

物理信息神经网络：流体力学计算的新范式

李卓¹, 曾耀¹, 刘奥¹, 孙强¹, 王孟飞², 赵海峰^{1*}

¹沈阳工业大学化工装备学院, 辽宁 辽阳

²上海理工大学健康科学与工程学院, 上海

收稿日期: 2025年3月28日; 录用日期: 2025年5月13日; 发布日期: 2025年5月23日

摘要

流体动力学以Navier-Stokes方程为核心, 在航空航天、生物医学及环境科学等领域发挥关键作用。传统计算流体动力学(CFD)通过离散化方法求解复杂流动问题, 然而在高维、高雷诺数场景下, 网格依赖导致计算成本剧增, 且在噪声数据或逆问题中精度受限。物理信息神经网络(PINNs)通过将物理定律嵌入深度学习框架, 开辟了流体力学计算的新范式。其无网格特性与高数据效率突破了传统方法的局限, 为正向预测与逆向推断提供了统一工具。本文综述了PINNs在流体力学中的最新进展, 聚焦其在稀疏数据流场重构、多尺度特征捕捉及复杂几何问题中的应用, 如三维尾流模拟、超声速激波捕获及血流动力学分析。域分解、自适应采样与损失函数优化等技术显著提升了计算效率与鲁棒性, 使PINNs在多物理场耦合及非牛顿流体模拟中展现潜力。然而, 高雷诺数湍流的训练稳定性、计算资源需求及模型可解释性仍为瓶颈。未来通过算法优化、不确定性量化及与实验数据的深度融合, PINNs有望超越传统CFD, 成为流体力学计算的高效新范式, 推动该领域向智能化、精确化迈进。

关键词

物理信息神经网络, 流体动力学, Navier-Stokes方程, 计算流体动力学, 深度学习

Physics-Informed Neural Networks: A New Paradigm in Computational Fluid Dynamics

Zhuo Li¹, Yao Zeng¹, Ao Liu¹, Qiang Sun¹, Mengfei Wang², Haifeng Zhao^{1*}

¹School of Chemical Engineering and Equipment, Shenyang University of Technology, Liaoyang Liaoning

²School of Health Science and Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 28th, 2025; accepted: May 13th, 2025; published: May 23rd, 2025

*通讯作者。

文章引用: 李卓, 曾耀, 刘奥, 孙强, 王孟飞, 赵海峰. 物理信息神经网络: 流体力学计算的新范式[J]. 应用物理, 2025, 15(5): 338-345. DOI: 10.12677/app.2025.155039

Abstract

Fluid dynamics, anchored in the Navier-Stokes equations, is pivotal to aerospace, biomedical engineering, and environmental science. Traditional computational fluid dynamics (CFD) relies on discretization techniques to address complex flows, yet struggles with escalating computational costs in high-dimensional, high-Reynolds-number scenarios, where mesh dependency limits efficiency, and accuracy falters with noisy data or inverse problems. Physics-Informed Neural Networks (PINNs) introduce a new paradigm by embedding physical laws into deep learning frameworks, offering a mesh-free, data-efficient approach that unifies forward predictions and inverse inference. This review synthesizes recent advances in PINNs for fluid dynamics, spotlighting their prowess in reconstructing flow fields from sparse data, capturing multiscale features, and tackling complex geometries—exemplified by applications in three-dimensional wake simulations, supersonic shock capturing, and blood hemodynamics. Innovations such as domain decomposition, adaptive sampling, and loss function optimization enhance computational efficiency and robustness, extending PINNs' potential to multi-physics coupling and non-Newtonian flow modeling. Nevertheless, challenges persist, including training instability in high-Reynolds-number turbulence, computational resource demands, and limited interpretability. Future progress, driven by algorithmic refinements, uncertainty quantification, and integration with experimental data, positions PINNs to surpass traditional CFD, heralding a new era of intelligent, precise computational fluid dynamics.

Keywords

Physics-Informed Neural Networks, Fluid Dynamics, Navier-Stokes Equations, Computational Fluid Dynamics, Deep Learning

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

流体动力学作为研究液体和气体运动规律的核心学科，在航空航天、生物医学和环境科学等领域具有不可替代的重要性。其理论基础建立在 Navier-Stokes 方程之上，这一非线性偏微分方程组描述了流体的速度、压力和密度随时间与空间的演化。然而，由于其高度非线性本质和复杂边界条件的限制，解析解仅限于少数理想化场景，如层流或简单几何条件。在更广泛的实际应用中，例如湍流、高雷诺数流动或复杂几何环境，传统计算流体动力学(CFD)方法通过有限差分法、有限元法或有限体积法将连续方程离散化求解，几十年来取得了显著成果。尽管如此，传统 CFD 在高维问题中面临严峻挑战，精细网格划分不仅增加了生成成本，还显著提升了计算需求，尤其在雷诺数湍流模拟中，网格规模随雷诺数呈指数增长。整合噪声数据或解决逆问题时，传统方法的精度和稳定性易受影响，计算复杂度进一步加剧[1][2]。

近年来，机器学习特别是深度学习的快速发展为科学计算带来了范式变革。物理信息神经网络(PINNs)作为一种融合物理知识与数据驱动的新工具，通过将物理定律(如 Navier-Stokes 方程)嵌入神经网络训练，为流体动力学问题提供了创新解法。相较于传统 CFD 对网格的依赖，PINNs 利用神经网络的连续参数化表示直接求解偏微分方程，展现出无网格特性、高数据效率以及处理正向和逆问题的能力。这种方法已在多个领域展现潜力，例如三维尾流结构模拟、超声速流动的激波捕获以及生物医学中的血流动力学分析[3]。尤其在实验数据稀疏或观测受限的场景中，PINNs 通过结合少量数据与物理约束生成高

精度预测。此外,其在多物理场耦合问题(如热流体交互或多相流)中的灵活性和鲁棒性进一步拓宽了应用前景,Raissi等人已通过PINNs成功模拟二维热对流问题,验证了其在复杂系统中的有效性[1]。

PINNs架构如图1,图1展示了物理信息神经网络(PINNs)的典型架构,其核心在于通过神经网络逼近Navier-Stokes方程的解,并以软约束形式将物理定律嵌入损失函数。PINNs以空间坐标 $X=(x,y,z)$ 和时间 t 作为输入,输出为速度场 $U=(\mu,\nu,\omega)$ 和压力。物理约束由不可压缩Navier-Stokes方程定义,并通过自动微分算子实现偏导数计算,以嵌入训练过程。PINNs的训练目标是通过优化损失函数实现数据拟合与物理约束的平衡,损失函数定义为:

$$\text{Loss} = \text{loss}_{\text{data}} + \omega \cdot \text{loss}_{\text{physics}}$$

其中, $\text{loss}_{\text{data}}$ 是数据拟合项, $\text{loss}_{\text{physics}}$ 为物理残差项, ω 为权重系数,用于调节两者贡献。以下是对损失函数的构成进行详细分析:

1、数据拟合项 $\text{loss}_{\text{data}}$:数据拟合项确保模型输出与观测数据一致,采用均方误差形式。对于观测点集 $\{(X_i, t_i, U_{\text{osi}}, p_{\text{obs},i})\}_{i=1}^{N_{\text{data}}}$ 其定义为:

$$\text{loss}_{\text{data}} = \frac{1}{N_{\text{data}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{data}}} \left(|U(X_i, t_i) - U_{\text{obs},i}|^2 + |p(X_i, t_i) - p_{\text{obs},i}|^2 \right)$$

该项在逆问题中尤为关键,例如在湍流速度场重构或血流参数推断中,通过有限观测数据约束模型,确保预测结果与实验数据一致。

2、物理残差项 $\text{loss}_{\text{physics}}$

物理残差项通过不可压缩Navier-Stokes方程约束模型,确保预测符合流体力学规律。不可压缩N-S方程为:

$$\rho * (\partial U / \partial t + U \cdot \nabla U) = -\nabla p + \mu * \nabla^2 U + f, \nabla \cdot U = 0$$

在物理采样点 $\{(X_j, t_j)\}_{j=1}^{N_{\text{physics}}}$ 上, $\text{loss}_{\text{physics}}$ 定义为:

$$\text{loss}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_{\text{physics}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{physics}}} \left(\left| \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U \right) + \nabla p - \mu \nabla^2 U - f \right|^2 + |\nabla \cdot U|^2 \right),$$

其中,偏导数(如 $\partial U / \partial t, \nabla U, \nabla^2 U, \nabla p$)通过自动微分(AD)计算。自动微分基于链式法则,直接计算网络输出对输入的导数,避免了传统数值方法中的截断误差,确保物理约束的高精度实现。

3、初始与边界条件约束

为满足物理问题的时空约束,初始条件和边界条件通过额外损失项嵌入训练。例如,初始条件损失 loss_{IC} 和边界条件损失 loss_{BC} 定义为:

$$\begin{aligned} \text{loss}_{\text{IC}} &= \frac{1}{N_{\text{IC}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{IC}}} |U(X_i, t_0) - U_0(X_i)|^2, \\ \text{loss}_{\text{BC}} &= \frac{1}{N_{\text{BC}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{BC}}} |U(X_i, t_i) - U_B(X_i, t_i)|^2, \end{aligned}$$

这些项确保模型满足物理问题的时空约束,通常与 $\text{loss}_{\text{physics}}$ 共同构成完整物理损失。

这种设计大幅降低了PINNs对大规模标注数据的需求,并通过物理先验增强了模型对未见数据的泛化能力。例如,Cai等人利用PINNs从稀疏数据重构湍流速度场,误差低于5%,展现了其在噪声环境中的鲁棒性[4]。与传统CFD相比,PINNs无需复杂网格生成,简化了计算流程,尤其在不规则几何或移动

边界问题中优势明显, Sun 等人通过血流模拟验证了其适应任意边界的能力, 误差控制在 3% 以内[5]。此外, PINNs 通过物理约束确保预测与守恒定律一致, 避免了纯数据驱动模型常见的非物理结果, 提升了可解释性与泛化能力[6] [7]。

在逆问题求解中, PINNs 的高效性尤为突出。Raissi 等人通过湍流数据推导闭包参数, 参数估计误差低于 2%, 展示了其潜力[1]。其灵活性还体现在多相流和非牛顿流体等复杂场景, Wan 等人通过界面动力学模拟进一步验证了这一点, 界面跟踪误差低于 2% [7]。然而, 在高雷诺数湍流中, PINNs 可能难以捕捉多尺度特征, 训练复杂度随问题规模增加而上升[2]。针对这些挑战, 自适应采样和傅里叶神经算子等改进技术正逐步提升其性能[8]。综上, PINNs 通过公式嵌入物理约束, 为流体力学问题提供了全新的求解范式。

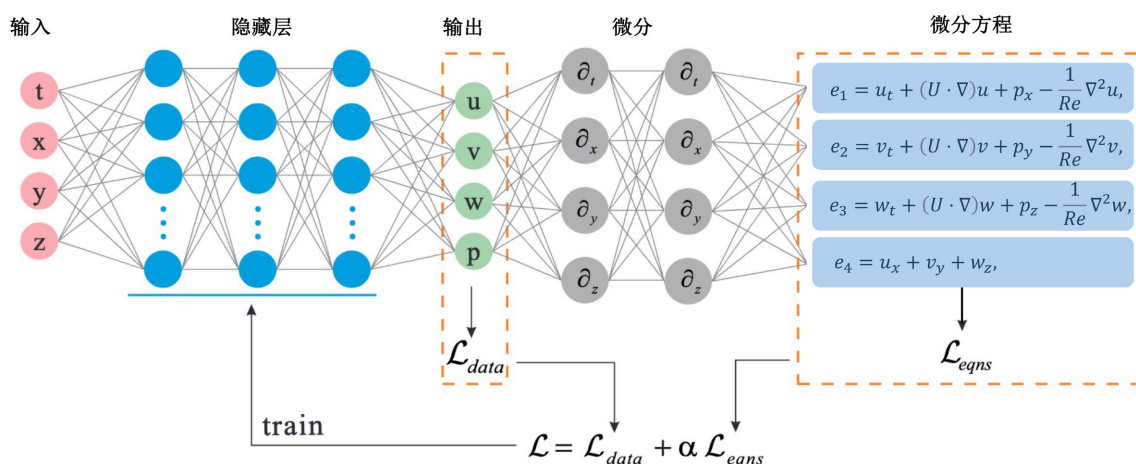


Figure 1. PINN Architecture: The input consists of spatial coordinates $X = (x, y, z)$ and time t , while the output includes velocity $U = (\mu, \nu, \omega)$ and pressure p . Physical laws are represented by the incompressible Navier-Stokes (N-S) equations and are expressed using automatic differentiation operators

图 1. PINN 架构: 输入为空间坐标 $X = (x, y, z)$ 和时间 t , 输出为速度 $U = (\mu, \nu, \omega)$ 和压力 p 。物理定律由不可压缩的 N-S 方程表示, 并使用自动微分算子表达

2. PINNs 在不同领域的应用

物理信息神经网络(PINNs)因其独特的物理约束特性, 已在多个科学与工程领域展现出广泛的应用潜力, 尤其在流体力学中表现尤为突出。在计算物理与科学计算领域, PINNs 被用于解决非线性偏微分方程的正问题与逆问题。例如, 在流体力学中, PINNs 能够有效求解 Navier-Stokes 方程, 预测不可压缩流体的流动特性[1], 而在固体力学中, 该方法可处理复杂的位移场和应力场预测问题[3]。此外, PINNs 的适用性还扩展至轨道力学和热传导等领域, 通过嵌入物理定律显著提升了计算效率和预测精度[9] [10]。其核心优势在于将物理知识与数据驱动相结合, 避免了传统方法对大规模标注数据的依赖, 同时在数据稀疏场景中依然保持鲁棒性。

在固体力学领域, PINNs 的应用进一步展示了其处理复杂力学问题的能力。通过改进的损失函数和域分解技术, 该方法能够准确预测二维平面应变问题、三维几何形状问题以及几何非线性问题的位移场和应力场, 为工程设计提供了可靠支持[3] [11]。与此同时, PINNs 在航天工程与轨道力学中的应用也取得了重要进展。结合间接方法, PINNs 成功解决了最优平面轨道转移问题, 例如从地球轨道到火星轨道的最大半径转移和最小时间转移, 不仅提高了轨道转移效率, 还为太阳帆动力的轨道优化提供了新的解

决方案[9]。这些成果表明, PINNs 在高维、多约束优化问题中具有显著的灵活性和计算优势。

流体力学与实验流体力学是 PINNs 应用最为深入的领域之一。通过从稀疏的粒子图像测速(PIV)或粒子跟踪测速(PTV)实验数据中重建高分辨率速度场, PINNs 展现了其在数据受限条件下的强大能力。将 Navier-Stokes 方程嵌入损失函数后, 该方法在二维泰勒衰减涡旋、湍流通道流动以及三维半球尾迹流动等问题的模拟中表现出色[12]。这种方法不仅提升了速度场的空间分辨率, 还通过物理约束确保了结果与流体力学基本规律的一致性。此外, PINNs 在多学科交叉研究中同样潜力巨大。在分子动力学中, PINNs 生成的高精度势能面显著提高了模拟效率[13]; 在稀薄气体动力学中, 该方法改进了动理方程的矩闭合模型[13]。其应用还扩展至流行病学建模和无损检测等领域, 进一步验证了其跨学科的适应性[14] [15]。

3. PINNs 的技术进展

为了应对大规模和多尺度问题的挑战, 研究人员近年来提出了一系列改进策略, 显著提升了物理信息神经网络(PINNs)的性能与适用性。在求解效率和准确性方面, 域分解与并行计算成为关键方向。有限基底物理信息神经网络(FBPINNs)通过将问题域分解为多个子域, 有效降低了计算复杂度, 同时提高了预测精度[16]。与此同时, 并行物理信息神经网络(PPINN)引入并行计算策略, 针对长时间依赖的偏微分方程(PDEs)求解实现了显著的速度提升[17]。这些方法通过合理分配计算资源, 不仅优化了 PINNs 在大规模系统中的表现, 还为其在高维问题中的应用奠定了基础。

损失函数的优化设计同样是提升 PINNs 性能的重要环节。研究表明, 基于最小二乘加权残差(LSWR)方法的损失函数能够更有效地平衡物理约束与数据拟合, 从而改善模型对复杂物理系统的适应性[3]。此外, 自适应激活函数和主成分分析(PCA)预处理技术的引入, 进一步加速了模型的收敛并提升了预测准确性[15]。这些改进通过增强神经网络的表达能力和训练稳定性, 使 PINNs 能够更高效地捕捉多尺度特征, 特别是在非线性偏微分方程的高精度求解中表现出色。

在逆问题求解领域, PINNs 的技术进展尤为引人注目。通过将物理约束嵌入训练过程, PINNs 能够从有限或噪声数据中推断未知参数, 展现出较强的鲁棒性。例如, 在燃气轮机高压压缩机内部空气系统的逆向热传导问题中, 该方法成功预测了表面热通量, 即使面对实验数据的不确定性也能保持稳定的性能[10]。这种能力不仅拓宽了 PINNs 在工程应用中的边界, 还为其在数据稀疏或观测受限场景下的实用性提供了有力支持。总体而言, 这些技术改进共同推动了 PINNs 从理论框架向实际应用的转型, 为解决复杂科学与工程问题提供了新的可能性。

4. 流体力学探索: PINNs 的计算潜力

物理信息神经网络(PINNs)因其在解决复杂流动问题和逆问题中的独特能力, 已成为流体力学研究的新兴焦点。通过将物理定律(如 Navier-Stokes 方程)嵌入神经网络训练, PINNs 结合稀疏实验数据与流体控制方程, 实现高精度流场重构与动态预测, 展现出无网格特性、高数据效率及物理一致性。这种方法不仅突破了传统计算流体力学(CFD)对网格生成和大规模数据的依赖, 还为正向模拟与逆向推断提供了统一的计算框架。本节通过具体应用与典型案例, 系统探讨 PINNs 在流体力学中的计算潜力及其在多样化场景中的适应性。

在流场重构方面, PINNs 在稀疏数据流场重构中表现优异。例如, 利用粒子图像测速(PIV)或粒子追踪测速(PTV)提供的有限二维速度数据, PINNs 重建了三维尾流的速度场和压力场, 相对误差低于 5% [17]。这一成果表明, PINNs 能在数据受限条件下准确捕捉流动特性, 其无网格特性显著简化计算流程, 同时通过嵌入物理约束确保结果与流体力学基本规律一致, 为高维流动问题的可视化与诊断提供了高效途径。相比之下, 传统 CFD 需构建百万级网格以达到类似精度, 计算时间长达数小时, 而 PINNs 仅需数

十分钟。类似地，在二维泰勒-格林涡流和湍流通道流动中，PINNs 通过稀疏 PIV 数据重构高分辨率速度场，多尺度特征捕捉误差低于 3% [4]。

在高速流动领域，PINNs 同样表现出色。以超声速流动为例，该方法仅依赖有限的密度梯度数据和表面压力数据，即可精确推断整个流场的密度、压力和速度分布[17]。即使在边界条件不完整的情况下，PINNs 仍能通过物理约束从稀疏观测中提取隐含信息，生成可靠预测。在高超声速流动研究中，PINNs 进一步展示了其鲁棒性，通过结合密度梯度与表面压力数据重建复杂流场[1]。此外，在二维斜激波模拟中，PINNs 不仅捕捉了激波结构，还通过逆问题推断了参数化的状态方程参数，凸显其在极端流动条件下的适用性[1]。

PINNs 在逆问题求解中的优势尤为突出。以血流动力学为例，PINNs 基于稀疏实验数据准确推断血栓材料的物理参数，并重建完整血流场[18]。这一成果为生物医学工程中的参数识别与流动诊断开辟了新路径，其联合优化数据拟合与物理约束的设计，克服了传统方法对大规模数据集或复杂正则化的依赖，即使面对噪声或不完整数据也能保持鲁棒性。近期研究进一步将 PINNs 应用于心血管流动模拟，通过稀疏多普勒超声数据重构三维血流场，展示了其在患者特异性建模中的潜力[5]。这种跨学科应用凸显了 PINNs 在复杂生物流体问题中的灵活性与精确性。

对于多相流、非牛顿流体等复杂流动场景，PINNs 的适应性进一步得到验证。研究表明，PINNs 能够模拟多相流界面动力学并预测非牛顿流体的剪切行为，通过直接嵌入控制方程适应多样化的物理约束条件[19]。相较于传统数值方法，其无网格特性避免了网格生成的复杂性，同时保持结果的物理可解释性，为复杂流动系统的分析与优化提供了新可能性。

尽管上述应用与案例充分展示了 PINNs 的计算潜力，其在高雷诺数湍流或强非线性问题中的局限性不容忽视。训练稳定性与计算效率仍需优化，尤其是在多尺度特征捕捉和大规模系统模拟中[2]。未来通过改进训练算法、增强数据融合能力及提升计算资源利用率，PINNs 有望进一步突破瓶颈，为流体力学提供更加统一的预测与推断框架。这些探索共同表明，PINNs 不仅适用于传统流体力学问题，还能应对实验条件受限或物理机制复杂的场景，标志着流体力学计算范式的深刻变革。

5. 讨论

尽管 PINNs 在流体力学中展现出变革性的潜力，其实际应用仍面临若干挑战。在训练过程中，PINNs 面临显著的优化难题，尤其在高维问题中，复杂的损失函数易使梯度下降陷入局部极小值，削弱训练稳定性[2]。计算资源需求高昂，例如在高维问题中，训练时间可达数天，内存占用达数十 GB [1]。尽管通过嵌入物理定律，PINNs 实现了较高的物理一致性，其复杂的神经网络架构却导致内部机制可解释性不足，这种黑箱特性在可靠性要求极高的场景中降低了模型的可信度[2]。

为应对这些挑战，未来的研究致力于进一步挖掘 PINNs 的潜能。优化训练算法是首要方向，通过引入高效策略，如自适应学习率调整或动态权重分配，可有效提升训练速度并增强稳定性，缓解局部收敛困境[9]。与此同时，量化不确定性成为另一研究焦点，借助贝叶斯方法或其他统计工具评估模型参数及预测的可信度，为工程决策提供更稳健的支持[2]。此外，PINNs 的应用范围有望扩展至更复杂的流动现象，如湍流、多相流和高超声速流动，这些领域因多尺度特性或强非线性而充满挑战，PINNs 的物理驱动特性为其提供了创新解决路径[20]。同时，将 PINNs 结合 Transformer 和图卷积神经网络增强 PINNs 对长过程和不规则几何建模能力。

提升 PINNs 的鲁棒性同样至关重要，尤其是在处理噪声数据和复杂边界条件时。通过优化数据预处理或改进网络架构，可增强模型对实际场景的适应性，拓宽应用前景[4]。与此同时，多物理场耦合问题的探索为 PINNs 开辟了新领域，如热流耦合与流固耦合等工程核心难题，其无网格特性和物理一致性在

这些复杂系统中展现出独特优势[5]。所以, 通过算法优化、不确定性量化及应用领域的深化, PINNs 有望突破现有瓶颈, 成为流体动力学乃至交叉学科中更为强大的工具。

6. 结论

物理信息神经网络(PINNs)通过融合数据驱动与物理建模, 为流体动力学研究带来前所未有的机遇。其无网格特性和高数据效率在三维流动、高超声速及血流动力学中展现卓越性能, 并在湍流、多相流等复杂问题中提供全新思路。域分解、损失优化及逆问题求解能力的进展提升了效率与鲁棒性, 但训练稳定性、计算需求及可解释性仍待突破。与传统 CFD 形成互补, PINNs 通过算法优化和硬件进步, 有望成为流体动力学的重要工具, 推动领域迈向更精确高效的未来。

参考文献

- [1] Raissi, M., Perdikaris, P. and Karniadakis, G.E. (2019) Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, **378**, 686-707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- [2] Karniadakis, G.E., Kevrekidis, I.G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S. and Yang, L. (2021) Physics-Informed Machine Learning. *Nature Reviews Physics*, **3**, 422-440. <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5>
- [3] Bai, J., Rabczuk, T., Gupta, A., Alzubaidi, L. and Gu, Y. (2022) A Physics-Informed Neural Network Technique Based on a Modified Loss Function for Computational 2D and 3D Solid Mechanics. *Computational Mechanics*, **71**, 543-562. <https://doi.org/10.1007/s00466-022-02252-0>
- [4] Cai, S., Wang, Z., Fuest, F., Jeon, Y.J., Gray, C. and Karniadakis, G.E. (2021) Flow over an Espresso Cup: Inferring 3-D Velocity and Pressure Fields from Tomographic Background Oriented Schlieren via Physics-Informed Neural Networks. *Journal of Fluid Mechanics*, **915**, A102. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.135>
- [5] Sun, L., Gao, H., Pan, S. and Wang, J. (2020) Surrogate Modeling for Fluid Flows Based on Physics-Constrained Deep Learning without Simulation Data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **361**, Article ID: 112732. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112732>
- [6] Hao, Z., Liu, S., Zhang, Y., *et al.* (2022) Physics-Informed Machine Learning: A Survey on Problems, Methods and Applications.
- [7] Ou, Z., Wan, Y., Xue, Q., Chi, C., Gharibi, F. and Thévenin, D. (2024) A One-Domain Pore-Resolved Approach for Multiphase Flows in Porous Media. *Physics of Fluids*, **36**, Article ID: 063108. <https://doi.org/10.1063/5.0213679>
- [8] Lu, L., Jin, P., Pang, G., Zhang, Z. and Karniadakis, G.E. (2021) Learning Nonlinear Operators via DeepONet Based on the Universal Approximation Theorem of Operators. *Nature Machine Intelligence*, **3**, 218-229. <https://doi.org/10.1038/s42256-021-00302-5>
- [9] Schiassi, E., D'Ambrosio, A., Drozd, K., Curti, F. and Furfaro, R. (2022) Physics-Informed Neural Networks for Optimal Planar Orbit Transfers. *Journal of Spacecraft and Rockets*, **59**, 834-849. <https://doi.org/10.2514/1.a35138>
- [10] Puttock-Brown, M.R., Bindhu, G.K.M. and Ashby, C.E. (2024) A Physics-Informed Neural Network for Solving the Inverse Heat Transfer Problem in Gas Turbine Rotating Cavities. *Journal of Turbomachinery*, **147**, Article ID: 071010. <https://doi.org/10.1115/1.4067125>
- [11] Diao, Y., Yang, J., Zhang, Y., Zhang, D. and Du, Y. (2023) Solving Multi-Material Problems in Solid Mechanics Using Physics-Informed Neural Networks Based on Domain Decomposition Technology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **413**, Article ID: 116120. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116120>
- [12] Wang, H., Liu, Y. and Wang, S. (2022) Dense Velocity Reconstruction from Particle Image Velocimetry/Particle Tracking Velocimetry Using a Physics-Informed Neural Network. *Physics of Fluids*, **34**, Article ID: 017116. <https://doi.org/10.1063/5.0078143>
- [13] Berkahn, S. and Ehrhardt, M. (2022) A Physics-Informed Neural Network to Model COVID-19 Infection and Hospitalization Scenarios. *Advances in Continuous and Discrete Models*, **2022**, Article No. 61. <https://doi.org/10.1186/s13662-022-03733-5>
- [14] Han, J. and Zhang, L. (2020) Integrating Machine Learning with Physics-Based Modeling.
- [15] Shukla, K., Di Leoni, P.C., Blackshire, J., Sparkman, D. and Karniadakis, G.E. (2020) Physics-Informed Neural Network for Ultrasound Nondestructive Quantification of Surface Breaking Cracks. *Journal of Nondestructive Evaluation*, **39**, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10921-020-00705-1>

-
- [16] Moseley, B., Markham, A. and Nissen-Meyer, T. (2023) Finite Basis Physics-Informed Neural Networks (FBPINNs): A Scalable Domain Decomposition Approach for Solving Differential Equations. *Advances in Computational Mathematics*, **49**, Article No. 62. <https://doi.org/10.1007/s10444-023-10065-9>
- [17] Meng, X., Li, Z., Zhang, D. and Karniadakis, G.E. (2020) PPINN: Parareal Physics-Informed Neural Network for Time-Dependent PDEs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **370**, Article ID: 113250. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113250>
- [18] Garay, J., Dunstan, J., Uribe, S. and Sahli Costabal, F. (2024) Physics-Informed Neural Networks for Parameter Estimation in Blood Flow Models. *Computers in Biology and Medicine*, **178**, Article ID: 108706. <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2024.108706>
- [19] Xu, S., Dai, Y., Yan, C., Sun, Z., Huang, R., Guo, D., *et al.* (2025) On the Preprocessing of Physics-Informed Neural Networks: How to Better Utilize Data in Fluid Mechanics. *Journal of Computational Physics*, **528**, Article ID: 113837. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.113837>
- [20] Haghighat, E., Amini, D. and Juanes, R. (2022) Physics-Informed Neural Network Simulation of Multiphase Poroelasticity Using Stress-Split Sequential Training. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **397**, Article ID: 115141. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115141>