

# 基于多重函数投影同步的保密通信新算法

唐宇涵, 罗梓玲\*, 李震波\*

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2024年5月27日; 录用日期: 2024年7月15日; 发布日期: 2024年7月23日

## 摘要

本文提出了一种新的混沌同步方案——多重函数投影同步, 该同步方案比许多现有同步方案更加广义, 两个同步系统之间的同步行为更加复杂。基于所提的同步方案并引入参数扰动因子, 设计了一种新的保密通信算法, 并通过理论分析和数值模拟, 证实了算法的有效性和可行性。最后, 通过讨论和对比实验展示了该算法的安全性。

## 关键词

保密通信, 多重函数投影同步, 参数扰动

# A Novel Algorithm of Secure Communication Based on Multiple Function Projective Synchronization

Yuhan Tang, Ziling Luo\*, Zhenbo Li\*

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: May 27<sup>th</sup>, 2024; accepted: Jul. 15<sup>th</sup>, 2024; published: Jul. 23<sup>rd</sup>, 2024

## Abstract

A generalized scheme of chaos synchronization, which is called multiple function projective synchronization, is first reported in this paper. This synchronization scheme is more generalized than many existing ones. Under the scheme, the synchronous behavior between two synchronized systems is more complicated. By utilizing the proposed synchronization scheme and introducing the parameter perturbation factor, a novel algorithm of secure communication is designed. From theoretical analysis and numerical simulations, the validity and feasibility of this algorithm is

\*通讯作者。

proved. Finally, some discussions and comparison experiments are established to illuminate the security of this algorithm.

## Keywords

Secure Communication, Multiple Function Projective Synchronization, Parametric Perturbation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自 Pecora 和 Carroll 提出使混沌系统同步的方法并在电子电路中实现以来[1], 因为其在保密通信、化学反应、生物系统、信息科学、等离子技术等方面的潜在应用, 混沌同步被广泛的探索和研究。最近几年, 针对混沌系统的同步方案设计提出了多种方法, 比如完全同步[2]、相位同步[3]、滞后同步[4]、广义同步[5]、反同步[6]、脉冲同步[7]等等。1999年, Mainieri 和 Rehacek [8]首次报道了部分线性系统中的投影同步。之后, 投影同步被广泛的研究和改进[9] [10]。最近, 研究人员提出了函数投影同步(FPS)的概念[11] [12], 即驱动系统和响应系统的动力学状态可以同步到一个缩放函数因子上。Du 等人[13]讨论了修正函数投影同步(MFPS), 即驱动系统和响应系统可同步至所需的缩放函数矩阵。随后, Yu 等通过对许多现有投影同步方案进行扩展, 提出了广义函数投影同步(GFPS)的新型同步[14]。在上述研究的基础上, 本文提出了一种名为多重函数投影同步的广义混沌同步方案(multi-FPS)。该方案以投影同步为基础, 但比上述方案更为广义。在该方案中, 两个同步系统之间的同步行为更复杂。

由于混沌的特征和其同步性, 混沌同步在保密通信中的应用已经被广泛的研究[15]-[21]。总的来说, 混沌保密通信技术可分为三类: 混沌掩盖[15], 混沌移位键控[22]和混沌调制[23]。在混沌掩盖中, 信息信号与混沌信号相加, 然后将合并信号传输给接收器。在某些条件下, 接收器可以恢复信息信号。在混沌移位键控中, 信息信号是二进制的, 并映射到发射器和接收器中。在混沌调制中, 信息信号通过可逆程序修改混沌系统的状态或参数; 因此, 产生的混沌信号本质上包含传输信号的信息。基于上述方法, 本文设计了一种新型的保密通信算法。其主要特点是安全性显著提高。首先, 该算法在加密系统和解密系统中引入了参数扰动因子。其次, 利用 multi-FPS 方案使用加密系统对信息信号进行加密。最后, 加密信号可以通过合法的解密系统轻松准确地恢复。另外, 算法能实现连续信号和离散信号的保密通信, 这表明该算法具有更广的适用性。

本文的结构如下: 第二节介绍了多重函数投影同步的定义, 并基于李亚普诺夫稳定性理论构建了同步控制器。随后, 对超混沌 Chen 系统和超混沌 Lorenz 系统之间的 multi-FPS 进行了数值模拟研究, 以显示控制器的可行性。第三节基于 multi-FPS 设计了相应的保密通信算法。第四节展示了该算法的一些应用实例。第五节讨论了算法的安全性和优势。最后在第六节给出结论。

## 2. 混沌系统的多重函数投影同步

### 2.1. 多重函数投影同步的定义及其控制器

考虑混沌系统的形式为

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$  是状态向量。以系统(1)为驱动系统，带控制器  $U \in R^n$  的响应系统如下：

$$\dot{y} = g(y) + U \quad (2)$$

其中  $y \in R^n$  为状态向量。定义 multi-FPS 的误差向量为：

$$e = y - M h(x)x \quad (3)$$

其中  $h(x) = \text{diag}\{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)\}$ ， $h_i(x): R^n \rightarrow R (i=1, 2, \dots, n)$  是构成函数矩阵  $h(x)$  的投影函数

因子。 $M_{n \times n}$  是多重投影矩阵的  $n$  维常量矩阵。令  $J = \frac{d(Mh(x))}{dt}$ ，同步误差系统由如下公式求得：

$$\dot{e} = g(y) - M h(x)f(x) - Jx + U \quad (4)$$

其中  $e \in R^n$  为误差向量。

**定义 1.** 如果存在控制器  $U$ ，使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - M h(x)x(t)\| = 0$$

则驱动系统和响应系统之间的误差系统(4)是全局渐近稳定的。意味着系统(1)和系统(2)实现了关于多重投影矩阵  $M$  和投影函数矩阵  $h(x)$  的多重函数投影同步。

**备注 1.** 通过引入多重投影矩阵  $M$ ，提出了多重函数投影同步方案的定义。在该方案下，系统(1)和系统(2)之间的同步行为更复杂。

**备注 2.** 如果  $M$  作为单位矩阵，multi-FPS 可简化为 GFPS。在此条件下，如果令投影函数矩阵满足  $h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_n(x)$ ，multi-FPS 将退化成 FPS。如果  $h = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ ，其中  $h_i (i=1, 2, \dots, n)$  为实常数，multi-FPS 转变为修正的投影同步。特别当  $h = 0$  时，同步问题将转化为混沌控制问题。因此，与许多现有方案相比，多重函数投影同步更加广义。

由上可知，使系统(1)和系统(2)实现 multi-FPS 的问题转化为设计一个控制器  $U$ ，使误差系统渐近收敛到零的问题。首先，设计如下的控制器  $U$ ：

$$U = M h(x)f(x) - g(y) + Jx + Ke \quad (5)$$

$K$  为常量矩阵。引入以下定理。

**定理 1.** (见文献[24])如果动力系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ k_2 a_{21} & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_n a_{n1} & & & k_n a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

满足以下条件：

- (1)  $\forall a_{ij} \in R$
- (2)  $a_{ij} = -a_{ji} (i \neq j)$
- (3)  $a_{ii} \leq 0$  ( $a_{ii}$  都不等于零)
- (4)  $\forall k_i > 0$

系统将渐近收敛到零。

**证明.** 取李亚普诺夫函数为

$$V = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \left( \frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \dots, \frac{x_n}{k_n} \right)^T$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \left( \frac{\dot{x}_1}{k_1}, \frac{\dot{x}_2}{k_2}, \dots, \frac{\dot{x}_n}{k_n} \right)^T \\ &= 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_i \cdot x_j = 2 \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} x_i^2 \leq 0 \end{aligned}$$

基于李雅普诺夫稳定性定理，系统(6)的定点是渐近稳定的。

**定理 2.** 对于给定的投影矩阵函数  $h(x)$  和多重投影矩阵  $M$ ，控制器(5)可实现驱动系(1)和响应系统(2)之间的多重函数投影同步。

**证明.** 将(5)代入(4)，我们可以得到以下误差系统

$$\dot{e} = Ke \quad (7)$$

如果  $K$  满足定理 1 中的条件，那么误差系统(7)渐近收敛到 0，意味着实现了系统(1)和系统(2)之间的 multi-FPS。

多重函数投影同步的定义及其控制器如上所述。随后，通过数值模拟来实现超混沌 Chen 混沌系统和超混沌 Lorenz 系统之间的 multi-FPS，并由此来展示控制器的有效性。

## 2.2. 数值模拟

在模拟过程中，选择超混沌 Chen 系统[25]作为驱动系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a x_1 + a x_2 + x_4 \\ \dot{x}_2 = d x_1 + c x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -b x_3 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 = r x_4 + x_2 x_3 \end{cases} \quad (8)$$

将超混沌 Lorenz 系统[26]作为响应系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -a_1 y_1 + a_1 y_2 + y_4 + u_1 \\ \dot{y}_2 = b_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -c_1 y_3 + y_1 y_2 + u_3 \\ \dot{y}_4 = d_1 y_4 - y_1 y_3 + u_4 \end{cases} \quad (9)$$

其中  $u_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) 为控制器。根据 multi-FPS 的定义，假设投影多重矩阵  $M$  为

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

投影函数矩阵为  $h(x) = \text{diag} \{h_1(x_1), h_2(x_2), h_3(x_3), h_4(x_4)\}$ 。将 multi-FPS 的误差向量定义为

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - (m_{11} h_1(x_1) x_1 + m_{12} h_2(x_2) x_2 + m_{13} h_3(x_3) x_3 + m_{14} h_4(x_4) x_4) \\ e_2 = y_2 - (m_{21} h_1(x_1) x_1 + m_{22} h_2(x_2) x_2 + m_{23} h_3(x_3) x_3 + m_{24} h_4(x_4) x_4) \\ e_3 = y_3 - (m_{31} h_1(x_1) x_1 + m_{32} h_2(x_2) x_2 + m_{33} h_3(x_3) x_3 + m_{34} h_4(x_4) x_4) \\ e_4 = y_4 - (m_{41} h_1(x_1) x_1 + m_{42} h_2(x_2) x_2 + m_{43} h_3(x_3) x_3 + m_{44} h_4(x_4) x_4) \end{cases}$$

令  $J = \frac{d(Mh(x))}{dt}$ ，得到如下所示的矩阵。

$$J = \begin{bmatrix} m_{11} \dot{h}_1(x_1) & m_{12} \dot{h}_2(x_2) & m_{13} \dot{h}_3(x_3) & m_{14} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{21} \dot{h}_1(x_1) & m_{22} \dot{h}_2(x_2) & m_{23} \dot{h}_3(x_3) & m_{24} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{31} \dot{h}_1(x_1) & m_{32} \dot{h}_2(x_2) & m_{33} \dot{h}_3(x_3) & m_{34} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{41} \dot{h}_1(x_1) & m_{42} \dot{h}_2(x_2) & m_{43} \dot{h}_3(x_3) & m_{44} \dot{h}_4(x_4) \end{bmatrix}$$

因此，误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \begin{pmatrix} -a_1 y_1 + a_1 y_2 + y_4 \\ b_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ -c_1 y_3 + y_1 y_2 \\ d_1 y_4 - y_1 y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{11} h_1(x_1) & m_{12} h_2(x_2) & m_{13} h_3(x_3) & m_{14} h_4(x_4) \\ m_{21} h_1(x_1) & m_{22} h_2(x_2) & m_{23} h_3(x_3) & m_{24} h_4(x_4) \\ m_{31} h_1(x_1) & m_{32} h_2(x_2) & m_{33} h_3(x_3) & m_{34} h_4(x_4) \\ m_{41} h_1(x_1) & m_{42} h_2(x_2) & m_{43} h_3(x_3) & m_{44} h_4(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a x_1 + a x_2 + x_4 \\ d x_1 + c x_2 - x_1 x_3 \\ -b x_3 + x_1 x_2 \\ r x_4 + x_2 x_3 \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} m_{11} \dot{h}_1(x_1) & m_{12} \dot{h}_2(x_2) & m_{13} \dot{h}_3(x_3) & m_{14} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{21} \dot{h}_1(x_1) & m_{22} \dot{h}_2(x_2) & m_{23} \dot{h}_3(x_3) & m_{24} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{31} \dot{h}_1(x_1) & m_{32} \dot{h}_2(x_2) & m_{33} \dot{h}_3(x_3) & m_{34} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{41} \dot{h}_1(x_1) & m_{42} \dot{h}_2(x_2) & m_{43} \dot{h}_3(x_3) & m_{44} \dot{h}_4(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

依据方程(5)，得到控制器

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} m_{11} h_1(x_1) & m_{12} h_2(x_2) & m_{13} h_3(x_3) & m_{14} h_4(x_4) \\ m_{21} h_1(x_1) & m_{22} h_2(x_2) & m_{23} h_3(x_3) & m_{24} h_4(x_4) \\ m_{31} h_1(x_1) & m_{32} h_2(x_2) & m_{33} h_3(x_3) & m_{34} h_4(x_4) \\ m_{41} h_1(x_1) & m_{42} h_2(x_2) & m_{43} h_3(x_3) & m_{44} h_4(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a x_1 + a x_2 + x_4 \\ d x_1 + c x_2 - x_1 x_3 \\ -b x_3 + x_1 x_2 \\ r x_4 + x_2 x_3 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} m_{11} \dot{h}_1(x_1) & m_{12} \dot{h}_2(x_2) & m_{13} \dot{h}_3(x_3) & m_{14} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{21} \dot{h}_1(x_1) & m_{22} \dot{h}_2(x_2) & m_{23} \dot{h}_3(x_3) & m_{24} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{31} \dot{h}_1(x_1) & m_{32} \dot{h}_2(x_2) & m_{33} \dot{h}_3(x_3) & m_{34} \dot{h}_4(x_4) \\ m_{41} \dot{h}_1(x_1) & m_{42} \dot{h}_2(x_2) & m_{43} \dot{h}_3(x_3) & m_{44} \dot{h}_4(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a_1 y_1 + a_1 y_2 + y_4 \\ b_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ -c_1 y_3 + y_1 y_2 \\ d_1 y_4 - y_1 y_3 \end{pmatrix} + K_{4 \times 4} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

依据定理 2，如果在控制器(11)中将矩阵  $K$  选择为合适值，使得矩阵  $K$  满足定理 1 中的条件，则在控制器(11)的作用下，可实现系统(8)和系统(9)之间的 multi-FPS。

接下来将通过数值模拟进一步展示控制器的有效性，为使系统(8)和系统(9)表现出超混沌行为，令系统(8)和系统(9)的参数值为  $a = 35$ ， $b = 3$ ， $c = 12$ ， $d = 7$ ， $r = 0.08$ ， $a_1 = 10$ ， $b_1 = 28$ ， $c_1 = \frac{8}{3}$ ， $d_1 = 1.3$ 。令驱动系统和响应系统的初始值为  $x_1(0) = 3$ ， $x_2(0) = 5$ ， $x_3(0) = 7$ ， $x_4(0) = 8$ ， $y_1(0) = -12$ ， $y_2(0) = 2$ ， $y_3(0) = 3$ ， $y_4(0) = -5$ 。选择的投影矩阵函数  $h(x)$  和多重投影矩阵  $M$  如下所示

$$\begin{cases} h_1(x_1) = d_{11} x_1 + d_{12} \\ h_2(x_2) = d_{21} x_2 + d_{22} \\ h_3(x_3) = d_{31} x_3 + d_{32} \\ h_4(x_4) = d_{41} x_4 + d_{42} \end{cases} \quad (12)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 & 0.2 & 0.4 \\ -0.01 & 0.05 & 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.4 & 0.01 & 0.3 \\ -0.4 & 0.4 & 0.06 & 0.05 \end{bmatrix} \quad (13)$$

令  $d_{11} = 0.01$ ,  $d_{12} = 0.1$ ,  $d_{21} = 0.02$ ,  $d_{22} = 0.2$ ,  $d_{31} = -0.01$ ,  $d_{32} = -0.1$ ,  $d_{41} = -0.02$ ,  $d_{42} = 0.3$ 。依据定理 1, 设控制器(11)中的矩阵  $K$  为

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

模拟结果如图 1 所示, 该图展示了多重函数投影同步误差的时间响应。从图 1 可知, 随着时间的延长, 同步误差将趋于 0, 意味着获得了系统(8)和系统(9)之间的 multi-FPS 并且设计的控制器是有效的。

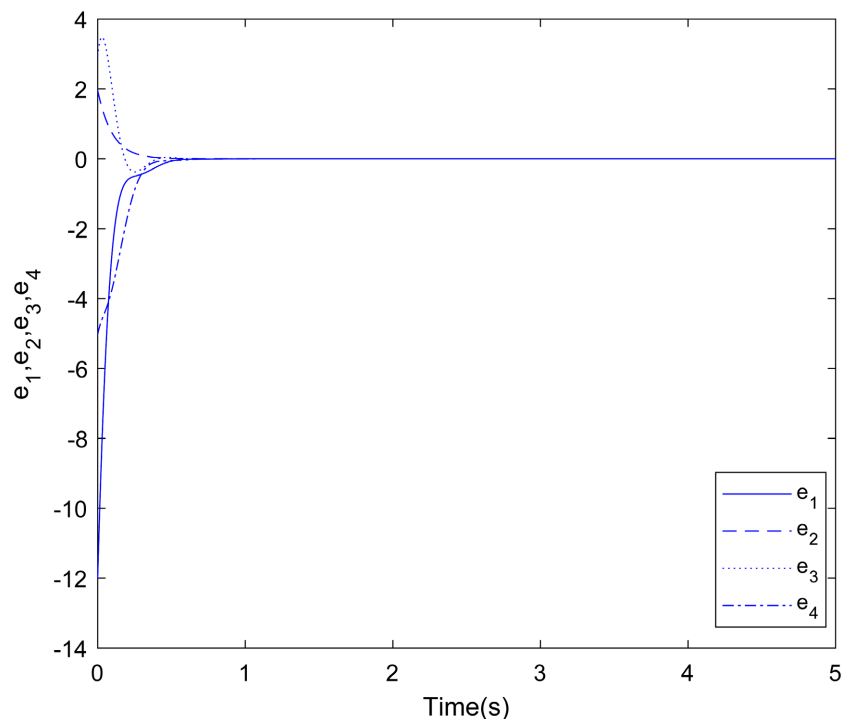


Figure 1. Time response of multiple function projective synchronization errors  
图 1. 多重函数投影同步的误差曲线

### 3. 保密通信算法设计

本节提出了一种新的保密通信算法。首先, 该算法基于 multi-FPS。其次, 通过在加密系统和解密系统中引入参数扰动因子, 提高了算法的安全性。现将该算法的主要步骤概述如下。

构造的加密系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x; \Theta \cdot \lambda(t), \alpha_1(a)) + u_{1n} \\ \dot{y} = g(y; \alpha_2(b)) \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^n$  均为状态向量。  $f(\cdot): R^n \rightarrow R^n$  和  $g(\cdot): R^n \rightarrow R^n$  为连续函数向量。  $\lambda(t)$  为嵌入到系统(14)的信息信号,  $\Theta (\Theta \neq 0)$  为信息信号的振幅控制器。  $a, b$  是加密系统的参数向量。  $\alpha_1(a)$  和  $\alpha_2(b)$  为仍能确保系统混沌行为的参数扰动因子。  $u_{1n}$  为需要设计的控制器。然后选择相应的投影多重矩阵  $M$  和投影函数矩阵  $h(x)$ 。由定理 2 可知, 控制器  $u_{1n}$  应使状态变量  $x$  和  $y$  满足以下条件:

$$x = M h(y)y$$

这意味着(14)中两个子系统是 multi-FPS。其次, 令加密系统与解密系统之间的传输信号  $s(t)$  为:

$$s(t) = c \cdot f_i(x; \Theta \cdot \lambda(t)) = c \cdot (\beta(x) + \Theta \cdot \lambda(t)) \quad (15)$$

其中  $c$  为传输信号的振幅控制器。  $\beta(\cdot)$  可从加密系统(14)中获取。

在接收端, 构造如下的解密系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = f_j(x_j; \alpha_1(a)) + u_{1j}; & j \neq i \\ \dot{x}_i = \frac{s(t)}{c} + u_{1i}; & s(t) \text{ is the signal received from the channel} \\ \dot{z} = g(z; \alpha_2(b)) + u_{2n} \end{cases} \quad (16)$$

其中  $z \in R^n$  为状态向量,  $u_{2n}$  为控制器。设计的控制器  $u_{2n}$  应使得状态向量  $x$  和  $z$  满足:

$$z = x$$

这意味着(16)中的两个子系统是完全同步的。令  $\tilde{\lambda}(t)$  为恢复信号。从加解密的过程中, 可以得出

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{1}{c \cdot \Theta} (s(t) - \beta(z)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty, z \rightarrow x} \frac{1}{c \cdot \Theta} (s(t) - \beta(x)) = \lambda(t) \quad (17)$$

因此, 通过解密系统(16)可以在接收端成功恢复原始信息信号。

**备注 3.** 基于投影同步的特殊性(例如 FPS, MFPS, GFPS), 许多研究人员致力于设计基于这些同步方案的保密通信算法。该算法与其他算法的主要区别在于在该算法的加密系统中添加了控制器, 通过使用 multi-FPS 方案对信息信号进行加密, 并在解密系统中加入了另一个控制器, 再利用完全同步来恢复信息信号。这一步并非画蛇添足, 其目的是构造一个更加复杂的加密系统。使得攻击者很难分析加密系统的结构, 更能确保嵌入的信息信号能够被更安全的隐藏起来。

**备注 4.** 正如备注 2 中所说, 与现有的方案相比, multi-FPS 更加广义。因此, 只要选择合适的  $M$  和  $h(y)$ , 比如将  $M$  和  $h(y)$  均选择为单位矩阵, 则控制器  $u_{2n}$  也可从定理 2 中得到。

算法的主要步骤概述如上。下一步将应用该算法分别实现连续信号和离散信号的保密通信仿真。

## 4. 算法应用

本节讨论上述保密通信算法的应用。首先构造如下的加密系统。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(a_1 + 0.1 \cos(t+1))x_1 + (a_1 + 0.1 \cos(t+1))x_2 + x_4 + u_{11} \\ \dot{x}_2 = (b_1 + 0.1 \cos(2t+0.1))x_1 - x_2 - x_1x_3 + \Theta \cdot \lambda(t) + u_{12} \\ \dot{x}_3 = -(c_1 + 0.1 \sin(2t+1))x_3 + x_1x_2 + u_{13} \\ \dot{x}_4 = (d_1 + 0.1 \sin(3t+1))x_4 - x_1x_3 + u_{14} \\ \dot{y}_1 = -(a + 0.1 \sin(2t+1))y_1 + (a + 0.1 \sin(2t+1))y_2 + y_4 \\ \dot{y}_2 = (d + 0.1 \cos(3t+2))y_1 + (c + 0.1 \sin(0.2t+1))y_2 - y_1y_3 \\ \dot{y}_3 = -(b + 0.1 \cos(t+1))y_3 + y_1y_2 \\ \dot{y}_4 = (r + 0.1 \sin(2t))y_4 + y_2y_3 \end{cases} \quad (18)$$

其中  $\lambda(t)$  为被嵌入到加密系统中的信息信号,  $\Theta (\Theta \neq 0)$  为信息信号的振幅控制器。(18)式的两个子系统分别为超混 Lorenz 兹系统和超混沌 Chen 系统, 并各自带有相应的参数扰动因子。令投影矩阵函数  $h(y)$  和多重投影矩阵  $M$  分别为:

$$\begin{cases} h_1(y_1) = d_{11}y_1 + d_{12} \\ h_2(y_2) = d_{21}y_2 + d_{22} \\ h_3(y_3) = d_{31}y_3 + d_{32} \\ h_4(y_4) = d_{41}y_4 + d_{42} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 & 0.2 & 0.4 \\ -0.01 & 0.05 & 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.4 & 0.01 & 0.3 \\ -0.4 & 0.4 & 0.06 & 0.05 \end{bmatrix}$$

令  $d_{11} = 0.01$ ,  $d_{12} = 0.1$ ,  $d_{21} = 0.02$ ,  $d_{22} = 0.2$ ,  $d_{31} = -0.01$ ,  $d_{32} = -0.1$ ,  $d_{41} = -0.02$ ,  $d_{42} = 0.3$ 。  
 $u_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 是使状态变量  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 和  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 满足  $x_i = \sum_{j=1}^4 m_{ij} h_j(y_j) y_j$  的控制器。利用公式 (5) 可得如下控制器

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}h_1(y_1) & m_{12}h_2(y_2) & m_{13}h_3(y_3) & m_{14}h_4(y_4) \\ m_{21}h_1(y_1) & m_{22}h_2(y_2) & m_{23}h_3(y_3) & m_{24}h_4(y_4) \\ m_{31}h_1(y_1) & m_{32}h_2(y_2) & m_{33}h_3(y_3) & m_{34}h_4(y_4) \\ m_{41}h_1(y_1) & m_{42}h_2(y_2) & m_{43}h_3(y_3) & m_{44}h_4(y_4) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(a + 0.1\sin(2t+1))y_1 + (a + 0.1\sin(2t+1))y_2 + y_4 \\ (d + 0.1\cos(3t+2))y_1 + (c + 0.1\sin(0.2t+1))y_2 - y_1y_3 \\ -(b + 0.1\cos(t+1))y_3 + y_1y_2 \\ (r + 0.1\sin(2t))y_4 + y_2y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11}\dot{h}_1(y_1) & m_{12}\dot{h}_2(y_2) & m_{13}\dot{h}_3(y_3) & m_{14}\dot{h}_4(y_4) \\ m_{21}\dot{h}_1(y_1) & m_{22}\dot{h}_2(y_2) & m_{23}\dot{h}_3(y_3) & m_{24}\dot{h}_4(y_4) \\ m_{31}\dot{h}_1(y_1) & m_{32}\dot{h}_2(y_2) & m_{33}\dot{h}_3(y_3) & m_{34}\dot{h}_4(y_4) \\ m_{41}\dot{h}_1(y_1) & m_{42}\dot{h}_2(y_2) & m_{43}\dot{h}_3(y_3) & m_{44}\dot{h}_4(y_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(a_1 + 0.1\cos(t+1))x_1 + (a_1 + 0.1\cos(t+1))x_2 + x_4 \\ (b_1 + 0.1\cos(2t+0.1))x_1 - x_2 - x_1x_3 + \Theta \cdot \lambda(t) \\ -(c_1 + 0.1\sin(2t+1))x_3 + x_1x_2 \\ (d_1 + 0.1\sin(3t+1))x_4 - x_1x_3 \end{pmatrix} + K_{4 \times 4} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为如下所示的 multi-FPS 误差向量。

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - (m_{11}h_1(y_1)y_1 + m_{12}h_2(y_2)y_2 + m_{13}h_3(y_3)y_3 + m_{14}h_4(y_4)y_4) \\ e_2 = x_2 - (m_{21}h_1(y_1)y_1 + m_{22}h_2(y_2)y_2 + m_{23}h_3(y_3)y_3 + m_{24}h_4(y_4)y_4) \\ e_3 = x_3 - (m_{31}h_1(y_1)y_1 + m_{32}h_2(y_2)y_2 + m_{33}h_3(y_3)y_3 + m_{34}h_4(y_4)y_4) \\ e_4 = x_4 - (m_{41}h_1(y_1)y_1 + m_{42}h_2(y_2)y_2 + m_{43}h_3(y_3)y_3 + m_{44}h_4(y_4)y_4) \end{cases}$$

依据定理 1, 令控制器(19)中的矩阵  $K$  为

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



将控制器(19)代入(18)可以得到加密系统。加密系统和解密系统之间的传输信号为

$$s(t) = c \cdot f_i(x; \Theta \cdot \lambda(t)) = c \cdot ((b_1 + 0.1 \cos(2t + 0.1))x_1 - x_2 - x_1 x_3 + \Theta \cdot \lambda(t)) \quad (20)$$

在接收端, 构造解密系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(a_1 + 0.1 \cos(t+1))x_1 + (a_1 + 0.1 \cos(t+1))x_2 + x_4 + u_{11} \\ \dot{x}_2 = \frac{s(t)}{c} + u_{12} \\ \dot{x}_3 = -(c_1 + 0.1 \sin(2t+1))x_3 + x_1 x_2 + u_{13} \\ \dot{x}_4 = (d_1 + 0.1 \sin(3t+1))x_4 - x_1 x_3 + u_{14} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(a + 0.1 \sin(2t+1))z_1 + (a + 0.1 \sin(2t+1))z_2 + z_4 + u_{21} \\ \dot{z}_2 = (d + 0.1 \cos(3t+2))z_1 + (c + 0.1 \sin(0.2t+1))z_2 - z_1 z_3 + u_{22} \\ \dot{z}_3 = -(b + 0.1 \cos(t+1))z_3 + z_1 z_2 + u_{23} \\ \dot{z}_4 = (r + 0.1 \sin(2t))z_4 + z_2 z_3 + u_{24} \end{cases}$$

其中  $z_i (i=1,2,3,4)$  为状态变量,  $u_{2i} (i=1,2,3,4)$  是使得状态变量  $x_i (i=1,2,3,4)$  和  $z_i (i=1,2,3,4)$  满足  $z_i = x_i$  的控制器。作为合法的接收方, 控制器  $u_{1i} (i=1,2,3,4)$  是已知的。因此可以使用备注 4 中提及的方法设计如下的控制器  $u_{2i} (i=1,2,3,4)$ 。

$$\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + 0.1 \cos(t+1))x_1 + (a_1 + 0.1 \cos(t+1))x_2 + x_4 + u_{11} \\ \frac{s(t)}{c} + u_{12} \\ -(c_1 + 0.1 \sin(2t+1))x_3 + x_1 x_2 + u_{13} \\ (d_1 + 0.1 \sin(3t+1))x_4 - x_1 x_3 + u_{14} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$- \begin{pmatrix} -(a + 0.1 \sin(2t+1))z_1 + (a + 0.1 \sin(2t+1))z_2 + z_4 \\ (d + 0.1 \cos(3t+2))z_1 + (c + 0.1 \sin(0.2t+1))z_2 - z_1 z_3 \\ -(b + 0.1 \cos(t+1))z_3 + z_1 z_2 \\ (r + 0.1 \sin(2t))z_4 + z_2 z_3 \end{pmatrix} + \tilde{K}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \\ \tilde{e}_4 \end{pmatrix}$$

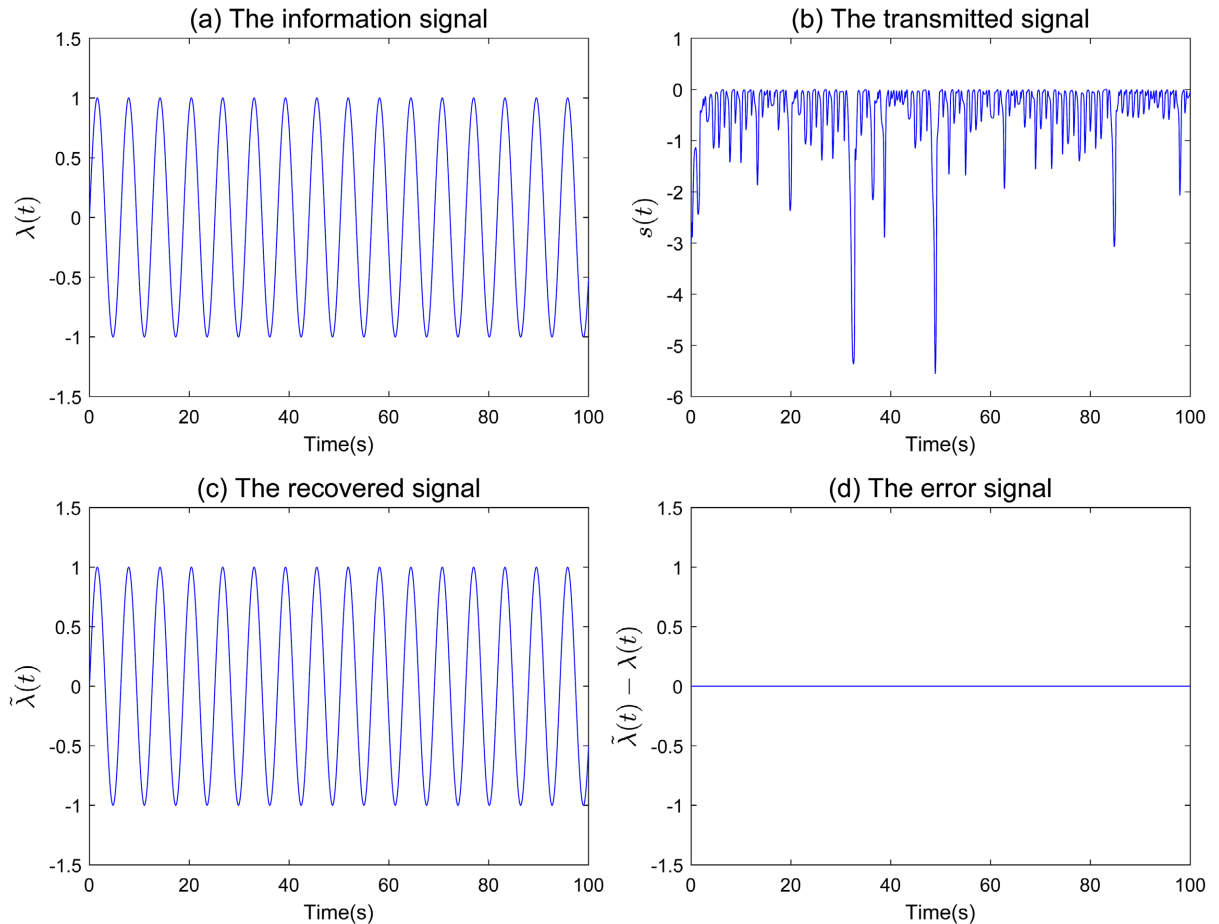
其中  $e_i = z_i - x_i (i=1,2,3,4)$  为同步误差因子。矩阵  $\tilde{K}$  的值可以选择控制器(19)中的矩阵  $K$  相同值。则信息信号可通过如下公式恢复。

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{1}{c \cdot \Theta} (s(t) - b_1 - 0.1 \cos(2t + 0.1)z_1 + z_2 + z_1 z_3) \xrightarrow{t \rightarrow \infty, z \rightarrow x} \lambda(t) \quad (23)$$

#### 4.1. 连续信号保密通信仿真

本小节, 我们模拟正弦信号的保密通信, 即信息信号  $\lambda(t) = \sin(t)$ 。信息信号的振幅控制器选择为  $\Theta = 0.01$ 。系统(18)的参数值设置成  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 12$ ,  $d = 7$ ,  $r = 0.08$ ,  $a_1 = 10$ ,  $b_1 = 28$ ,  $c_1 = \frac{8}{3}$  和  $d_1 = 1.3$ 。在系统(18)中设置的参数扰动下, 两个子系统也能表现出混沌行为。系统(18)和系统(21)的初

始值为  $x_1(0) = -12$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_3(0) = 3$ ,  $x_4(0) = -5$ ,  $y_1(0) = 3$ ,  $y_2(0) = 5$ ,  $y_3(0) = 7$ ,  $y_4(0) = 8$ ,  $z_1(0) = 1$ ,  $z_2(0) = 4$ ,  $z_3(0) = -2$  和  $z_4(0) = 3$ 。保密通信的仿真结果如图 2 所示。其中, 图 2(a)描绘的是信息信号  $\lambda(t)$ 。图 2(b)描绘的是传输信号  $s(t)$ 。图 2(c)描绘的是恢复信号  $\tilde{\lambda}(t)$ 。在图 2(d)中展示了信息信号和恢复信号之间的误差信息。从图 2(d)中不难看出, 信息信号已正确恢复。



**Figure 2.** (a) The information signal  $\lambda(t)$ ; (b) The transmitted signal  $s(t)$ ; (c) The recovered signal  $\tilde{\lambda}(t)$ ; (d) The error signal  $\tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$

**图 2.** (a) 信息信号  $\lambda(t)$ ; (b) 传输信号  $s(t)$ ; (c) 恢复信号  $\tilde{\lambda}(t)$ ; (d) 恢复误差  $\tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$

#### 4.2. 离散信号保密通信仿真

本小节的仿真将采用图 3 所示的彩色图像作为信息信号。首先, 彩色照像将被调制成一维离散信号  $\lambda(t)$ 。信息信号的振幅控制器选择为  $\Theta = 0.01$ 。系统(18)中的参数值仍然设置成  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 12$ ,  $d = 7$ ,  $r = 0.08$ ,  $a_1 = 10$ ,  $b_1 = 28$ ,  $c_1 = \frac{8}{3}$  和  $d_1 = 1.3$ 。系统(18)和系统(21)的初始值也设置成  $x_1(0) = -12$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_3(0) = 3$ ,  $x_4(0) = -5$ ,  $y_1(0) = 3$ ,  $y_2(0) = 5$ ,  $y_3(0) = 7$ ,  $y_4(0) = 8$ ,  $z_1(0) = 1$ ,  $z_2(0) = 4$ ,  $z_3(0) = -2$ ,  $z_4(0) = 3$ 。图 4~6 展示了保密通信的仿真结果。图 4(a)展示了原始图像的时间序列; 图 4(b)展示了经过算法加密后的传输信号。图 5 为所恢复的图片。从该图中不难发现, 图片已经被正确的恢复。图 6 展示了恢复图像的时间序列  $\tilde{\lambda}(t)$  和误差信号  $\tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$ , 进一步表明了加密图片已经被完全的恢复。



Figure 3. The original picture

图 3. 原始图像

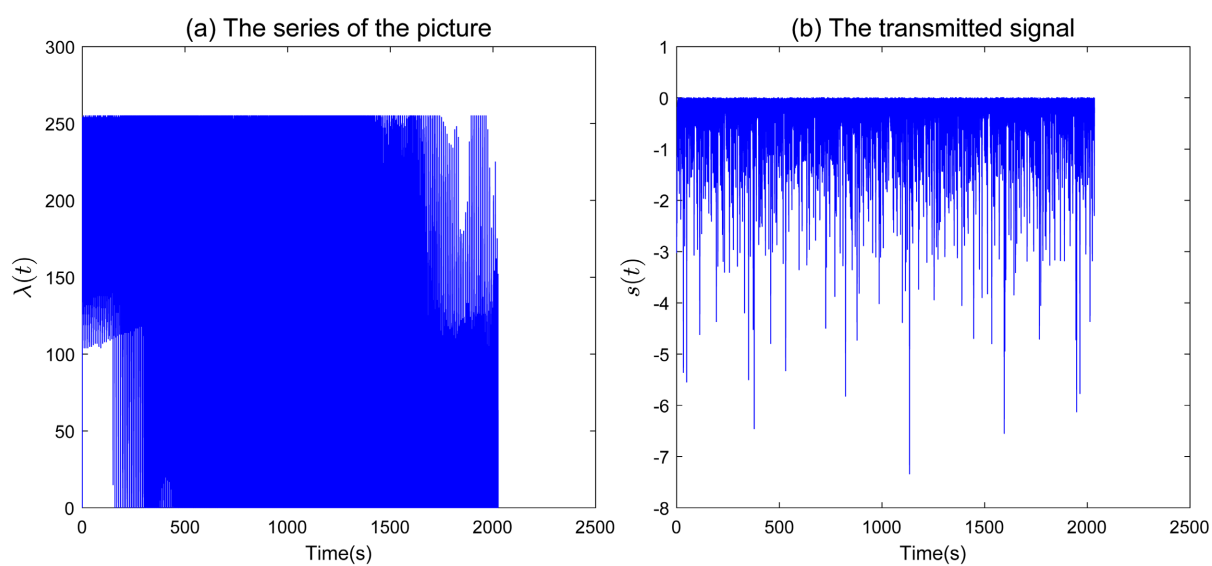


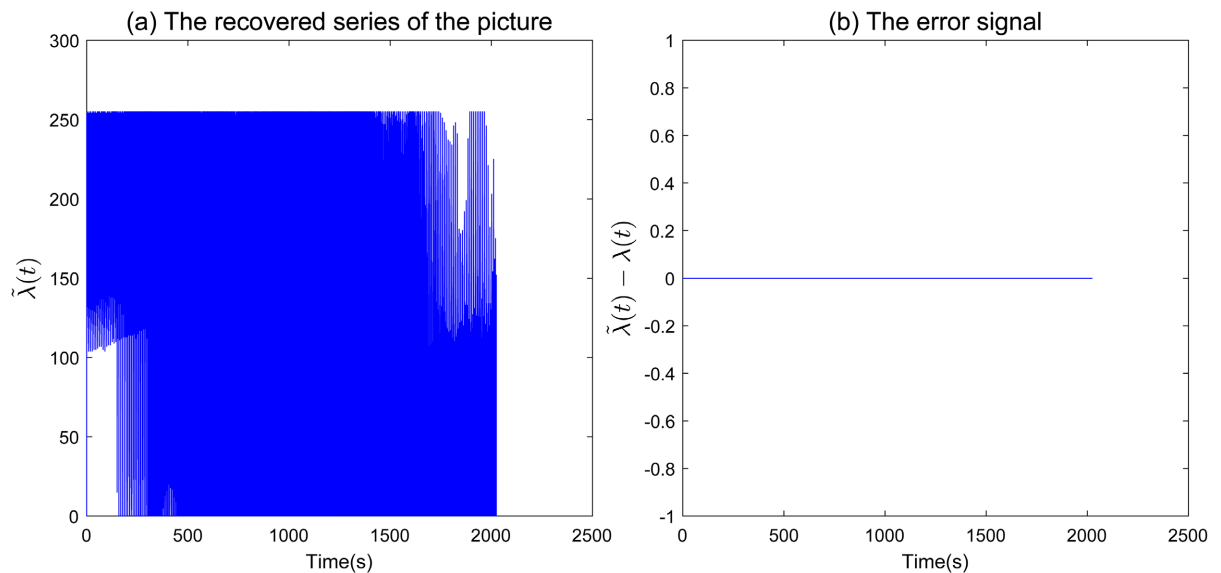
Figure 4. (a) Time series of the original picture; (b) The transmitted signal of the picture

图 4. (a) 原始图像的时间序列; (b) 图像的传输信号



Figure 5. The recovered picture

图 5. 恢复图像



**Figure 6.** (a) Recovered time series of the picture  $\tilde{\lambda}(t)$ ; (b) The error signal  $\tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$

**图 6.** (a) 恢复图像的时间序列  $\tilde{\lambda}(t)$ ; (b) 恢复误差  $\tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$

## 5. 讨论

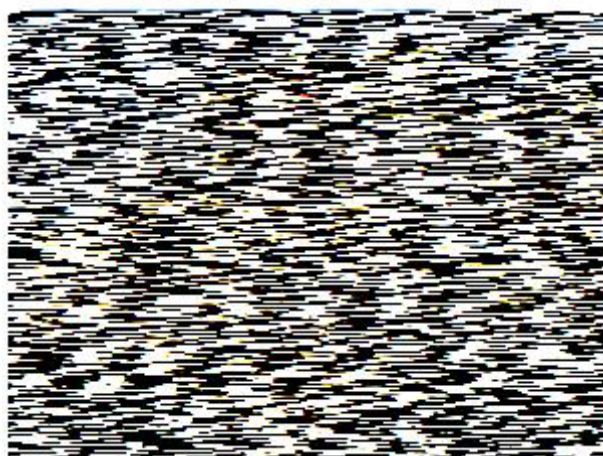
对于保密通信算法而言，安全性是非常重要的。如在文献[27]中所提及的，由于使用了常参量系统，使得文献[15] [16]中提出的算法缺乏安全性。而本文设计的算法在加密系统和解密系统中引入了参数扰动因子，使系统转化成变参数系统。众所周知，混沌系统对参数是高度敏感的，参数的微小扰动都可能会给状态变量带来巨大差异。因此，接收者必须准确了解所有参数扰动因子，否则将无法正确提取信息信号。为了展示这一特性，本文进行了对比试验。由第 3 节设计的算法可知，要从传输信号中正确恢复信息信号，必须先了解以下信息：

- (1) 加密系统和解密系统的结构；
- (2) 投影矩阵函数  $h(y)$  和多重投影矩阵  $M$  的形式和值；
- (3) 系统参数值及其对应的扰动因子。

这些信息组成了算法的密钥空间。假设攻击者已知了除参数  $a$  的扰动因子之外的所有上述信息，若使用  $\alpha_2(\tilde{a}) = (0.1 + 10^{-16})\sin(2t+1)$  来估计  $\alpha_2(a) = 0.1\sin(2t+1)$  的值并进行解密，攻击者所得的恢复图像如图 7 所示。从图 7 中可知，尽管攻击者估计的参数扰动因子的精度已达  $10^{-16}$ ，但仍无法成功解密。实际上，完成解密总共有 8 个参数扰动因子需要估计。这意味着暴力破解需要大量时间才能达到目的。同时，攻击者还需要尝试猜测投影矩阵函数  $h(y)$  的形式，以及估算多重投影矩阵  $M$  的值。除此之外，对攻击者来说，加密系统和解密系统的结构也是未知的。因此，算法的密钥空间相当大，足以保证算法的高安全性。此外，文献[16]中的算法在实现同步方面非常耗时。相比之下，我们的算法更高效。文献[28]中提出的算法虽然基于 GFPS，但是该方法并不适用于无法进行微分的离散信号。相比之下，我们的算法既能实现连续信号也能实现离散信号的保密通信。与此同时，我们的算法基于 multi-FPS，意味着两个同步系统之间的同步行为更复杂，进一步提高了算法的安全性。

## 6. 结论

本文首次提出了一种名为多重函数投影同步的混沌同步方案。此同步方案比许多现有方案更加广义。



**Figure 7.** The recovered picture with the wrong key  
**图 7.** 使用错误密钥的恢复图像

在此方案下,两个混沌系统之间的同步行为更复杂。随后,基于李雅普诺夫稳定性理论,构造了 multi-FPS 的控制器并实现了超混沌 Chen 系统和超混沌 Lorenz 系统之间的 multi-FPS。证明了控制器是有效和可行的。基于所提出的同步方案并引入参数扰动因子,本文设计了一种新型的保密通信算法。相比于[15] [16],本文算法的安全性得到了明显的加强。同时,算法的效率并未降低,还能实现连续信号和离散信号的保密通信。第 4 节中的数值模拟和第 5 节中的讨论进一步表明所提出的算法是安全、高效的并且具有更好的适用性。因此,本文设计的算法在某些方面比文献[15] [16] [28]中的算法有更好的表现。所提出的同步方案和所设计的保密通信算法具有一定的理论意义和应用价值。

## 致 谢

感谢湖南省大学生创新创业训练项目对本文的支持。

## 基金项目

湖南省大学生创新创业训练项目(编号: S202210555197, S202310555281)资助的课题。

## 参考文献

- [1] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **64**, 821-824. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.64.821>
- [2] Agiza, H.N. (2004) Chaos Synchronization of Lü Dynamical System. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **58**, 11-20. <https://doi.org/10.1016/j.na.2004.04.002>
- [3] Rosenblum, M.G., Pikovsky, A.S. and Kurths, J. (1996) Phase Synchronization of Chaotic Oscillators. *Physical Review Letters*, **76**, 1804-1807. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.76.1804>
- [4] Chen, Y., Chen, X. and Gu, S. (2007) Lag Synchronization of Structurally Nonequivalent Chaotic Systems with Time Delays. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **66**, 1929-1937. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.02.033>
- [5] Wang, Y. and Guan, Z. (2006) Generalized Synchronization of Continuous Chaotic System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **27**, 97-101. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.12.038>
- [6] El-Dessoky, M.M. (2010) Anti-Synchronization of Four Scroll Attractor with Fully Unknown Parameters. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 778-783. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.01.048>
- [7] Chen, D., Sun, J. and Huang, C. (2006) Impulsive Control and Synchronization of General Chaotic System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 213-218. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.057>
- [8] Mainieri, R. and Rehacek, J. (1999) Projective Synchronization in Three-Dimensional Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **82**, 3042-3045. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.82.3042>

- [9] Xu, D. (2001) Control of Projective Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review E*, **63**, Article ID: 027201. <https://doi.org/10.1103/physreve.63.027201>
- [10] Li, G. (2007) Modified Projective Synchronization of Chaotic System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, 1786-1790. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.12.009>
- [11] Runzi, L. (2008) Adaptive Function Project Synchronization of Rössler Hyperchaotic System with Uncertain Parameters. *Physics Letters A*, **372**, 3667-3671. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.02.035>
- [12] Sudheer, K.S. and Sabir, M. (2009) Adaptive Function Projective Synchronization of Two-Cell Quantum-CNN Chaotic Oscillators with Uncertain Parameters. *Physics Letters A*, **373**, 1847-1851. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.03.052>
- [13] Du, H., Zeng, Q. and Wang, C. (2009) Modified Function Projective Synchronization of Chaotic System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **42**, 2399-2404. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.120>
- [14] Yu, Y. and Li, H. (2010) Adaptive Generalized Function Projective Synchronization of Uncertain Chaotic Systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 2456-2464. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.08.002>
- [15] Cuomo, K.M. and Oppenheim, A.V. (1993) Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications. *Physical Review Letters*, **71**, 65-68. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.71.65>
- [16] Lu, J., Wu, X. and Lü, J. (2002) Synchronization of a Unified Chaotic System and the Application in Secure Communication. *Physics Letters A*, **305**, 365-370. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(02\)01497-4](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(02)01497-4)
- [17] Kocarev, L. and Parlitz, U. (1995) General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication. *Physical Review Letters*, **74**, 5028-5031. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.5028>
- [18] Parlitz, U., Kocarev, L., Stojanovski, T. and Preckel, H. (1996) Encoding Messages Using Chaotic Synchronization. *Physical Review E*, **53**, 4351-4361. <https://doi.org/10.1103/physreve.53.4351>
- [19] Xiao, J.H., Hu, G. and Qu, Z. (1996) Synchronization of Spatiotemporal Chaos and Its Application to Multichannel Spread-Spectrum Communication. *Physical Review Letters*, **77**, 4162-4165. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.77.4162>
- [20] Sundar, S. and Minai, A.A. (2000) Synchronization of Randomly Multiplexed Chaotic Systems with Application to Communication. *Physical Review Letters*, **85**, 5456-5459. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.85.5456>
- [21] García-Ojalvo, J. and Roy, R. (2001) Spatiotemporal Communication with Synchronized Optical Chaos. *Physical Review Letters*, **86**, 5204-5207. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.5204>
- [22] Parlitz, U., Chua, L.O., Kocarev, L., Halle, K.S. and Shang, A. (1992) Transmission of Digital Signals by Chaotic Synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **02**, 973-977. <https://doi.org/10.1142/s0218127492000562>
- [23] Tao Yang, and Chua, L.O. (1996) Secure Communication via Chaotic Parameter Modulation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **43**, 817-819. <https://doi.org/10.1109/81.536758>
- [24] Hu, J., Han, Y. and Zhao, L. (2010) Synchronizing Chaotic Systems Using Control Based on a Special Matrix Structure and Extending to Fractional Chaotic Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 115-123. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.03.017>
- [25] Yan, Z. (2005) Controlling Hyperchaos in the New Hyperchaotic Chen System. *Applied Mathematics and Computation*, **168**, 1239-1250. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.10.016>
- [26] Jia, Q. (2007) Projective Synchronization of a New Hyperchaotic Lorenz System. *Physics Letters A*, **370**, 40-45. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.05.028>
- [27] Grzybowski, J.M.V., Rafikov, M. and Balthazar, J.M. (2009) Synchronization of the Unified Chaotic System and Application in Secure Communication. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 2793-2806. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.09.028>
- [28] Wu, X., Wang, H. and Lu, H. (2011) Hyperchaotic Secure Communication via Generalized Function Projective Synchronization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 1288-1299. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.09.026>