

钢丝的剪切模量与摆长及扭转角度关系的研究

张续文^{1*}, 韩先镇¹, 韩文娟¹, 李德翠²

¹六盘水师范学院物理与电气工程学院, 贵州 六盘水

²六盘水市第四中学, 贵州 六盘水

Email: 117602848@qq.com

收稿日期: 2020年9月8日; 录用日期: 2020年9月22日; 发布日期: 2020年9月29日

摘要

研究材料的剪切模量与摆长及在外力作用下的扭转角之间的关系。通过剪切模量和转动惯量实验测量不同扭转角度、不同长度钢丝的扭转振动周期以研究扭转角和摆长对实验结果的影响。使用origin软件对测量数据进行分析, 得出钢丝扭转角大于300°时能保证良好的实验测量精度。

关键词

钢丝的剪切模量, 摆长, 扭转角度, 研究

The Study on the Relationship between the Shear Modulus of Steel Wire and Swing Length and Torsion Angle

Xuwen Zhang^{1*}, Xianzhen Han¹, Wenjuan Han¹, Decui Li²

¹School of Physics and Electrical Engineering, Liupanshui Normal University, Liupanshui Guizhou

²Liupanshui No. 4 Middle School, Liupanshui Guizhou

Email: 117602848@qq.com

Received: Sep. 8th, 2020; accepted: Sep. 22nd, 2020; published: Sep. 29th, 2020

Abstract

The relationship between the shear modulus and the pendulum length, the torsion angle under external force is studied. The influence of torsion angle and swing length on the experimental re-

*第一作者。

sults is studied that the torsional vibration period of steel wire with different torsion angle and length are measured by shear modulus and moment of inertia experiment. The conclusion is obtained that when the torsion angle of steel wire is greater than 300 degrees, the experimental measurement accuracy can be guaranteed using origin software to analyze the measured data.

Keywords

Shear Modulus of Steel Wire, Pendulum Length, Torsion Angle, Research

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

剪切模量是在材料弹性限度内剪切应力与剪切应变的比值，它是度量材料的力学性能重要指标[1]之一。钢丝的扭转角度、扭摆摆长和剪切模量之间的关系是普通物理中的重要力学关系。钢丝的剪切模量会随着扭摆摆长(或扭转角度)变化而变化，当摆长(或扭转角度)小于(或大于)某一长度(或某一角度)，其测量值接近于某一定值即为此种钢丝的剪切模量理论值[2]。本文通过测定不同长度的钢丝下悬挂的圆环、不同扭转角度的振动周期，计算对应角度的剪切模量[3]，利用 origin 软件绘出钢丝剪切模量和扭转角度及摆长之间关系的一簇曲线分析研究钢丝的扭转角度与摆长对实验结果的影响[4] [5] [6]。本实验改进传统的实验装置，在扭摆的上部固定一个刻度盘，刻度盘上有 0°~720°的刻度，以便更好的把握扭转角度，同时总结出扭转角大于 300°时测出的数据更接近于理论值。

2. 实验原理

实验扭摆结构如图 1 所示，刚性圆环横向放置在抓手上的方式如图 2 所示。如果将刻度旋钮围绕中心轴旋转一定角度 ϕ_0 时，迅速将其再扭回原点，抓手就会受到钢丝弹性扭转力矩 M 的作用而作周期性振动，这就构成一个扭摆。

假设现有一个具有弹性的长方体体积元，如图 1。(1) 剪切力 设弹性固体的一个长方形体积元，顶(底)面积为 A ，它的顶面固定，在它底面上作用着一个与顶面平行而且均匀分布的切力 F (即剪切力)，在力 F 作用下，两个侧面将转过一定角度 α 为剪切角。在 α 较小情况下，作用在单位面积上的切力 F/A 与剪切角 α 成正比。(1)式中，

$$\frac{F}{A} = G\alpha \quad (1)$$

G 为剪切模量，表示材料抵抗剪切应变能力的常数，单位是 N/m²， G 值越大，说明该金属材料受到外力时的剪切角越小。(2) 扭转力矩 如图 2 所示，体积圆周所受的扭转力矩 dM 为

$dM = r\alpha G \cdot 2\pi r dr = 2\pi\alpha Gr^2 dr$ ，应力存在而产生的总力偶距 M 为 $M = \int_0^R 2\pi\alpha Gr^2 dr$ ，设圆柱体底部绕轴的转动角为 ϕ_0 ，而 $\alpha \ll 1^\circ$ ，弧长 $s \approx L\alpha$ ， $s = r\phi_0$ ，故有 $M = \int_0^R 2\pi\phi_0 \frac{r}{L} Gr^2 dr = \int_0^R 2\pi\phi_0 \frac{G}{L} r^3 dr = \frac{\pi GR^4}{2L} \phi_0$ ，圆柱体内的弹性力矩为 M_0 与外加力偶距 M 平衡时， $M = -M_0$ ，可推出 $M_0 = -\frac{\pi GR^4}{2L} \phi_0$ ，令 $D = \frac{\pi GR^4}{2L}$ ，

$$\text{则有: } M_0 = -D\phi_0 \quad (2)$$

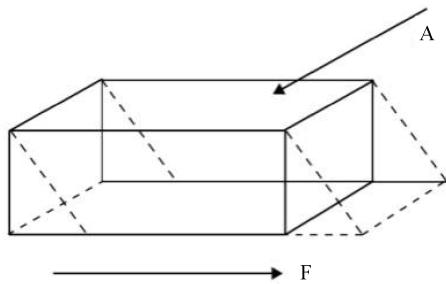


Figure 1. The schematic diagram of elastic solid
图 1. 弹性固体切变示意图

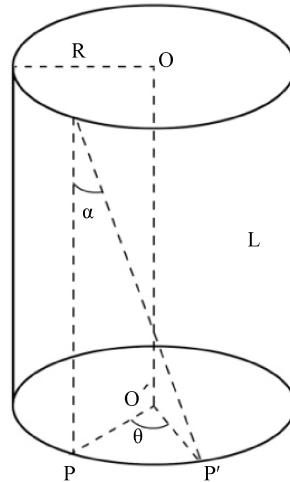


Figure 2. The figure that the experimental shear principle formula is deduced
图 2. 实验原理公式推导用图

(2)式中: D 为所测钢丝的扭转系数, 用 ϕ_0 表示钢丝在扭转振动中的角位移, 抓手及圆环整个实验设备对中心轴的转动惯量为 I_0 , 根据转动定律有 $\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\phi = 0$, 它的振动周期应是: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$ 得出:

$G = 8\pi \frac{LI_1}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}$, 测量出圆环水平放置在抓手上的扭转周期 T_1 和爪上无负载时的周期 T_0 , 根据转动惯量定理, 剪切模量的测量公式可写为:

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{4\pi L m}{R^4} \frac{r_1^2 + r_2^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (3)$$

3. 实验方法

3.1. 实验准备

如图 3 所示, 本实验通过自制角度盘测量钢丝的扭转角度, 角度刻盘制作过程如下: 在硬纸板上画半径大小不相等的两个同心圆; 将圆心角等分成均匀的 12 份, 每个角 30 度做出标记; 将两个同心圆分别裁剪下来, 取圆环部分, 制作成本实验所需的角度刻盘。实验前对仪器进行调试、预热, 并测量圆环

的厚度、内外直径，钢丝的直径、长度和不同扭转角度的周期、扭摆空载周期等相关参量。

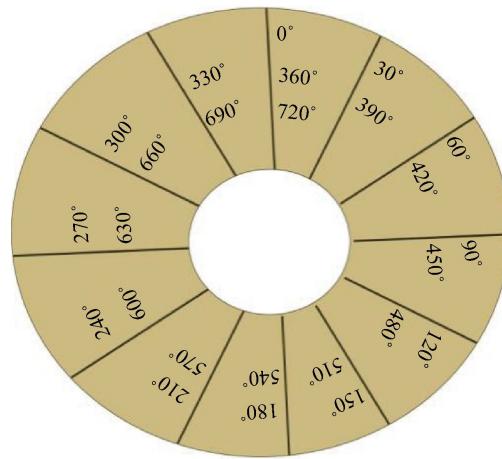


Figure 3. The appearance of the figure of the self-made angle plate

图3. 自制角度盘外观图

3.2. 实验过程

(1) 圆环质量(m/g): 测得质量平均值 $m = 551.41 \text{ g}$; (2) 圆环内径(d_1/cm): 测得内直径平均值 $\bar{d}_1 = 7.94 \text{ cm}$; (3) 圆环外径(d_2/cm): 测得外直径平均值 $\bar{d}_2 = 10.95 \text{ cm}$; (4) 圆环厚度(d_r/cm): 测得厚度平均值 $\bar{d}_r = 1.62 \text{ cm}$; (5) 钢丝直径($2R/\text{mm}$): 测得钢丝的直径平均值为 0.400 mm ; (6) 钢丝不同长度下, 扭转周期和剪切模量, 以钢丝扭转长度 $L = 40.0 \text{ cm}$ 时为例, 实验时, 逐渐增大扭转角度, 增大梯度为 30° 。记录抓手空载和横载时扭转 10 个周期所需时间, 计算出扭转周期的平均值, 记入表格中, 再利用公式计算出钢丝的剪切模量。将钢丝的扭转角度和所计算的剪切模量数据输入 origin 软件, 得到二者关系曲线如图 4 所示, 图 4 中横轴 θ 为钢丝的扭转角度, 纵轴 G 为剪切模量。

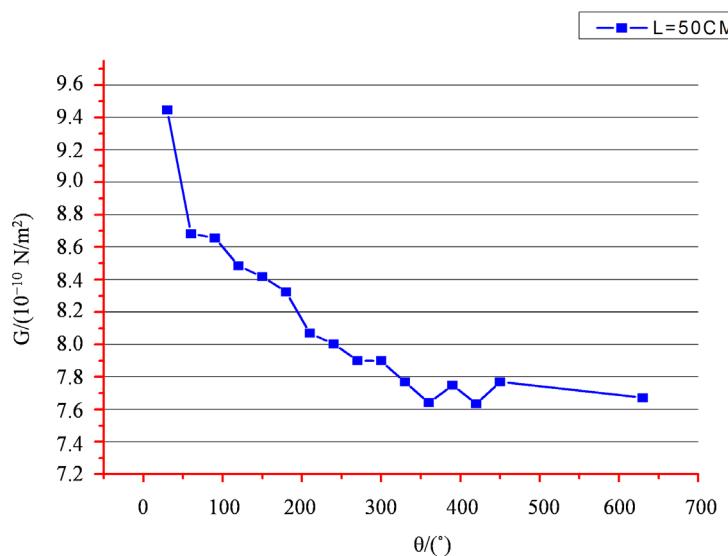


Figure 4. The figure of relationship between torsion angle and shear modulus when the torsion length is 50.0 cm

图 4. 扭摆长度为 50.0 cm 时，扭转角度与剪切模量关系图

从图4可看出，随着角度从 30° 逐渐变为 360° 过程中(变化梯度为 30°)，钢丝的剪切模量从大到小逐渐变化，最后趋于稳定的现象。用同样方法测量钢丝扭转长度 $L = 40.0\text{ cm}$ 、 60.0 cm 、 70.0 cm 、 80.0 cm 时，扭转角度对应的周期及剪切模量，通过绘图软件分析其变化趋势。

4. 实验结论

把不同扭转角度对应的切变模量趋势图绘制在同一坐标系中如图5(横轴 θ 为钢丝的扭转角度，纵轴 G 为剪切模量)：

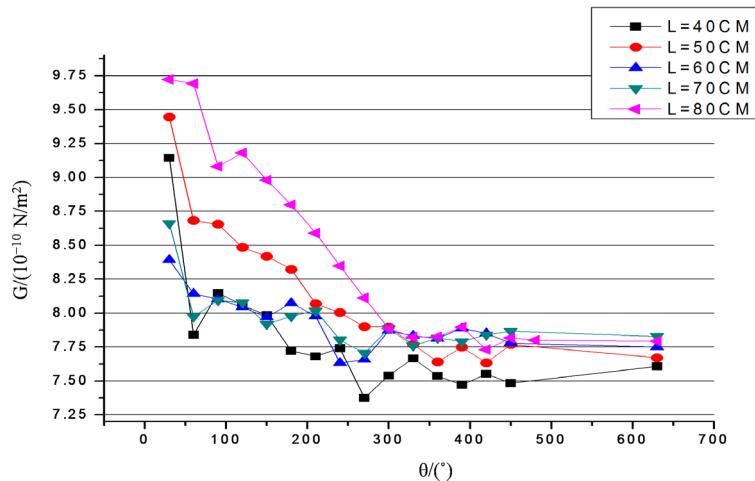


Figure 5. The figure of relationship between torsion angle and shear modulus of fine steel wire under different torsion length

图 5. 不同扭摆长度下细钢丝的扭转角度和切变模量之间关系图

由图5看出：随着钢丝扭转角度逐渐加大，所测得的剪切模量小角度时以较快的速度变小，当钢丝的扭转角逐渐增大并大于 300° 时，剪切模量的测量值在 $7.8 \times 10^{-10}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 上下波动，且随着钢丝的扭摆长度从小到大变化，剪切模量的变化范围逐渐变小；当扭摆长大于 60.0 cm ，小于 70.0 cm 时，小角度波动也不是很大，从 $0\sim360^\circ$ 度范围内基本在理论值附近波动。随着摆长增加，扭转角度必须增大，才能更接近理论值 $7.8 \times 10^{-10}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ ；摆长在 $60.0\text{ cm}\sim70.0\text{ cm}$ 时测得的剪切模量比较接近理论值 $7.8 \times 10^{-10}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

本实验结果表明，钢丝扭摆长度和扭转角度对实验结果有较大的影响，钢丝的扭转角度需大于 300° 、扭摆长度需大于 60.0 cm 且小于 80.0 cm ，才能得到较好的测量结果[7]。对确定长度的钢丝，其扭转角度由小变大时，较小角度测得的剪切模量比较大角度时的相应值下降的快，表1是不同摆长、不同剪切模量的转折角(注：由小角度下降较快到大角度在理论值 $7.8 \times 10^{-10}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 附近波动的转折角度称为“剪切模量转折角”)：

从表1可看出，摆长在 $60.0\text{ cm}\sim70.0\text{ cm}$ 之间的值更接近剪切模量的理论值，从而说明扭转角多大于 300° ，摆长 $60.0\text{ cm}\sim70.0\text{ cm}$ 之间能取得更好的实验效果。

5. 实验分析

本实验的系统误差包括量具本身的不准确和计时器的量化误差，如自制刻度盘、米尺、游标卡尺、千分尺、水准仪、多功能数字式计时器等。测量的随机误差是本实验的主要误差，相应的分析计算为：若用 δ 表示随机误差，即 $\delta_i = x_i - \bar{x}_0$ ，式中 x_i 表示测量值，本实验中为剪切模量的值 G_i ， \bar{x}_0 表示测量无限次平均值之差，这里可以用理论值 $G_0 = 7.8 \times 10^{-10}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 代替。以钢丝长度 $L = 50.0\text{ cm}$ ，扭转角度 300°

度~630 度多区间的剪切模量为例, 单位为(10^{-10} N·m $^{-2}$), 则其方差为: $\delta^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (G_i - G_0)^2 = 0.0120$, 方差 $\delta^2(x) = 0.0120$ 表示以钢丝长度 $L = 50.0$ cm、扭转角度 300 度~360 度区间的剪切模量随机误差的离散程度。剪切模量的标准差为: $\delta(x) = 0.1095$ 有限次(如 $N = 7$ 次)剪切模量算术平均值和标准差计算: $\bar{G} = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_N}{N} = 7.733$, 实验标准差为: $s(G) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left[(G_i - \bar{G})^2 \right]} = 0.094$, 算术平均值标准差的估算值为: $s(\bar{G}) = \frac{s(G)}{\sqrt{N}} = 0.0355$ 。钢丝其他长度误差计算可以用同样方法进行, 但误差离散程度须是比较小的, 在可接受范围内[8]。

Table 1. The turning angles when the pendulum lengths and shear modulus are different
表 1. 不同摆长、不同剪切模量时的转折角

序号	钢丝摆长 L/cm	剪切模量转折角 $\theta/(^\circ)$	剪切模量转折角后的平均值 $G/(10^{-10} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2})$	剪切模量理论值 $G/(10^{-10} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2})$
1	40.0	300	7.55	
2	50.0	300	7.73	
3	60.0	300	7.83	7.8
4	70.0	300	7.83	
5	80.0	300	7.84	

6. 结语

通过使用剪切模量和转动惯量实验, 测量不同扭转角度下、不同长度钢丝的扭转振动周期以研究扭转角和摆长对实验结果的影响。使用 origin 软件对测量数据进行分析, 最终得出钢丝扭转角大于 300° 时保证良好的实验测量精度。

课题名称

教育部高等学校大学物理课程教学研究立项项目(DJZW201934xn); 六盘水师范学院《热学》精品课(LPSSYjpkc201605); 六盘水师范学院大学生项目(LPSSYDXS19077); 六盘水师范学院硕士学位培育点学科建设项目(LPSSYSSDYPY201704); 关于混合式教学模式下的大学物理课程教学实践和应用(2018520116); 六盘水师范学院大学生项目(LPSSYDXS19078)。

参考文献

- [1] 漆安慎, 杜婵英. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 常帅, 王渊敏, 等. 钢丝的切变模量与扭转角度关系[J]. 物理实验, 2006(6): 45-47.
- [3] 阳丽, 等. 金属丝切变模量测量实验中扭转角度和摆长影响的研究[J]. 广西物理, 2011(3): 19-21.
- [4] 陈庆东, 巩晓阳. 大学物理实验教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.
- [5] 张燕, 高秉元. 误差理论在切变模量实验数据处理中应用[J]. 大学物理实验, 2020(1): 103-106.
- [6] 张燕, 刘杨. 扭摆实验中测量金属丝切变模量方法分析[J]. 运城学院学报, 2019(3): 16-19.
- [7] 郝晓辉, 梁伟华, 张庆荣. 普通物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [8] 原所佳. 物理实验教程[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2019.