. The physics of liquid crystal [M]. 北京: 科学出版社, 2008: Chapter 8, 408-423.