Applied Physics 应用物理, 2024, 14(10), 655-662
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2024.1410070

对于电磁场中的高斯定理的探究

张颢涵，郭兴华*

南京市第一中学，江苏 南京

收稿日期：2024年8月27日；录用日期：2024年10月9日；发布日期：2024年10月16日

摘 要

本论文研究了高斯定理在电磁场中的应用，并探讨了其在解决实际问题中的有效性。通过对高斯定理在静电场和磁场中的应用进行详细分析，本文不仅介绍了传统的解题方法，还提出了改进建议，以提高计算精度和解决复杂问题的效率。通过对比不同应用场景的计算结果，本文得出了高斯定理在电磁场应用中的一些新的见解和改进方法，为进一步研究提供了参考。

关键词

电磁场，高斯定理，计算

The Investigation of Gauss's Theorem in the Electromagnetic Field

Haohan Zhang, Xinghua Guo*

Nanjing No. 1 Middle School, Nanjing Jiangsu

Received: Aug. 27th, 2024; accepted: Oct. 9th, 2024; published: Oct. 16th, 2024

Abstract

In this paper, we study the application of Gauss theorem in electromagnetic field and discuss its effectiveness in solving practical problems. Through the detailed analysis of the application of Gauss theorem in electrostatic field and magnetic field, this paper not only introduces the traditional method of solving problems, but also puts forward some suggestions to improve the accuracy of calculation and the efficiency of solving complex problems. By comparing the calculation results of different application scenarios, some new views and improved methods of Gauss theorem in electromagnetic field application are obtained in this paper, which provides a reference for further research.

*通讯作者。

文章引用: 张颢涵, 郭兴华. 对于电磁场中的高斯定理的探究[J]. 应用物理, 2024, 14(10): 655-662.
DOI: 10.12677/app.2024.1410070

Keywords

Electromagnetic Field, Gauss Theorem, Calculation

1. 引言

1839 年，德国著名的物理学家高斯在一篇名为《关于与距离的平方成反比的吸引力或排斥力的普遍定理》的文中提出了著名的高斯定理：真空中的静电场，通过任意闭合曲面的电通量，等于该闭合曲面所包围电荷电量代数和的 $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 倍。它的算术表达式对高斯定理提出了新的要求，从而使得之后麦克斯韦方程式以此为基础建立起来。其数学表达式为 $\phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left(\sum_{s内} q_i \right) \Big/ \varepsilon_0$，高斯定理把库仑定律提到了新的高度，使之成为后来麦克斯韦方程的基础之一。高斯定理是一个非常重要的物理定理，它描述了电场、磁场和引力场等几乎所有场的性质。这个定理在物理、工程、数学等多个领域都有着广泛的应用。本课题的研究目标是利用高斯定理去解决学习和生活上的问题，本课题着重介绍的是如何利用高斯定理去解决物理题。

2. 静电场中的高斯定理

高斯定理在很多物理题中都得到广泛的应用。比如，高斯定理可以应用于点电荷体系也可应用于电荷连续分布的电场。高斯定理在不同的电场体系下有不同的物理表达式，所以解题时必须要擦亮双眼，看清条件。

2.1. 静电场中高斯定理的数学表达式

真空中的高斯定理定义：真空中的静电场内，通过任意闭合曲面的电通量，等于该闭合曲面所包围电荷电量代数和的 $\frac{1}{\varepsilon}$ 倍[1] (ε 是真空的介电常数)所以我们可以得出在真空状态下高斯定理的数学表达式为

$$\varphi_E = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left(\sum_{s内} q_i \right) \Big/ \varepsilon_0 \tag{1}$$

现在有这样一种情况，如果在一空间中存在很多的电荷，那么我们如何利用高斯定理去计算电通量呢？根据高斯定理的定义，我们可以得到这个封闭曲面的电通量就是这一曲面内的所有的点电荷的电量比上 ε_0。点电荷体系下的高斯定理的数学表达式为

$$\varphi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \tag{2}$$

这里要特别关注的一点是电通量与点电荷的定量关系只限于包围在曲面内的点电荷，和曲面外的点电荷没有关系，这并不意味着曲面外的电荷对该曲面不产生电通量，而是它在曲面的某些地方电通量为正时，一定会在曲面的其它地方电通量为负，因为电通量是代数量，这个正负电通量相互抵消而为零。

但是要特别注意高斯面上任意一点的电场不仅是闭合曲面内的电荷所产生的，曲面外的电荷也会对它有影响，所以高斯面上电场是空间所有电荷产生的一个合电场强度，这个要区分开来并思考一下为什么会产生两种不同的结论。

在我们接触的题目中，不仅仅有点电荷体系下电通量的计算。还有电荷连续分布体系电场下电通量的计算，接下来我们给出电荷连续分布体系电场下高斯定理的数学表达式

$$\varphi_E = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint \rho dV \tag{3}$$

从电通量表达式可以看到，点电荷系是曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0，而连续分布的带电体就不能用点电荷来计算了，只能用电荷分布的密度积分来计算包围在闭合曲面内的总电荷量。

2.1.1. 单位

在 SI 制中，电通量的单位是伏特 • 米($V \cdot m$)。

电场强度的单位是伏特/米(V/m)或牛顿/库伦(N/C)。

2.1.2. 静电场中有关高斯定理习题的求解步骤

1) 对称性分析；
2) 根据对称性选择合适的高斯面；
3) 应用高斯定理计算。

2.2. 高斯面

在我们运用高斯定理求解物理习题时，会遇到很多的障碍，其中高斯面的确定就是一个非常关键的问题。我们分析一下高斯定理的数学表达式。

$$\phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left(\sum_{s内} q_i \right) \Big/ \varepsilon_0 \tag{4}$$

1) 这个符号 $\sum_{s内} q_i$ 的含义是在闭合曲面内所有的正负自由电荷的和，它表明只有在高斯面中的电荷才能产生穿过高斯面的然后对 E 通量产生贡献，而高斯面以外的电荷不能穿过高斯面对 E 通量产生贡献。也可以这样说，E 通量只是和高斯面内的点电荷有关，和高斯面外的点电荷是无关的[2]。

2) 高斯面上的总的 E 通量和高斯面内外电荷位置的改变是没有关系的。但是如果改变电荷位置，那么对高斯面上的场强是有影响的。

3) 高斯定理揭示了电场与场源电荷之间的关系，说明了静电场是有源场，“源”就是电荷，这是静电场的一个基本性质。事实上，从高斯定理的公式中我们可以看到，要用到高斯定律，最重要的就是公式左侧的积分是否能够乘得出，即便是满足了这个公式的对称性，但是如果公式左侧的积分不能乘得出，那么我们在高斯定理求解场强时，又何必强调对称性呢？这是因为，当电荷分布是对称的时，我们可以通过选取适当的高斯面，来简化方程左侧的积分。

所以说想要快速而准确的确定高斯面，就必须考虑电荷分布的对称性的问题。在我们所接触的习题中，最常见到的有三种对称的情况，分别为球对称性、轴对称型和面对称性。接下来我们逐个进行分析。

1) 电荷分布具有球对称性

特点：在相同的球面上，场强的大小在任何时候都是相同的，并且场强的方向沿半径的方向是球对称的。

2) 电荷分布具有轴对称性

特点：与轴线等距离处的圆柱侧表面上，场强的大小处处相等，并且场强方向垂直于轴线，并且具

有轴对称性分布的带电体包括了无限长均匀带电直线、无限长均匀带电柱体或圆柱面、无限长均匀带电同轴圆柱面等。

3) 电荷分布具有面对称性

特点：在与平面等距的地方，场强度大小处处都是相同的，并且场强方向与平面垂直，具有对称性分布的带电体包括：均匀带电无穷大平面或平板，若干个均匀带电无穷大平面[3]。

高斯面的选取规则

由从之前的讨论中，我们可以了解到，在高斯定理中，高斯面的选择可以选择有规律的或无规律的曲面，由于流经高斯面的通量都不会发生变化，所以我们可以得知流经高斯面的通量跟所选择的高斯面的形状没有任何关系，只跟高斯面中的电量有一定的关系，上述的结论表明，高斯面的选择是一种任意的选择。不过，当我们使用高斯定理来解决实际问题的时候，选择一个合适的高斯面可以让我们的计算更加简单。那么，什么样的封闭曲面才是合适的高斯面呢？在选择高斯曲面时，应当遵循如下原则：

1) 在选择的高斯面上的场强的大小和方向是有一定的要求的，场强的大小要处处相等，并且场强的方向必须和高斯面相互垂直。

2) 选择出的高斯曲面中，一部分满足以上要求，另一部分则是场强与其平行的平面。

2.3. 例题

例题一

在一个半径为 R 的球形空间内，均匀的分布着电荷，在已知电荷的体密度是 ρ 时，求解空间内各个点的场强。

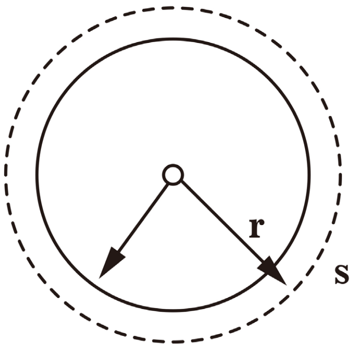

Figure 1. Ball shape(a)
图 1. 球形(a)

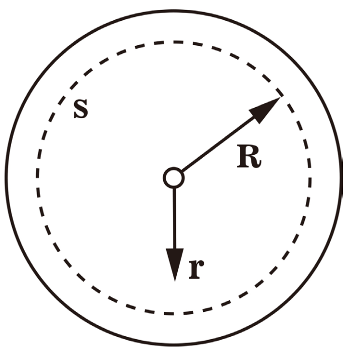

Figure 2. The spherical(b)
图 2. 球形(b)

解：先求球外空间任意一点 A 的电场强度，如果点 A 距离球心 O 为 $r(r>R)$ 则以 O 为中心，以 r 为半径作球形高斯面，如图 1 所示，对这个高斯面运用高斯定理，得

$$\oiint_S E\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi R^3\rho \tag{5}$$

根据对称性，该球面上各点的电场强度大小相等，方向都沿球面在该点的法线方向，所以上式可化为

$$E4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho \tag{6}$$

由此求得

$$E=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \tag{7}$$

现在求球内任意一点 B 的电场强度，如果点 B 距离球心 O 为 $r(r>R)$ 我们可以为 O 中心、以 r 为半径作球形高斯面，如图 2 所示，对这个高斯面运用高斯定理，得

$$\oiint_S E\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi r^3\rho \tag{8}$$

这个高斯面上的电场强度分布也满足球对称的特点，上式可化为

$$E4\pi r^2=\frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0} \tag{9}$$

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \tag{10}$$

例题二

假设有一个面密度为 δ 的任意的带电导体处于静电平衡状态，那么这个导体表面附近的某点的场强是多少呢？

解：根据图我们可以看出这个导体的形状是不规则的，而且电荷也不是均匀分布，所以说场强具有不对称性，但是这是一个静电平衡的状态，那么我们如果找到一个合适的高斯面，仍然可以求解出场强。

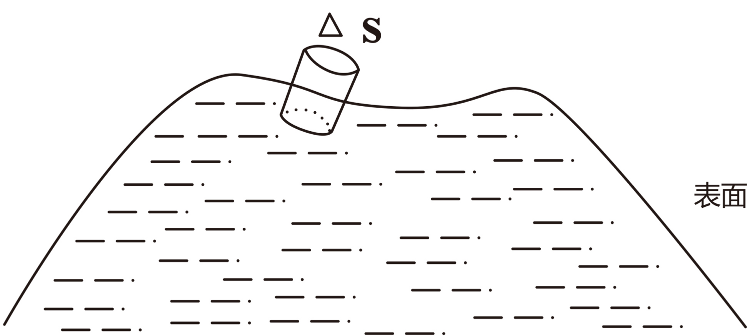

Figure 3. Irregular conductor
图 3. 不规则导电体

我们在导体表面上取一个足够小的面元 ΔS 并作如图 3 所示的高斯圆柱面，且使圆柱侧面与 ΔS 垂直，下底在导体内。由于 ΔS 足够小，可认为其上的面电荷密度 δ 是均匀的。于是根据高斯定理有：

$$\phi_e = \oiint_s E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E \cdot \mathrm{d}S\cos\theta \tag{11}$$

$$= \iint_{\text{上底}} E\mathrm{d}S\cos\theta + \iint_{\text{下底}} E\mathrm{d}S\cos\theta + \iint_{\text{侧面}} E\mathrm{d}S\cos\theta$$
$$= \iint_{\text{上底}} E\mathrm{d}S\cos\theta = E\Delta S = \delta\Delta S/\varepsilon_0 \tag{12}$$
$$E = \delta/\varepsilon_0$$

3. 磁场中的高斯定理

在学习电磁学中的静电场之后，还需掌握另一个新领域——磁场。要想深入学习此课程，对其有充分了解至关重要。磁感应强度是一项重要物理量，描述了通电导线受力后所产生的磁场。在电磁学中，我们对通电导线的电流分布进行了详细研究，并计算出任意点处通电导线激发的磁感应强度。常用于计算磁感应强度的方法主要包括三种：叠加法、高斯定理法和挖补法。本文将着重讨论高斯定理法。

3.1. 磁场中高斯定理的表达式

3.1.1. 磁通量

为了研究磁场的性质，仿照电场的情况，引入磁通量的概念。通过磁场中面元 dS 的磁感应通量(即磁通量)；我们采用类比的方法去研究磁场的性质，和电场相比较，我们也引入一个概念“磁通量”。磁通量穿过了磁场中面元 dS，我们将它定义为：[4]

$$d\phi_B = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = B\mathrm{d}S\cos\theta \tag{13}$$

这个表达式所体现的就是通过面元 dS 的磁感应线的数量，在任意一个曲面 S 上，通过这个曲面的磁感应通量是。

$$\phi_B = \iint_s \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{14}$$

我们可以按照静电场中高斯定理的知识去类比磁场中的高斯定理，在静电场中，电通量就像电力线一样，是有条数的，同理，磁通量也是有条数的，就可以理解成为磁感应线的条数。所以说，磁感应强度 B 就可以理解为有 n 条磁感应线穿过了单位垂直面积的高斯面，就是磁感应线的数密度。根据这个情况，我们可以想到，在磁感应线越密集的地方磁感应强度越大，反之越小。

3.1.2. 磁场中高斯定理的表达形式

我们知道磁力线是闭合的曲面，它有这样的一个特征，那就是磁力线无头无尾。那么这样的特征就造成了一个后果，这个后果就是无论是什么样的曲面，不管有多少条磁力线进入这个曲面，就会有一样条数的磁力线穿出曲目。所以说穿过任意的闭合曲面的磁通量恒为零，表达式为

$$\phi_B = \oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{15}$$

磁场的高斯定理是一个非常重要的基本定理，它说明了磁场与静电场的性质不同，因为稳恒磁场是一个无源场[5]。

3.1.3. 单位

磁通量的单位为：韦伯(wb)。

3.2. 磁场中有关高斯定理的例题

例题一

一对同轴无穷长直的空心导体圆筒(见图 4)，内、外半径分别为 R_1 和 R_2 (筒壁厚度可忽略)。电流 I 沿内筒流去，沿外筒流回。

通过长度为 L 的一段截面的磁通量 ϕ 。

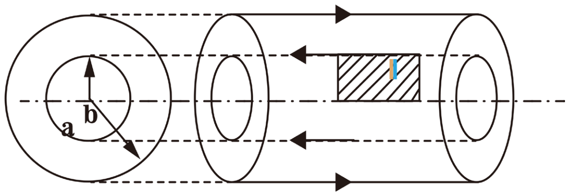

Figure 4. Hollow conductor circular tube
图 4. 空心导体圆通

解：

通过长度为 L 的一段截面的磁通量

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{Ldr}{r} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{16}$$

例题二

矩形截面的螺绕环，尺寸如图 5 所示。

证明通过螺绕环截面的磁通量为 $\phi = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}$ 。

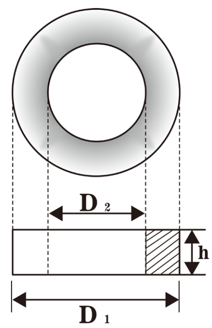

Figure 5. Torus
图 5. 螺绕环

解：

通过螺绕环截面的磁通量

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{hdr}}{\mathrm{r}} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2} \tag{17}$$

4. 研究结论与展望

4.1. 主要结论

总结了高斯定理在电磁场中的应用现状及其改进方法，提出了在实际问题中应用高斯定理的有效策

略。

4.2. 未来研究方向

进一步研究高斯定理在非均匀电磁场中的应用，探索新的计算方法和理论改进，以提高电磁场问题解决的效率和精度。

参考文献

[1] 谢处方, 饶克谨. 电磁场与电磁波[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[3] 赵凯华, 罗军, 陈熙谋. 新概念物理题解上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[4] 梁灿彬, 秦光戍, 梁竹健. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[5] 芦晶, 马文玲. 补偿法在电磁学教学中的应用[J]. 技术物理学, 2005(2): 14-15.