

基于彩虹散射的液滴参数测量研究

朱世杰

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年2月25日; 录用日期: 2025年3月24日; 发布日期: 2025年4月1日

摘要

本研究提出了一种结合几何光学理论和实验测量的综合方法, 用于分析彩虹散射图案以表征液滴。首先, 采用几何光学近似方法, 通过追踪不同阶光线在液滴内的轨迹来计算其彩虹角, 而艾里理论阐明了彩虹条纹的干涉机制。设计了一个实验系统来捕获液滴的彩虹散射图案。采集的图像经过滤波和归一化处理, 提取第一和第二波谷的角度, 以反演液滴粒径和折射率。实验结果表明, 一阶彩虹角的测量值与理论预测之间的偏差小于0.25%, 验证了光学反演模型在球形液滴参数测量中的可靠性。然而, 研究也发现现有模型存在适用范围限制: 当液滴椭球度超过0.66时, 粒径反演误差显著增加至3.5%; 而在椭球度小于0.5时, 折射率误差则低于0.0004%。

关键词

激光测量, 几何光学, 液滴表征, 彩虹图案

Research on Droplet Parameter Measurement Based on Rainbow Scattering

Shijie Zhu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 25th, 2025; accepted: Mar. 24th, 2025; published: Apr. 1st, 2025

Abstract

This study proposes a comprehensive method combining geometric optics theory and experimental measurements for analyzing rainbow scattering patterns to characterize droplets. Firstly, the geometric optical approximation method is used to calculate the rainbow angle of the droplet by tracking the trajectories of different order rays inside the droplet, and Airy's theory elucidates the

interference mechanism of rainbow fringes. Designed an experimental system to capture rainbow scattering patterns of liquid droplets. The collected images are filtered and normalized to extract the angles of the first and second valleys, in order to invert the droplet size and refractive index. The experimental results show that the deviation between the measured value of the first-order rainbow angle and the theoretical prediction is less than 0.25%, which verifies the reliability of the optical inversion model in measuring the parameters of spherical droplets. However, research has also found that existing models have limitations in their applicability: when the droplet ellipsoid degree exceeds 0.66, the particle size inversion error significantly increases to 3.5%; When the ellipticity is less than 0.5, the refractive index error is less than 0.0004%.

Keywords

Laser Measuring, Geometric Optics, Droplet Characterization, Rainbow Pattern

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

雾化技术被广泛应用于多个领域，包括燃烧工程、医药制造、农业生产、消防系统以及日常生活中的各种场景[1]。在液滴测量领域，彩虹测量法优势显著[2]，它能够同步测量液滴的粒径、粒径分布、组分以及温度等多项参数。该方法主要分为标准彩虹方法和全场彩虹方法，前者聚焦于单液滴的测量，后者则针对液滴群开展测量工作。

Roth 等人[3]最早提出了彩虹测量方法，他们借助 CCD 阵列记录下液滴彩虹区域光散射的干涉图样以及彩虹角。之后，通过分析干涉图样的条纹间距获取液滴直径，依据彩虹角的位置得到液滴温度。不过，在 Roth 提出该方法之前，就已经有关于液滴不同参数引发不同彩虹散射现象的研究。例如，Marston 等人[4]早在 1984 年就通过实验，观察到平行光照射下椭球形液滴一阶彩虹区域出现双曲脐条纹和尖点焦散，并深入研究了它们随液滴长轴和短轴之比的变化规律。紧接着，Nye [5]在 Marston 实验的基础上，计算出双曲脐条纹尖点焦散出现时液滴的临界长轴和短轴之比，不仅定量证明了双曲脐条纹与倾斜光线有关，还预测了当时尚未被观测到的唇现象。随着理论研究的逐步深入，颗粒测量技术也取得了相应的发展。洛伦兹 - 米氏理论(Lorenz-Mie Theory, LMT)给出了平行光照射下均匀液滴散射场的严格解。随着时间的推移，入射光束的形状从平行光束拓展为高斯光束或其他有形光束，形成了广义洛伦兹 - 米氏理论(Generalized Lorenz-Mie Theory, GLMT)，这一理论的发展有力地推动了颗粒测量技术的进步[6]。

本课题将研究液滴彩虹散射，实现液滴的粒径、折射率等参数测量，通过实验拍摄其彩虹图案，得到光强分布数据，根据公式推导出液滴的相关参数，并分析彩虹图像中的特征点与参数之间的影响关系。

2. 基本原理

2.1. 球形颗粒散射的几何光学

Van de Hulst [5]描述了几何光学近似的理论，确定了入射光线在颗粒内部走过的路径，并给出了 $p = 2$ 阶光线的光强计算。图 1 为几何光学近似的示意图。

我们假定入射光为平行光，入射角为 θ_i ，光线的折射角为 θ_r 每经过一次折射偏转 $i\cdot\theta_r$ ，每经过一次反射偏转 $\pi-2\theta_r$ ，则 p 阶散射角为：

$$\theta_p = 2(\theta_i - \theta_r) + (p-1)(\pi - 2\theta_r) = (p-1)\pi + 2\theta_i - 2p\theta_r \quad (1)$$

根据折射定律:

$$\sin \theta_i = m \sin \theta_r \quad (2)$$

可得

$$\theta_p = (p-1)\pi + 2\theta_i - 2p \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{m}\right) \quad (3)$$

当 $p=3$ 时,

$$\theta_p = 2\pi + 2\theta_i - 6 \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{m}\right) \quad (4)$$

在上述公式中, 有一个入射角可以使偏转角最小化。最小偏转角称为几何光学彩虹角。

令 θ_p 取极小值

$$\frac{d\theta_p}{d\theta_i} = 2 - 6 \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{m^2 - \sin^2 \theta_i}} = 0 \quad (5)$$

$$\theta_{i\min} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{9-m^2}{8}}\right) \quad (6)$$

$$\theta_{p\min} = 2\pi + 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{9-m^2}{8}}\right) - 6\arcsin\left(\sqrt{\frac{9-m^2}{8m^2}}\right) \quad (7)$$

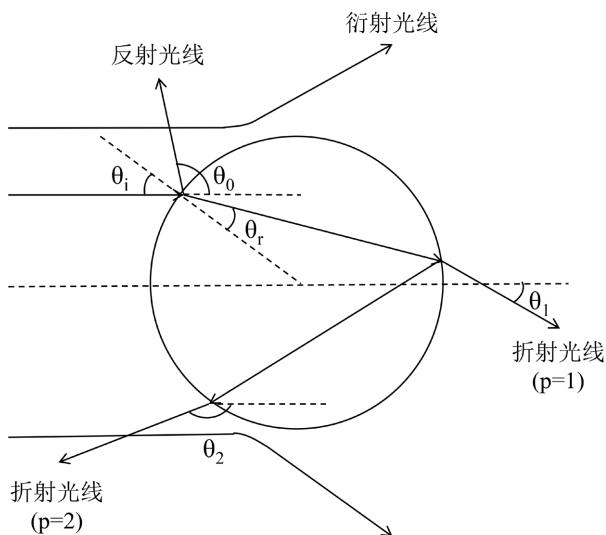


Figure1. Schematic diagram of geometric optics approximation
图 1. 几何光学近似示意图

2.2. Airy 理论

Airy [6]理论对彩虹区域光散射强度分布给出了更简单的近似计算方法, 但仅限于球形颗粒的测量:

$$I = \varepsilon_j^2 \left[81/16\pi^2 h^4 \right]^{1/6} \times \sin(\theta_{rg}) \alpha^{2/3} F^2(z) / \cos \theta_{rg}, j=1,2 \quad (8)$$

其中下标 $j=1$ 表示垂直极化分量, $j=2$ 表示光相对于散射平面的平行极化分量, $F(z)$ 为 Airy 积分, 也称为彩虹积分

$$F(z) = \int_0^\infty \cos[\pi(zt - t^3)/2] dt \quad (9)$$

上式中的参数 z 定义如下:

$$z = (-q) \left(\frac{12}{h\pi^2} \right)^{1/3} \alpha^{2/3} (\theta - \theta_{rg}) \quad (10)$$

$$h = \frac{(p^2 - 1)^2 (p^2 - m^2)^{1/2}}{p^2 (m^2 - 1)^{3/2}} \quad (11)$$

$$\alpha = 2\pi a / \lambda \quad (12)$$

与 Airy 积分相关的函数 $Ai(x)$ 如下:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(xv + v^3/3) dv \quad (13)$$

将公式(2-10)代入(2-13)中, 可以得到:

$$z = \pm \left[\frac{12}{\pi^2} \frac{p^2 (m^2 - 1)^{3/2}}{(p^2 - 1)^2 (p^2 - m^2)^{1/2}} \right]^{1/3} \alpha^{2/3} (\theta - \theta_{rg}) \quad (14)$$

根据 Airy 积分, 前两个峰值出现在 $Z_1 = 1.0874$ 和 $Z_2 = 3.4668$ 处。对二阶彩虹有:

$$\begin{cases} z_1 = \left[\frac{12}{\pi^2} \frac{p^2 (m^2 - 1)^{3/2}}{(p^2 - 1)^2 (p^2 - m^2)^{1/2}} \right]^{1/3} \alpha^{2/3} (\theta_{rg} - \theta_1) \\ z_2 = \left[\frac{12}{\pi^2} \frac{p^2 (m^2 - 1)^{3/2}}{(p^2 - 1)^2 (p^2 - m^2)^{1/2}} \right]^{1/3} \alpha^{2/3} (\theta_{rg} - \theta_2) \end{cases} \quad (15)$$

由(2-15)的比值可以得到:

$$\frac{\theta_{rg} - \theta_1}{\theta_{rg} - \theta_2} = z_1 / z_2 = C \quad (16)$$

整理上式得:

$$\theta_{rg} = \frac{C\theta_2 - \theta_1}{C - 1} \quad (17)$$

可以得到二阶彩虹角($p = 3$)与颗粒相对折射率 m 的关系公式:

$$\theta_{rg} = 6 \sin^{-1} \sqrt{\frac{9-m^2}{8m^2}} - 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{9-m^2}{8}} \quad (18)$$

由(2-15)还可以得到:

$$z_2 - z_1 = \left[\frac{12}{\pi^2} \frac{p^2 (m^2 - 1)^{3/2}}{(p^2 - 1)^2 (p^2 - m^2)^{1/2}} \right]^{1/3} \alpha^{2/3} (\theta_1 - \theta_2) \quad (19)$$

整理上式得：

$$\alpha^{2/3} = \frac{z_2 - z_1}{(\theta_1 - \theta_2)} \left[\frac{\pi^2 (p^2 - 1)^2 (p^2 - m^2)^{1/2}}{12 p^2 (m^2 - 1)^{3/2}} \right]^{1/3} \quad (20)$$

将式(2-12)代入上式(2-20)中，又有 $p = 3$ ，得到基于二阶彩虹分布反演颗粒半径的计算公式：

$$a = \frac{2\lambda}{3\sqrt{3}} \left(\frac{z_2 - z_1}{(\theta_1 - \theta_2)} \right)^{3/2} \left[\frac{(9 - m^2)^{1/2}}{(m^2 - 1)^{3/2}} \right]^{1/2} \quad (21)$$

3. 实验系统设计

3.1. 实验平台搭建

平台搭建用到了以下主要仪器：氦氖激光器(1)、超声悬浮仪(2)、透镜镜筒(4)、接收器 CCD (5)。

图 2 显示了一个用于彩虹粒径测量平台[7]的照片。氦氖激光器(1)发射激光，通过扩束镜(2)照射在搭载超声悬浮仪(3)的旋转云台中间的液滴上，散射出彩虹图案，经过透镜镜筒(4)折射到接收器 CCD (5)上，最后通过数据线(6)链接在电脑上，获得原始图片。同时记录镜头(7)拍下同一时刻的液滴实物图片用于对比分析。

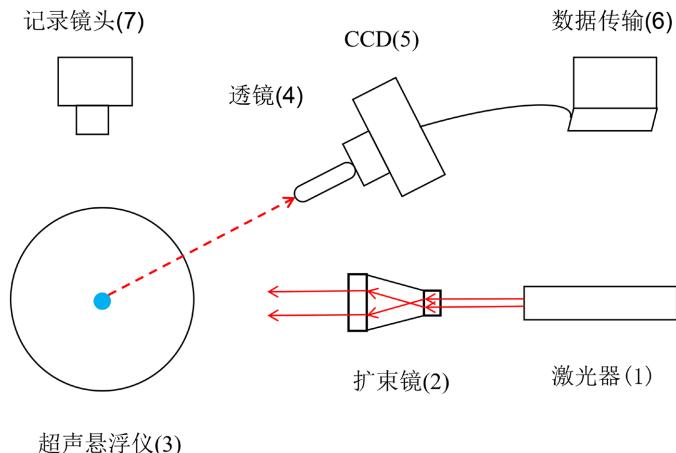


Figure 2. Rainbow particle size measurement platform
图 2. 彩虹粒径测量平台

3.2. 实验步骤

1) 计算各透镜和 CCD 接收器摆放的位置

已知氦氖激光器发射高斯光束的束腰半径为 $200 \mu\text{m}$ 不变，初始设置第一个透镜距离激光器发射口为 20 cm (即物方距离)。根据折射定律算出第二个透镜与第一个透镜的距离(即像方距离)；重复上述操作依次摆放 3 个透镜之间的距离，最后调整超声悬浮仪的位置。

2) 测定 CCD 的接收角度范围

将图 3 中的(3)位置替换为反光镜，利用云台旋转，将激光从 ccd 左边打到右边，读出云台下方刻度的变化量，再扩充 2 倍后再用 180° 减去上述角度即为 CCD 的角度接收范围。

4. 图像处理与粒径反演

4.1. 图像数据处理

将上述实验 CCD (5)中拍到的图像通过数据线导入电脑软件(6)中得到原始图像 3(a)。将其导入 Matlab，得到原始数据矩阵，截取中间数据变化清晰的一行的部分数据，以亮度代表光强作为纵坐标，以偏转角替换成横坐标绘制成图像，并对此图形进行滤波，最后进行归一化得到图 3(b)。

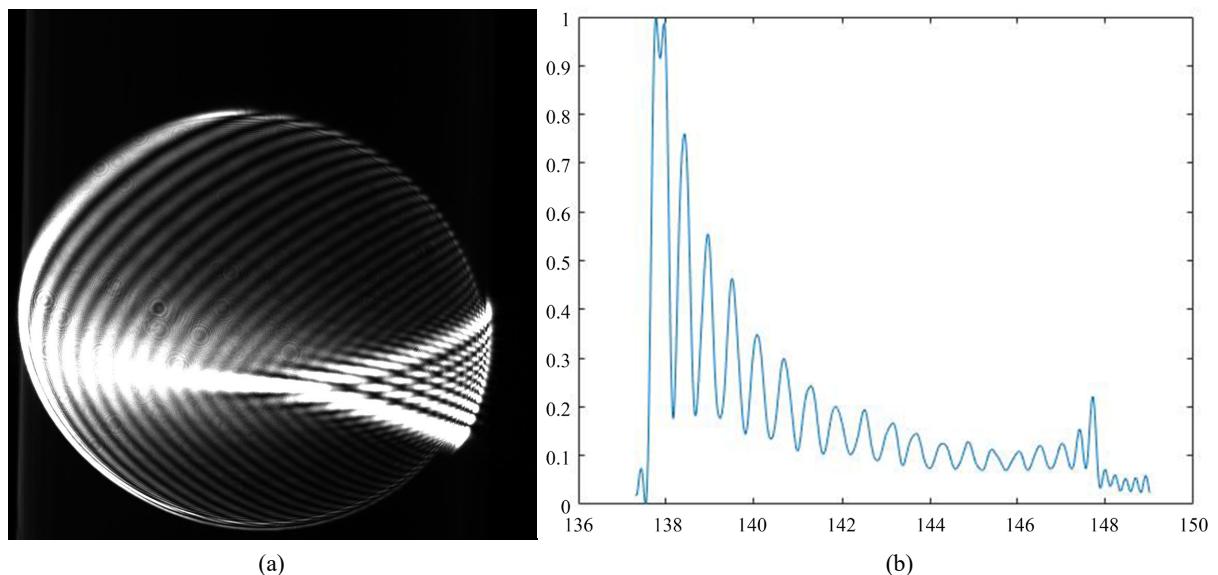


Figure 3. (a) Original image 1; (b) Processed image 1

图 3. (a) 原始图像 1；(b) 处理后图像 1

然后取出第一、第二波谷的横坐标角度，代入(18)和(21)等式子进行计算，反演出折射率为 1.330068 和粒径为 1262.9 微米。折射率误差已小于 0.005%。

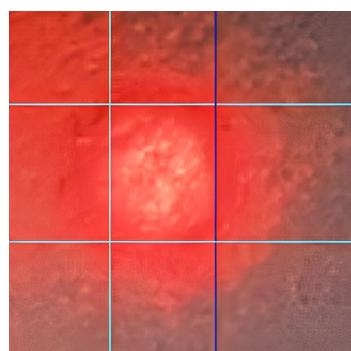


Figure 4. $e = 0.66$ $a = 1259.7 \mu\text{m}$

图 4. 椭球度 $e = 0.66$ 粒径 $a = 1259.7 \mu\text{m}$

同一时间拍下液滴的照片如图 4 所示，放大后以 33 像素为 1 mm，长半轴长为 24 像素，短半轴长为

18 像素，算出椭球度为 0.66，粒径大小为 $1259.7 \mu\text{m}$ 。将反演的粒径与实验实际粒径进行对比分析发现，误差率为小于 0.25%。

4.2. 椭球度对液滴粒径测量的影响

超声悬浮仪能通过改变驻波振动的中心位置从而改变液滴的椭球度。探究椭球度对液滴反演精度的影响，于是更换一个椭球度更小的液滴，重复上述实验。图像原始数据 2 为图 5(a)，处理后图像 2 为图 5(b)。

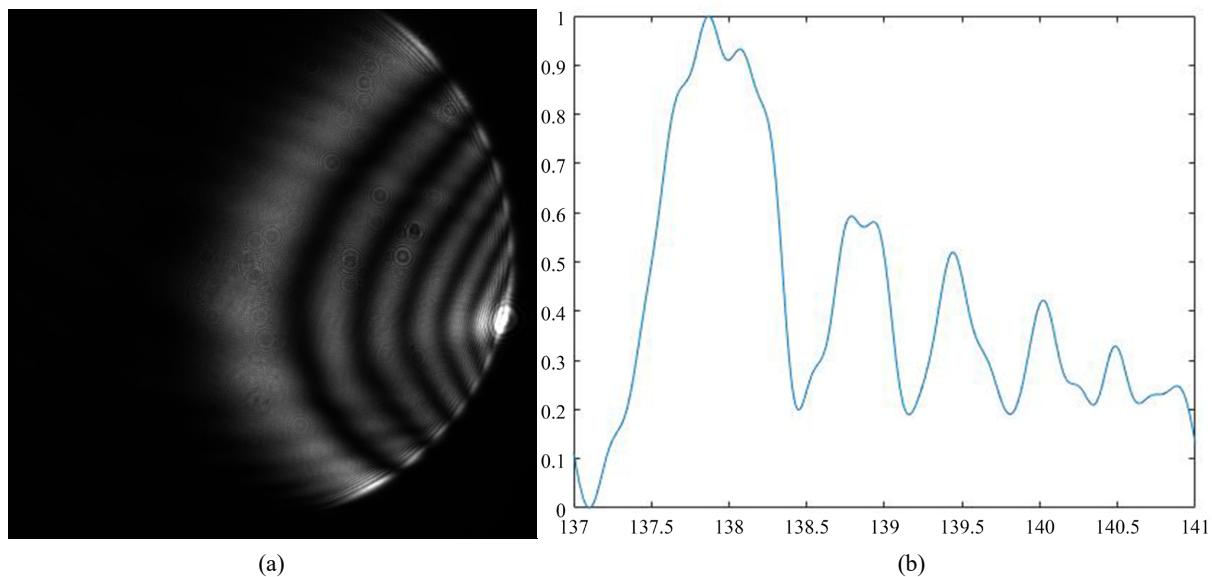


Figure 5. (a) Original image 2; (b) Processed image 2
图 5. (a) 原始图像 2；(b) 处理后图像 2

反演出折射率为 1.330373 和粒径为 981.6 微米。折射率误差已小于 0.02%。

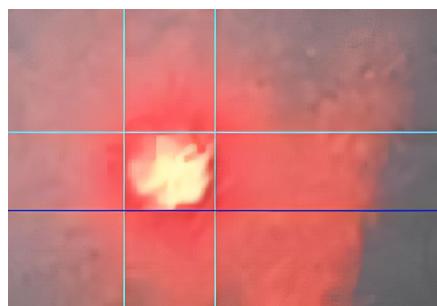


Figure 6. $e = 0.5$ $a = 973.6 \mu\text{m}$
图 6. 椭球度 $e = 0.5$ 粒径 $a = 973.6 \mu\text{m}$

同一时间拍下液滴的照片如图 6 所示，放大后以 21 像素为 1 mm，长半轴长为 11 像素，短半轴长为 9.5 像素，算出椭球度为 0.5，粒径大小为 $973.6 \mu\text{m}$ 。将反演的粒径与实验实际粒径进行对比分析发现，误差率为小于 0.82%。

发现椭球度减小后误差反而增大了，于是更换一个椭球度更大的液滴，重复上述实验。图像原始数据 3 为图 7(a)，处理后图像 3 为图 7(b)。

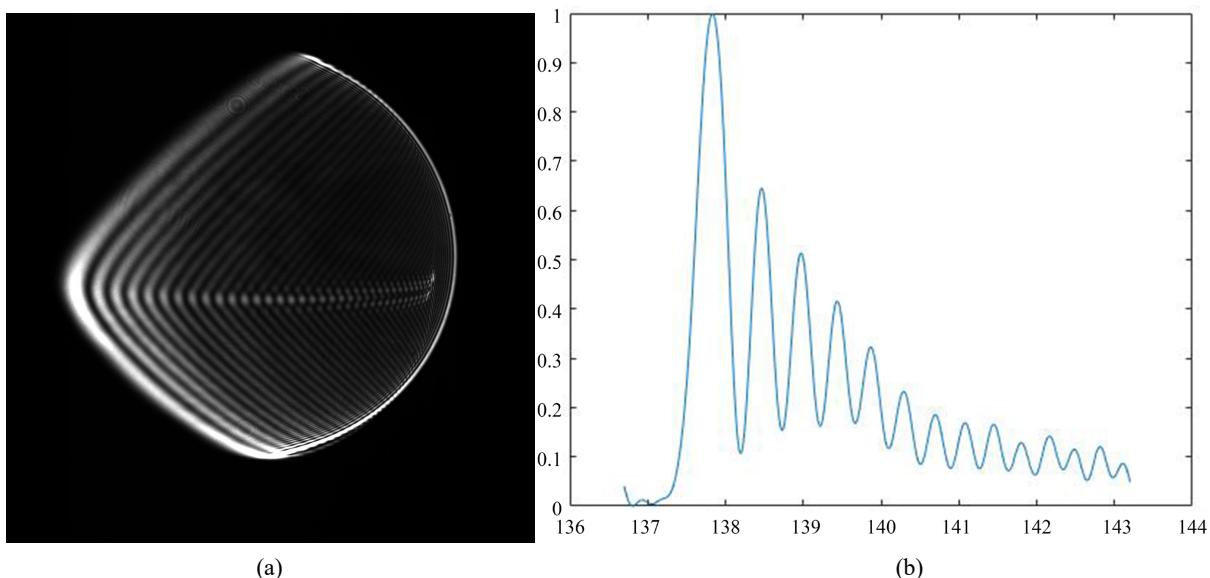


Figure 7. (a) Original image 3; (b) Processed image 3
图 7. (a) 原始图像 3; (b) 处理后图像 3

反演出折射率为 1.330004 和粒径为 1156.7 微米。折射率误差为 0.0004%



Figure 8. $e = 0.77$ $a = 1122.5 \mu\text{m}$

同一时间拍下液滴的照片如图8所示，放大后以20像素为1mm，长半轴长为14像素，短半轴长为9像素，算出椭球度为0.77，粒径大小为122.5μm。将反演的粒径与实验实际粒径进行对比分析发现，误差率为小于3.05%。

综上所述，椭球度大对液滴粒径测量的精确度有影响，椭球度越大对粒径反演精度影响大，误差更大。椭球度越小，对液滴折射率影响更大，误差更小。分析原因可能是椭球度大导致图像的曲率高，波峰波谷之间的数据读取误差较大。

5. 结论

本研究通过理论建模与实验验证相结合的方法，实现了液滴彩虹散射特性的高精度定量表征。基于几何光学近似法建立的路径追踪模型，并通过 Airy 理论揭示了彩虹条纹干涉机制。特别值得关注的是，通过建立图像滤波 - 归一化处理流程提取第一、第二波谷特征参数，实现了粒径与折射率的同步反演，突破了传统方法依赖单一特征参数的局限。实验系统测得的一阶彩虹角与理论预测偏差小于 0.25%，证实了光学反演模型在球形液滴参数测量中的可靠性。

然而，研究也揭示了现有模型的适用范围限制。当液滴椭球度超过 0.66 时，粒径的反演误差急剧增大至 3.5%。椭球度小于 0.5 时，折射率的误差小于 0.0004%。这与前人研究中椭球度对彩虹角等影响的非线性特征相吻合。后续研究可结合二阶彩虹，进一步修正和拓展彩虹散射反演技术的精度的应用维度。

致 谢

衷心感谢我的导师，您严谨的治学态度、深厚的学术造诣与敏锐的科研洞察力深深影响了我对学术的认知。在论文选题、框架设计与理论推导的每个阶段，您始终以高屋建瓴的视角为我指明方向。面对公式推导中的逻辑瓶颈与概念理解上的抽象困惑，您总能用深入浅出的讲解化繁为简，引导我突破思维定式。

感谢师兄、师姐等实验室同门对我毫无保留的帮助。初入课题时，是你们手把手教我搭建模型框架，逐行解析代码中的数学逻辑；面对复杂的公式理论，你们用咖啡厅白板上的推导演示、文献笔记中的彩色批注，将抽象符号转化为具象认知。

纸短情长，寥寥数语难表感激之万一。唯愿以此刻为起点，带着这份馈赠继续探索真理的微光。

参 考 文 献

- [1] Tropea, C. (2011) Optical Particle Characterization in Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **43**, 399-426. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160721>
- [2] Lock, J.A. (2017) Electromagnetic Scattering of a Plane Wave by a Radially Inhomogeneous Sphere in the Short Wavelength Limit. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **202**, 126-135. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2017.07.027>
- [3] Roth, N., Anders, K. and Frohn, A. (1990) Simultaneous Measurement of Temperature and Size of Droplets in the Micrometer Range. *Journal of Laser Applications*, **2**, 37-42. <https://doi.org/10.2351/1.4745251>
- [4] Marston, P.L. and Trinh, E.H. (1984) Hyperbolic Umbilic Diffraction Catastrophe and Rainbow Scattering from Spheroidal Drops. *Nature*, **312**, 529-531. <https://doi.org/10.1038/312529a0>
- [5] Nye, J.F. (1984) Rainbow Scattering from Spheroidal Drops—An Explanation of the Hyperbolic Umbilic Foci. *Nature*, **312**, 531-532. <https://doi.org/10.1038/312531a0>
- [6] Lock, J.A. and Gouesbet, G. (1994) Rigorous Justification of the Localized Approximation to the Beam-Shape Coefficients in Generalized Lorenz-Mie Theory I On-Axis Beams. *Journal of the Optical Society of America A*, **11**, 2503-2515. <https://doi.org/10.1364/josaa.11.002503>
- [7] Marston, P.L. and Trinh, E.H. (1984) Hyperbolic Umbilic Diffraction Catastrophe and Rainbow Scattering from Spheroidal Drops. *Nature*, **312**, 529-531. <https://doi.org/10.1038/312529a0>