Applied Physics 应用物理, 2024, 14(11), 746-752
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2024.1411080

基于相空间的简谐振动运动学分析

钱含章

江苏省锡山高级中学，江苏 无锡

收稿日期：2024年10月12日；录用日期：2024年11月20日；发布日期：2024年11月29日

摘　要

本文采用相空间方法对能量表象下的自由度为2r的简谐振动进行运动学分析，提出了一种判别简谐振动的充分必要条件。该条件能够在不求解复杂动力学方程的情况下，简明直接地确定振动系统的圆频率、周期、振幅、运动方程及能量等关键参数。进一步，针对常见的自由度为1的简谐振动，给出了该条件在特殊情况下的相关主要结论。通过三个实例的计算与分析，展示了相空间方法在简谐振动运动学研究中的简洁性和实际应用价值。

关键词

简谐振动，相空间，能量表象，运动学分析

Phase Space Approach for Kinematic Analysis of Simple Harmonic Motion

Hanzhang Qian

Jiangsu Xishan Senior High School, Wuxi Jiangsu

Received: Oct. 12th, 2024; accepted: Nov. 20th, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

In this paper, a phase space approach is employed to conduct kinematic analysis of harmonic oscillations with 2r degrees of freedom in the energy representation. A necessary and sufficient condition for identifying harmonic oscillations is proposed. This condition enables the direct and concise determination of key parameters such as the angular frequency, period, amplitude, equation of motion, and energy of the oscillatory system, without the need to solve complex dynamic equations. Furthermore, for the commonly studied case of harmonic oscillation with one degree of freedom, the main conclusions of this condition in the special case are provided. Through the calculation and analysis of three examples, the simplicity and practical application value of the phase space approach

文章引用：钱含章. 基于相空间的简谐振动运动学分析[J]. 应用物理, 2024, 14(11): 746-752.
DOI: 10.12677/app.2024.1411080

in the kinematic study of harmonic oscillations are demonstrated.

Keywords

Simple Harmonic Motion, Phase Space, Energy Representation, Kinematic Analysis

1. 引言

振动现象是自然界中最常见的运动形式之一。它普遍存在于机械系统、电气工程、生物医学以及其它许多相关领域。其中，简谐振动作为一种理想化的模型，以其周期性和可预测性而受到广泛关注。简谐振动的运动学分析对于理解系统的动态行为、预测系统的长期稳定性和设计振动控制策略具有重要意义。

目前，对简谐振动的运动学分析主要有两类方法。在理论分析时常采用传统的解析方法，通过求解微分方程[1] [2]来获得振动的位移、速度和振幅等参数，并以此为基础讨论更为复杂的简谐振动模型。由于保守系统的简谐振动机械能守恒，因此利用机械能守恒定律[3]可以较牛顿第二定律更为方便地建立简谐振动动力学模型，进而通过求解微分方程，获得简谐振动的运动方程及相关参数。

在工程技术领域，研究者则常常采用数值方法[4]。中采用欧拉方法，将弹簧振子简谐振动方程离散化为差分方程，进而求解计算运动参数。若引入龙格－库塔方法[5]，则可以进一步提升计算的精度。有限元分析[6]，也是模拟求解复杂振动问题的重要工具之一。数值方法的优势在于可以通过计算机编程高效地进行计算，同时，借助仿真软件[7]还可以实现振动问题的可视化研究。此外，还有一些研究[8] [9]聚焦于利用现代信号处理技术，如傅里叶变换，来分析振动信号的频域特性等。

尽管传统的解析方法对于简谐振动的分析已非常成熟，但其分析必须通过求解一个刻画动力学过程的常微分方程。这对于非专业人员来说难以掌握，而选择数值方法又会损失精度。针对这一不足，本文提出了一种基于相空间的方法来研究简谐振动的运动学分析。

在物理学中，相空间是一个非常重要的概念，它被广泛应用于研究动力系统、统计力学和量子力学中。这种方法不仅简化了计算过程，而且使得振动的物理意义更加明确，为简谐振动的分析提供了一种新的视角和工具。

2. 能量表象下的简谐振动

2.1. 振动与相空间

在力的表象下，振动通常用来描述一个物体或系统围绕其平衡位置进行的周期性运动。针对刻画物体或系统动力学过程的微分方程模型，通常采用解析方法或数值方法进行运动学分析。

在能量概念建立后，人们发现在能量表象下描述和分析物体的动力学过程会更为简洁。在守恒律下构建的物理过程呈现出明显的对称性。

在能量表象下仔细分析单摆振动和弹簧振子的振动，不难发现，在这些振动过程中总是存在着两种形式的能量，而且这两种形式的能量在进行着周期性地转换。如单摆振动中，重力势能和动能在进行周期性地转换；弹簧振子的振动中动能和弹性势能在进行周期性地转换。因此，在能量表象下，所谓振动

是两种能量的周期转换。

换言之，振动系统在运动过程中，存在两种形式的能量进行周期性地转换。显然，这种论述可以涵盖所有类型的振动。例如在电磁振荡中，电场能和磁场能进行周期性地转换；对于分子热振动，分子势能和分子动能在进行周期性地转换。

为了能更为高效、简单地讨论能量表象下的振动，引入相空间。

设系统的自由度为 r，则系统在任一时刻的运动状态由系统的 r 个广义坐标 $\mathbf{q}=\left[q_1,q_2,\cdots,q_r\right]^T$ 和与之共轭的 r 个广义动量 $\mathbf{p}=\left[p_1,p_2,\cdots,p_r\right]^T$ 在该时刻的数值确定。系统的能量是其广义坐标和广义动量的函数：

$$E=E\left(\mathbf{q}^T,\mathbf{p}^T\right)$$

为了形象地描述系统的运动状态，我们用 $q_1,q_2,\cdots,q_r;p_1,p_2,\cdots,p_r$ 共 $2r$ 个变量支承起一坐标系，构成一个 $2r$ 维的空间，称为相空间。系统在某一时刻的状态 $\left(q_1,q_2,\cdots,q_r;p_1,p_2,\cdots,p_r\right)$ 可以用相空间中的一点表示，称为相点。当运动状态随着时间推移时，相点相应地在相空间中移动而描画出一条轨道，称之为相轨。

2.2. 保守系统的简谐振动

如前所述，在能量表象下导致系统振动的原因是系统运动过程中存在两种形式的能量进行周期性转换。若在转换过程中，能量无损失，即系统能量守恒，则振动将持续进行下去，这便是简谐振动。于是，我们容易得出简谐振动在能量表象下的定义表述。

定义 1 振动系统在运动过程中总能量守恒，则系统作简谐振动。

亦即，振动系统在运动过程中存在两种形式的能量进行周期性地转换，且转换中系统的总能量守恒。

为了明确起见，我们考虑保守系统。对于保守系统，简谐振动过程中周期性转换的两种能量，可以分别理解为广义上的势能和动能。

由分析力学，我们可以分别给出它们的表达式。对于广义势能 $V\left(\mathbf{q}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{r}c_\alpha q_\alpha^2=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T C\mathbf{q}$，式中系数 $c_\alpha=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha^2}\right|_{q_\alpha=0}$ 是常数，称为恢复系数，$\mathbf{q}=\left[q_1,q_2,\cdots,q_r\right]^T$，$\mathbf{C}=\mathrm{diag}\left(c_1,c_2,\cdots,c_r\right)$。对于广义动能 $T\left(\dot{\mathbf{q}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{r}a_\alpha\dot{q}_\alpha^2=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T A\dot{\mathbf{q}}$，式中系数 a_α 可视为是不变的，称为惯性系数，$\dot{\mathbf{q}}=\left[\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_r\right]^T$，$\mathbf{A}=\mathrm{diag}\left(a_1,a_2,\cdots,a_r\right)$。此处，$\dot{q}_\alpha$，$\dot{\mathbf{q}}$ 均表示广义坐标对时间 t 的导数。

因而，在保守系统中若系统作简谐振动，则系统在运动过程中存在广义势能与广义动能两种形式的能量进行周期性转换，且转换中系统的总能量守恒(即 $T+V=E$)。

3. 简谐振动的相空间分析

下面，我们在 $2r$ 维相空间中讨论能量表象下 r 个自由度的简谐振动。

定理 1 一个保守系统，若在 $2r$ 维相空间中的相轨为超椭球面，则该系统作简谐振动。

证明：首先，对定理的必要性进行证明。

如前所述，易知若系统作简谐振动，则系统总能量守恒，即广义势能与广义动能之和不变。

由于 $T+V=E$，而 $T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}$，$V=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q}$，于是

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q}=E\text{。}\tag{1}$$

考虑到广义动量 $\mathbf{p}=\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}$ 则(1)式可化为

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q}=E\text{。} \tag{2}$$

令 $\mathbf{z}=[\mathbf{p},\mathbf{q}]^T$， $\mathbf{Q}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2E}\mathbf{A}^{-1},\frac{1}{2E}\mathbf{C}\right)$，则整理(2)式可得

$$\mathbf{z}^T\mathbf{Q}\,\mathbf{z}=1\text{。} \tag{3}$$

定理的必要性得证。

其次，对定理作出充分性的证明。

由定理条件，可设相轨的超椭球面为

$$\mathbf{z}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}=1\text{，} \tag{4}$$

其中， $\mathbf{z}=[\mathbf{p},\mathbf{q}]^T$， $\mathbf{P}=\mathrm{diag}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B},\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)$，对角阵 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 均正定。

将超椭球面方程整理，可得

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}\right)^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}+\left(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}\right)^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}=1\text{。} \tag{5}$$

考虑到广义动量 $\mathbf{p}=\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}$，代入(5)式，得

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}\right)^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}+\left(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}\right)^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}=1\text{。} \tag{6}$$

将(6)式两边对时间 t 求导，并令

$$\mathbf{\Omega}_0^T\mathbf{\Omega}_0=\mathbf{B}^T\mathbf{B}\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\text{，} \tag{7}$$

其中，对角阵 $\mathbf{\Omega}_0=\mathrm{diag}\left(\omega_{01},\omega_{02},\cdots,\omega_{0r}\right)$ 正定，整理后可得

$$\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Omega}_0^T\mathbf{\Omega}_0\mathbf{q}=\mathbf{0}\text{，} \tag{8}$$

定理的充分性得证。

在定理 1 的推证中，通过比较(3)式和(4)式，可得

$$\frac{1}{2E}\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\text{，}\quad\frac{1}{2E}\mathbf{C}=\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)^{-1}\text{，} \tag{9}$$

化简计算后，可得

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{C}=\frac{1}{2}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\text{，} \tag{10}$$

$$\mathbf{\Omega}_0^T\mathbf{\Omega}_0=\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\text{。} \tag{11}$$

其中 $\mathbf{H}=\mathrm{diag}\left(E_1,E_2,\cdots,E_r\right)$ 表示 r 维单位矩阵。

由此，可以获得 r 个自由度的保守系统简谐振动时的圆频率、周期和系统能量表达式。

$$\mathbf{\Omega}_0=\left(\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\text{，} \tag{12}$$

$$\mathbf{T}=2\pi\mathbf{\Omega}_0^{-1}=2\pi\left(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\text{，} \tag{13}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0^T\mathbf{\Omega}_0\mathbf{A}\mathbf{D}^T\mathbf{D}\text{。} \tag{14}$$

于是，系统能量表达式为

$$E=\sum_{\alpha=1}^{r}E_r=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{r}\omega_{0\alpha}^2 a_\alpha d_\alpha^2\ 。\tag{15}$$

进一步，引入参数向量 $\cos\varphi=\left[\cos\varphi_1,\cos\varphi_2,\cdots,\cos\varphi_r\right]^T$， $\sin\varphi=\left[\sin\varphi_1,\sin\varphi_2,\cdots,\sin\varphi_r\right]^T$ 。

可知

$$\begin{cases}\mathbf{q}=\mathbf{D}\cos\varphi\\ \mathbf{p}=\mathbf{B}\sin\varphi\end{cases}。\tag{16}$$

针对满足超椭球面相轨方程(5)。

令 $\cos\varphi=\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)=\left[\cos\left(\omega_{01}t+\theta_1\right),\cos\left(\omega_{02}t+\theta_2\right),\cdots,\cos\left(\omega_{0r}t+\theta_r\right)\right]^T$，则

$$\mathbf{q}=\mathbf{D}\cos\left(\omega_0 t+\theta\right),\tag{17}$$

式中 $\mathbf{D}$ 为振动系统的振幅矩阵。此式即为 r 个自由度的保守系统简谐振动在某一时刻的运动学方程。

定理 1 刻画了简谐振动在 $2r$ 维相空间中的相轨，并以此获得了保守系统简谐振动的圆频率、周期、系统能量以及系统运动学方程。进一步，我们不难获得其在二维相空间中的相关结论。

推论 1 一个保守系统，若在二维相空间中的相轨为椭圆，则该系统作简谐振动。

证明：证明过程与定理 1 的证明类似，此处略。

由推论 1 可知，若二维相空间中椭圆相轨为 $\frac{q^2}{d^2}+\frac{p^2}{b^2}=1$，则该系统作动力学方程为 $\ddot{q}+\omega_0^2 q=0$ 的简谐振动。由(9)可知其中 $d^2=\frac{2E}{c}$， $b^2=2aE$， $\omega_0^2=\frac{c}{a}$ 。

于是，自由度为 1 的简谐振动系统的圆频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{c}{a}}\ 。\tag{18}$$

因此，简谐振动系统的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}},\tag{19}$$

即简谐振动系统的周期与惯性系数的平方根成正比，与恢复系数的平方根成反比。

此时，系统的能量，由(15)可知

$$E=\frac{1}{2}cd^2=\frac{1}{2}a\omega_0^2 d^2\ 。\tag{20}$$

由(17)可得自由度为 1 的保守系统简谐振动的运动方程

$$q=d\cos\left(\omega_0 t+\theta\right),\tag{21}$$

式中 d 即为振动系统的振幅。

不难看出，在相空间中对能量表象下的简谐振动进行讨论，无须求解复杂的微分方程，即可方便地使用初等方法获得简谐振动系统的周期、振幅、能量以及运动方程等。

4. 实例分析

以下，我们引用上述方法及结论，来求解分析一些简谐振动的实例。

4.1. 弹簧振子

设光滑平面上振动的弹簧振子的振子质量为 m，弹簧的劲度系数为 k 。某时刻离开平衡位置的位移

为 x。则系统的总能量为

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}。\tag{22}$$

将(22)式化为 $\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kx^2=E$ (常量)。此式表明，无论能量大小，相归轨总是椭圆，即弹簧振子作严格的简谐振动。

所以，恢复系数 $c=\left.\frac{\partial^2 V_{弹}}{\partial x^2}\right|_{x=0}=k$；此时，惯性系数 a 即为振子的质量为 m。

因此，弹簧振子的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}。$$

进一步可知，弹簧振子的振动方程为 $x=A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)$，系统能量为 $E=\frac{1}{2}kA^2$。

4.2. *LC* 电磁振荡

在 LC 电磁振荡电路中，电容器中贮存的电场能为 $E_C=\frac{1}{2}CU^2$，线圈中的磁场能为 $E_L=\frac{1}{2}LI^2$，其中 U 为电容器两极板间的电压，I 为线圈中的电流。则系统的总能量为

$$E=\frac{1}{2}CU^2+\frac{1}{2}LI^2=\text{常量}。\tag{23}$$

由于 $U=\frac{Q}{C}$，$I=\dot{Q}$，则(23)式可化为 $E=\frac{1}{2c}Q^2+\frac{1}{2}L\dot{Q}^2$。此式表明，系统相轨为椭圆，即当电场能和磁场能在转换过程中无损耗时，电磁振荡为简谐振动。

这里，广义势能 $V=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}$，广义动能为 $T=\frac{1}{2}L\dot{Q}^2$，所以，恢复系数 $c=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}\right|_{Q=0}=\frac{1}{C}$，此时，惯性系数 a 即为线圈的电感 L。

因此，LC 电磁振荡的周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}=2\pi\sqrt{LC}。$$

电磁振荡的运动方程为 $Q=Q_m\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)$，系统能量为 $E=\frac{1}{2C}Q_m^2$。

4.3. 复摆

复摆的重力势能为 $V_{重}=mgr_c\left(1-\cos\theta\right)\approx\frac{1}{2}mgr_c\theta^2$ (小摆幅近似)，式中 r_c 为悬点 o 到质心 C 的距离。系统的总能量

$$E=\frac{1}{2}mr_c{}^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgr_c\theta^2=\text{常量}。\tag{24}$$

由(24)式可知，复摆系统相轨为椭圆，即复摆在小摆幅时的振动为简谐振动。

这里，恢复系数 $c=\left.\frac{\mathrm{d}^2 V_{(\theta)}}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0}=mgr_c$，此时，惯性系数 a 即为复摆的转动惯量 I。

因此，复摆的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_c}}\ 。$$

复摆的振动方程为$\theta = A\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$，系统能量为$E = \frac{1}{2}mgr_c A^2$。

5. 结论

本文通过引入$2r$维相空间，获得了能量表象下自由度为r的简谐振动的一个充分必要判据。该结论可以在能量表象下以初等方式直接确定系统简谐振动的圆频率、周期、振幅、运动方程及系统能量等参数，而不必去求解复杂的描述动力学过程的微分方程。进一步，通过讨论 2 维相空间情形下的判据，获得了自由度为 1 的简谐振动运动学相关参数。不难看出，相空间方法能够为能量表象下简谐振动的运动学分析提供一个简单且有效的工具，并且可以拓宽简谐振动分析的适用性。最后，通过三个实例的分析计算展示了该方法对于简谐振动运动学分析的高效性和可操作性，为工程应用中简谐振动相关问题的分析提供了一种实用的解决方案。

参考文献

[1] 于洪杰. 简谐振动的运动方程推导及应用[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2022, 40(3): 168-170.

[2] 马仕彪. 简谐运动的证明与周期推导[J]. 教学考试, 2023(49): 23-28.

[3] 干恒. 巧用能量求简谐振动的周期——以一道竞赛复赛试题为例[J]. 物理教学, 2018, 40(3): 59-60+55.

[4] 秦于越, 邓子辰, 胡伟鹏. 谐振子的辛欧拉分析方法[J]. 动力学与控制学报, 2014, 12(1): 9-12.

[5] Biswas, A. and Ketcheson, D.I. (2023) Multiple-Relaxation Runge Kutta Methods for Conservative Dynamical Systems. *Journal of Scientific Computing*, **97**, Article No. 4. https://doi.org/10.1007/s10915-023-02312-4

[6] 董政, 蔡爽, 徐利梅, 黄大贵. 二自由度两弹簧系统振动实验设计与分析[J]. 电子科技大学学报, 2006(4): 550-553.

[7] 高彩云. 简谐振动的仿真与分析[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2023, 39(3): 18-22+35.

[8] 司召鹏, 毛邦宁, 卜泽华, 等. 基于快速傅里叶变换的分布式振动传感信号解调分析[J]. 中国激光, 2023, 50(5): 108-114.

[9] 王志永, 杜伟涛, 王习文, 陈杨. 基于振动信号频域分析法的铣齿机故障诊断[J]. 制造技术与机床, 2018(3): 114-121.