

# 基于最小二乘的多维力/力矩传感器线性解耦算法研究

李荟霖, 康雨, 赵保华, 庞广林\*

比亚迪汽车工业有限公司, 广东 深圳

收稿日期: 2024年5月17日; 录用日期: 2024年6月20日; 发布日期: 2024年6月29日

## 摘要

在六维力传感器线性解耦基本原理的基础上, 依据拟合误差和耦合误差评价指标对比分析了标定矩阵求逆算法、灵敏度系数矩阵算法、最小二乘线性拟合算法。以某品牌车型电机悬置装置为例, 对其标定数据进行数据预处理、悬置多维力解耦以及误差分析。结果表明: 最小二乘线性拟合的解耦算法具有更好的适用性。

## 关键词

耦合误差, 最小二乘, 多维力解耦

## Study of Linear Decomposition Algorithms for Multidimensional Force/Torque Sensors Based on Least Squares

Huilin Li, Yu Kang, Baohua Zhao, Guanglin Pang\*

BYD Automobile Industry Company Limited, Shenzhen Guangdong

Received: May 17<sup>th</sup>, 2024; accepted: Jun. 20<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 29<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Based on the basic principles of linear decomposition of six-dimensional sensors, the marked matrix regression algorithm, the sensitivity coefficient matrix algorithm, and the least squared linear decomposition algorithm are analyzed on the basis of the comparison of matching error and

\*通讯作者。

文章引用: 李荟霖, 康雨, 赵保华, 庞广林. 基于最小二乘的多维力/力矩传感器线性解耦算法研究[J]. 应用物理, 2024, 14(6): 452-461. DOI: 10.12677/app.2024.146050

matching error evaluation indicators. For example, a branded motor suspension device, its calibration data is pre-processed, the suspension is decomposed, and the error is analyzed. The results show that the least squared linear matching decomposition algorithm is more applicable.

## Keywords

Coupling Error, Minimum Multiplication, Decomposition of Forces

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 前言

由于传感器的结构本身引入的耦合、传感器材质不均匀、机械加工误差、应变片横向效应、贴片误差等方面的原因[1],使得某一维度作用到传感器上力/力矩几乎都会对其他维度的输出电压产生影响,也就是维间耦合[2]。对于多维力传感器而言,维间耦合是限制传感器精度的最大障碍。

在实际的解耦过程中存在两种思路,一方面是从结构设计、机械制造工艺等入手,从根源消除耦合。但是在结构层面上的解耦和设计并不实用,普遍且实用的方法是采用对各种载荷均敏感的弹性体结构,待采集到数据之后再采用数学方法对数据进行解耦。多维力/力矩传感器的解耦是通过数学的方法以尽可能小的误差将传感器的输入与输出的关系唯一的确定出来。采用数学方法解耦不仅灵活性强,便于修改,成本低,而且比硬件解耦有更优的性能。

本文针对某品牌汽车电机悬置装置的标定数据展开解耦分析,结构文章先对六维传感器解耦基本原理进行介绍,接着介绍此次研究中使用的三种解耦方法和评价标准。第二部分是使用三种不同的方法对数据的结果进行分析讨论。

## 2. 解耦算法

### 2.1. 原理介绍

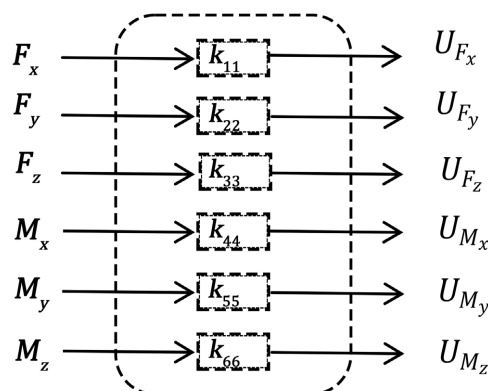


Figure 1. Input-output model of an ideal six-dimensional force sensor

图 1. 理想状态下(无耦合)六维力传感器输入输出模型

以六维力传感器为例,任何输入的作用力都能够分解为该坐标系中的三个力分量  $F_x$ 、 $F_y$ 、 $F_z$  和三个

力矩分量  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$ 。六维力/力矩向量  $(F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)^T$  表示任何一个输入作用力，与之对应的六路电压输出用  $(U_{F_x}, U_{F_y}, U_{F_z}, U_{M_x}, U_{M_y}, U_{M_z})^T$  来表示。理想的六维力传感器输入与输出关系应当如图 1 所示：

在实际中，六维力传感器存在较大的维间耦合。为了建立这种耦合误差模型，先进行两个假定[3]：每个维度的输入与该输入产生的耦合电压输出之间呈线性关系；某一维的输出电压为该维度的力/力矩产生的电压和其他维度的力/力矩在此维度上产生的耦合电压的叠加[4]。因此，耦合时六维力/力矩传感器的输入输出模型可以表示成图 2。

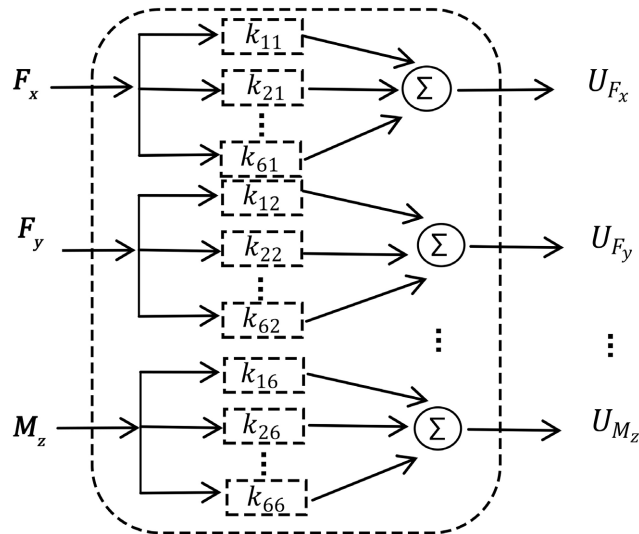


Figure 2. Coupled six-dimensional force/torque sensor  
图 2. 有耦合的六维力/力矩传感器输入输出模型

### 2.2. 标定矩阵求逆算法

最简单常用的解耦算法是基于最小二乘的标定矩阵求逆算法[5]。该方法先利用最小二乘法将标定数据进行拟合，再将拟合的直线斜率组成标定矩阵，求解标定矩阵的逆矩阵以实现多维力的解耦[6]。基于最小二乘的标定矩阵求逆算法满足如下数学模型：

$$F = G \cdot U \tag{1-1}$$

其中， $F = (F_1, \dots, F_j, \dots, F_n)$ ， $U = (U_1, \dots, U_j, \dots, U_n)$ ， $F_j$  和  $U_j$  为第  $j$  次加载时的力向量及其对应的传感器输出电压信号。 $G$  为标定矩阵。当矩阵  $U$  列满秩时， $U = U^T (UU^T)^{-1}$ ，则由式(1-1)可得到标定矩阵  $G$  的解，即：

$$G = FU^T (UU^T)^{-1} \tag{1-2}$$

标定矩阵求逆算法虽然运算简单，但是在求解矩阵逆的时候容易产生病态矩阵，影响解耦精度[7]。

### 2.3. 灵敏度系数矩阵算法

灵敏度系数矩阵法先应用最小二乘法将每个方向上施加的载荷同其对应的各方向上应变分别进行拟合，得到对应的拟合系数。[8]将各拟合系数汇总得到灵敏度系数矩阵。假设每个载荷与其他载荷是正交的，则可以确立每个载荷与其载荷状态的依从关系。假设第  $n$  次应变  $U_{n \times 1}$  和第  $p$  次施加力  $F_{p \times 1}$  之间为线性弹性关系：

$$U_{n \times 1} = A_{n \times p} F_{p \times 1} \quad (1-3)$$

其中  $A_{n \times p}$  称为灵敏度系数矩阵, 通过式(1-3)可以得到:

$$F = (A^T A)^{-1} A^T U \quad (1-4)$$

对传感器的解耦过程即是求出灵敏度系数矩阵, 进而可以确定传感器输入与输出关系, 进一步确定各个方向上的载荷  $F$ 。

## 2.4. 最小二乘线性拟合算法

前面两种方法均在最小二乘线性拟合的基础上进行了矩阵求逆运算, 这对矩阵提出了很高的要求。从前节中已知某个方向上的应变输出是该方向的力/力矩的主体部分, 每一个方向的力/力矩均由其他方向的应变共同决定[9]。因此, 考虑常数项的最小二乘线性拟合将每一个方向上的力/力矩看作所有方向上的应变线性叠加的结果。即把每一个方向上的力或力矩视为一个多元的一阶函数[10]。

$$F = G \cdot U + K \quad (1-5)$$

其中  $G$  系数矩阵,  $U$  为应变计的输出值,  $K$  为截距向量。对六维力/力矩传感器的解耦过程即是求出系数矩阵  $G$  和截距向量  $K$  的过程。

## 2.5. 算法评价指标

为了综合评价解耦算法的精确程度, 需要对解耦结果指定精度指标。对解耦误差的量化一方面要考虑拟合误差同时还要考虑维间耦合误差。因此, 对多维传感器的误差量化可以分为 I 类误差和 II 类误差两种。

I 类误差反映了传感器某一维度的测量值与实际施加值之间的偏离程度, 由于本文中所用的算法均基于最小二乘法, 因此采用判定系数作为 I 类误差指标, 并计算出平均估计误差值  $s_e$  [11]。

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (1-6)$$

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \quad (1-7)$$

其中  $y_i$  表示  $i$  方向上施加的实际力值,  $\bar{y}$  对应  $i$  方向上实际施加力值的均值,  $n$  表示样本容量。

II 类误差反映了某一维度未施加力/力矩时, 由于其他维度上施加了力/力矩而对该维度产生的干扰大小, 定义 II 类误差(或耦合误差)如下:

$$s_2 = \sqrt{\frac{\sum_k y_{ik(\max)}^2}{y_{i(\max)}^2}} \quad (1-8)$$

其中,  $y_{ik(\max)}$  表示当  $k$  方向施加力/力矩、其他方向无力/力矩作用时,  $i$  方向测得的最大力/力矩值。  $y_{i(\max)}$  表示  $i$  方向可施加的最大力/力矩值[12]。

## 3. 结果分析

对某品牌车型电机悬置开展传感器标定实验数据采集。分别从  $x$  方向、 $z$  方向施加力值, 对四个  $z$  向敏感的点  $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 、 $Z_4$  以及两个  $x$  向敏感的点  $X_1$ 、 $X_2$  进行标定。其中,  $x$  方向施加力值的量程为(-10,000, 10,000), 步长为 1000N;  $z$  方向施加力值的量程为(-23,000, 23,000), 步长为 1000N。标定方向如图 3 所示。



Figure 3. Drawing of the motor suspension measurement point  
图 3. 电机悬置测点示意图

### 3.1. 标定矩阵求逆算法结果分析

首先根据式(1-2)对标定数据进行计算，得到了标定矩阵  $G$ ：

$$\begin{pmatrix} -8.45 & 7.40 & -6.31 & 24.839 & -19.67 & -1.231 \\ 8.08 & 0.65 & 1.79 & -4.259 & 15.97 & -0.34 \end{pmatrix}$$

根据式(1-1)可得到  $x$  方向、 $z$  方向的力/力矩同各标记点应变之间的关系结果，如下式所示：

$$\begin{aligned} \hat{F}_x = & (-8.438847507) * Z_1 + 7.402651807 * Z_2 + (-6.310149463) * Z_3 \\ & + 24.83299946 * X_1 + (-19.66729511) * Z_4 + (-1.2329) * X_2 \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_z = & 8.079919155 * Z_1 + 0.650119283 * Z_2 + 1.78504543 * Z_3 \\ & + (-4.254750724) * X_1 + 15.97113462 * Z_4 + (-0.342351986) * X_2 \end{aligned} \quad (2-2)$$

以  $x$  方向为例，将根据回归直线得到的拟合力值同通过标定实验得到的观测力值进行对比，结果如图 4 所示。

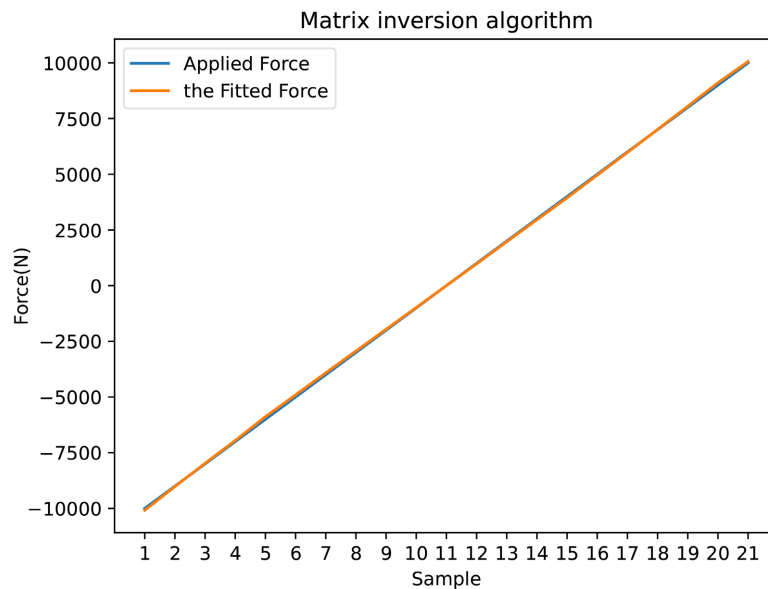


Figure 4. The  $x$ -directional force value of the designated matrix inverse fitting line  
图 4. 标定矩阵求逆算法的  $x$  向力值拟合直线

通过观察发现观测值基本落在回归直线上, 说明回归直线的拟合效果良好。

通过计算 I 类误差得到  $R^2 = 0.999767272$  说明在  $x$  方向力/力矩的变差中, 有 99% 可以由  $x$  方向力/力矩与各标定点的应变之间的线性关系来解释; 估计标准误差  $s_e = 0.004077185$ , 说明利用拟合的回归直线去估计力/力矩时平均估计的误差几乎为 0, 拟合效果良好。

根据式(1-8)计算 II 类误差即耦合误差, 在  $z$  方向施加力而  $x$  方向未施加力时,  $z$  方向对  $x$  方向产生的干扰而引起的误差为 0.95%; 同理  $x$  方向对  $z$  方向产生的耦合误差为 0.33%, 耦合误差均较小。

### 3.2. 灵敏度系数矩阵算法结果分析

首先, 利用最小二乘方法将每个方向上施加的载荷同各方向上应变分别进行拟合, 得到对应的拟合系数。将拟合系数汇总得到灵敏度系数矩阵  $A$ 。

$$A = \begin{pmatrix} 0.0294 & 0.1178 \\ 0.0621 & 0.0913 \\ 0.0423 & 0.0765 \\ 0.0258 & 0.0248 \\ -0.0167 & -0.0044 \\ -0.0697 & -0.0809 \end{pmatrix}$$

进一步通过式(1-4)得到力/力矩同各标定点的应变之间的关系。

$$\hat{F}_x = (-4.57892179) * Z_1 + (-0.278777058) * Z_2 + (-1.043202245) * Z_3 + 0.667201977 * X_1 + (-1.126719634) * Z_4 + (-7.702720996) * X_2 \quad (2-3)$$

$$\hat{F}_z = 6.624970581 * Z_1 + 2.790363467 * Z_2 + 2.918438062 * Z_3 + 0.225359509 * X_1 + 0.682883536 * Z_4 + 3.226532249 * X_2 \quad (2-4)$$

将  $x$  方向的拟合力值同通过标定实验得到的  $x$  方向观测力值进行对比, 结果如图 5 所示。

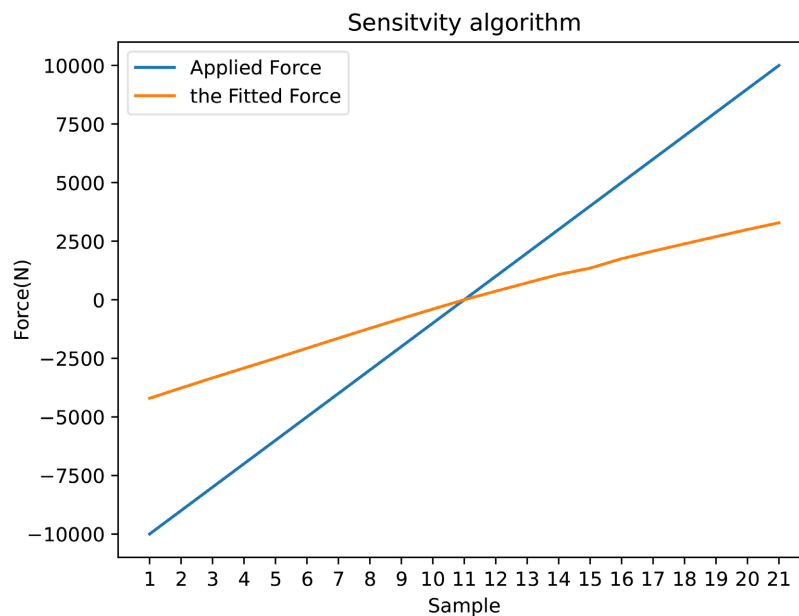
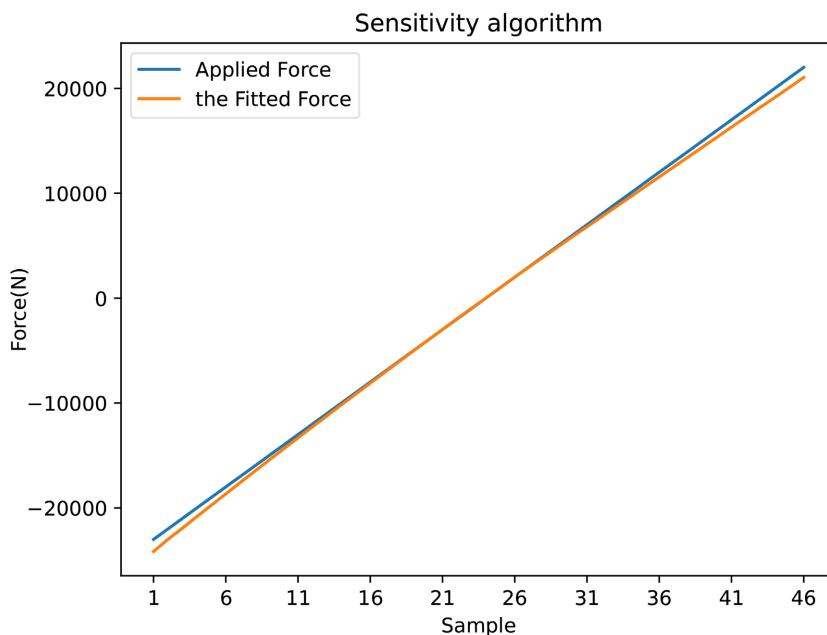


Figure 5. The  $x$ -directional force value of the sensitivity coefficient matrix algorithm fits the line  
图 5. 灵敏度系数矩阵算法的  $x$  向力值拟合直线

观察发现观测值与回归直线的偏差较明显,说明回归直线的拟合效果较差。通过计算 I 类发现判定系数只有 0.14,再一次验证了上述结论。



**Figure 6.** The  $z$ -directional force value of the sensitivity coefficient matrix algorithm fits the line  
**图 6.** 灵敏度系数矩阵算法的  $z$  向力值拟合直线

同理,将  $z$  方向的拟合力值同通过标定实验得到的  $z$  方向观测力值进行对比,如图 6。观察发现观测点大部分落在回归直线的附近,说明回归直线的拟合效果较好。通过计算 I 类发现判定系数为 0.99,同时具有很小的平均估计误差,说明拟合良好。

通过式(1-4)分别得到了  $x$  方向、 $z$  方向的耦合误差。在  $z$  方向施加力而  $x$  方向未施加力时, $z$  方向对  $x$  方向产生的干扰而引起的误差为 29%,因此耦合误差较大;同理  $x$  方向对  $z$  方向产生的耦合误差为 0.65%,因此耦合误差均较小。

### 3.3. 最小二乘线性拟合解耦结果分析

通过最小二乘利用样本数据对  $x$  方向、 $z$  方向的力值同个标定点的应变分别进行拟合,可以直接到力与应变之间的关系:

$$\hat{F}_x = -1.2917 + (-8.4699) * Z_1 + 7.4459 * Z_2 + (-6.2600) * Z_3 + 24.6602 * X_1 + (-19.7014) * Z_4 + (-1.2329) * X_2 \quad (2-5)$$

$$\hat{F}_z = 3.6984 + 8.1687 * Z_1 + 0.5263 * Z_2 + 1.6415 * Z_3 + (-3.7601) * X_1 + 16.0687 * Z_4 + (-0.3428) * X_2 \quad (2-6)$$

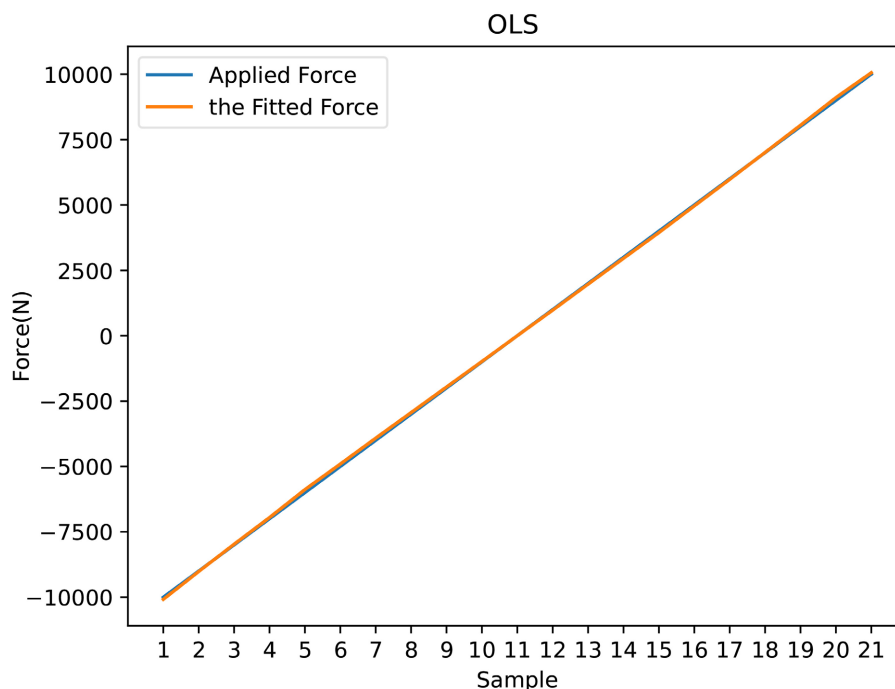
同上,将  $x$  方向的拟合力值同通过标定实验得到的  $x$  方向实际力值进行对比,结果如图 7 所示。

发现回归直线的拟合效果较好。通过计算 I 类误差发现判定系数为 0.99,同时具有很小的平均估计误差,据有很好的拟合效果。

同理,将  $z$  方向的拟合力值同通过标定实验得到的  $z$  方向观测力值进行对比,发现观测点大部分落在回归直线的附近,说明回归直线的拟合效果较好。通过计算 I 类发现判定系数为 0.99,同时具有很小的平均估计误差,说明拟合良好。

通过式(1-4)分别得到了  $x$  方向、 $z$  方向的耦合误差。在  $z$  方向施加力而  $x$  方向未施加力时, $z$  方向对

$x$ 方向产生的干扰而引起的误差为0.93%，因此耦合误差较小； $x$ 方向对 $z$ 方向产生的耦合误差仅为0.26%，耦合误差较小。



**Figure 7.** The  $x$ -directional force of the least squared fits the line  
**图 7.** 最小二乘法的  $x$  向力值拟合直线

当我们选择某一算法进行实际应用时，不仅要考虑 I 类误差，以保证我们的拟合偏差较小，同时还应考虑耦合误差，以保证结果的有效性。三种算法的 I 类误差与 II 类误差对比结果如下表所示。

**Table 1.** Comparison of accuracy  
**表 1.** 精度对比表

方法	方向	I 类误差		II 类误差 $S_2$
		$R^2$	$S_e$	
标定矩阵求逆	X	0.99	0	0.95%
	Z	0.99	0	0.34%
灵敏度系数矩阵	X	0.14	0.24	29%
	Z	0.99	0	0.66%
最小二乘线性拟合	X	0.99	0	0.93%
	Z	0.99	0	0.26%

从表 1 中可以看出，标定矩阵求逆算法同最小二乘线性拟合解耦算法都有着很好的拟合效果以及很小的耦合误差。相较而言，灵敏度系数矩阵解耦算法在  $x$  方向上的拟合效果较差且因  $z$  方向对  $x$  方向产生的干扰而引起的耦合误差较大。将标定矩阵求逆算法与最小二乘线性拟合算法分别在  $x$  方向、 $z$  方向产生的耦合误差做进一步比较，结果如下图所示：

通过观察图 8、图 9 发现，最小二乘线性拟合的解耦算法具有更小的耦合误差。此外，标定矩阵求



逆算法对标定矩阵的性质具有较高的要求。结合上述分析，本文认为用最小二乘线性拟合的解耦算法对电机悬置进行解耦更为适用。

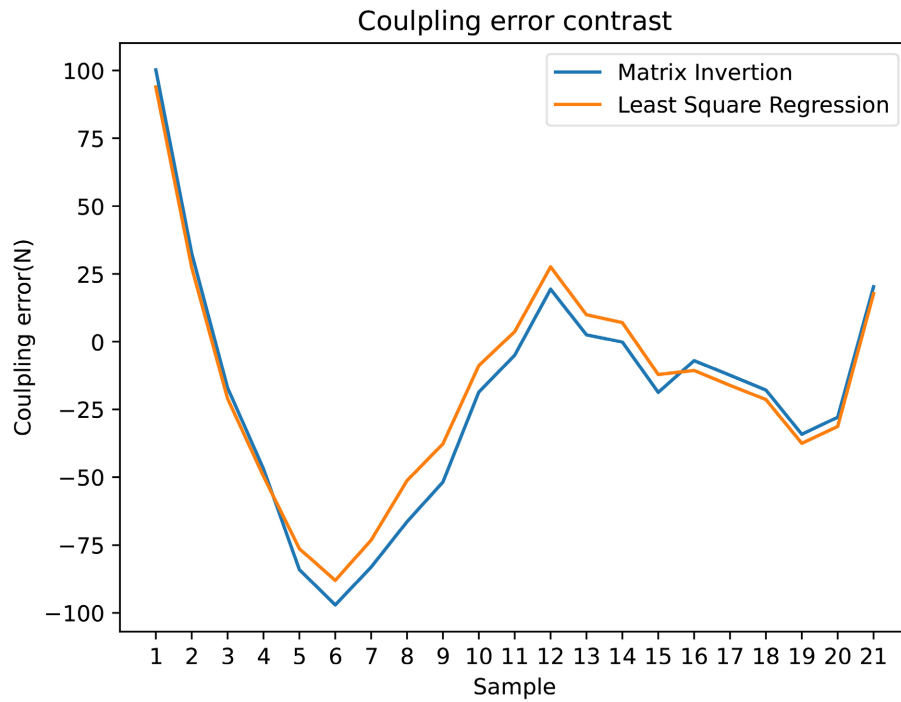


Figure 8. Contrast of  $x$  to coupling error  
图 8.  $x$  向耦合误差对比

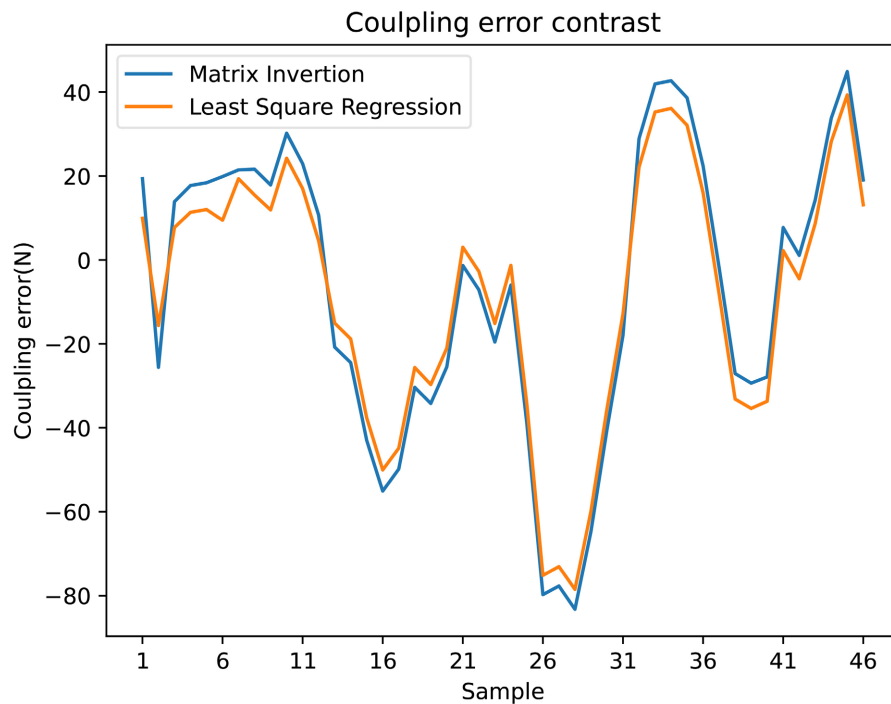


Figure 9. Contrast of  $z$  to coupling error  
图 9.  $z$  向耦合误差对比

## 4. 结论

本文对六维传感器基本原理进行阐述并在此基础上依据拟合误差和耦合误差的评价指标并结合某品牌车型的悬置标定数据对标定矩阵求逆算法、灵敏度系数矩阵算法以及最小二乘算法进行分析。研究结果表明最小二乘方法的求解误差更小, 这种方法更适用于对汽车电机悬置进行解耦。

## 参考文献

- [1] 陈雄标, 姚英学, 袁哲俊. 六维力/力矩传感器干扰及其标定方法[J]. 传感器技术, 1995(2): 37-40.
- [2] 黄心汉. 机器人腕力传感器标定矩阵的解[J]. 电气自动化, 1989, 10(3): 48-50
- [3] Beyeler, F., Muntwyler, S. and Nelson, B.J. (2009) Design and Calibration of a Microfabricated 6-Axis Force-Torque Sensor for Microrobotic Applications.
- [4] 马俊青, 宋爱国, 吴涓. 三维力传感器静态解耦算法的研究与应用[J]. 计量学报, 2011, 32(6): 517-521.
- [5] 吴涓. 六维腕力传感器的改进及机器人解耦的研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 东南大学, 2002.
- [6] 武秀秀, 宋爱国, 王政. 六维力传感器静态解耦算法及静态标定的研究[J]. 传感器技术学报, 2023, 26(6): 851-856.
- [7] 茅晨. 六维力传感器的改进及机器人解耦的研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 东南大学, 2002.
- [8] 洪瑞, 陈贵林, 高峰, 等. 基于 Stewart 平台的六维力传感器各向同性的进一步分析[J]. 机械工程学报, 2020, 36(4): 49-52.
- [9] 刘砚涛, 郭冰, 尹伟, 等. 六维力传感器静态标定及解耦研究[J]. 强度与环境, 2013 (1): 44-49.
- [10] 王建波, 吕震中, 田沛. 基于 INA 的机器人六维力传感器的解耦研究[J]. 测控技术, 2002, 21(9): 5-7.
- [11] 曹会彬, 孙玉香, 刘利民, 等. 多维力传感器耦合分析及解耦方法的研究[J]. 传感技术学报, 2011, 24(8): 1136-1140.
- [12] 武秀秀, 宋爱国, 王政. 六维力传感器静态解耦算法及静态标定的研究[J]. 传感技术学报, 2013,26(6): 851-856.