Applied Physics 应用物理, 2025, 15(5), 435-442
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2025.155049

K-Mers渗流中的临界现象

武宇森

北京邮电大学物理科学与技术学院，北京

收稿日期：2025年4月8日；录用日期：2025年5月20日；发布日期：2025年5月28日

摘　要

本文旨在深入研究k-mers渗流模型的标度行为与普适性特性，揭示其在统计物理中临界现象的内在规律。采用蒙特卡洛模拟方法，以每个模型下的最大的五个gap为样本，通过有限尺度分析对数据进行处理，计算了不同k值(k = 1~9)下的临界指数和临界点，并探讨其标度行为。研究发现，计算的临界指数完全一致，这表明k-mers渗流模型临界行为的普适性。此外，通过调节参数因子，使得这些概率分布图能够统一标度，从而进一步验证了普适性质。这些发现表明，在不同参数条件下，渗流模型表现出高度一致的临界行为，揭示了其内在的统一性。这一发现不仅为统计物理中临界现象的理解提供了新的理论依据，还为该模型在复杂系统中的应用奠定了基础。

关键词

渗流，临界现象，临界指数，Gap

Scaling Behaviors of K-Mers Percolation

Yusen Wu

School of Physical Science and Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Apr. 8th, 2025; accepted: May 20th, 2025; published: May 28th, 2025

Abstract

This study aims to investigate scaling behavior and universality class of the k-mers percolation model, revealing the critical phenomena within statistical physics. Using Monte Carle simulation method, the five-largest gaps were sampled and conducted finite-size scaling analysis. We calculated the critical exponents and critical points for various k values (k = 1~9), as well as its universal scaling form. Our findings indicate the universality class of the critical behaviors for k-mers percolation model. Moreover, by adjusting a parameter, observe that data from various gaps and system volumes collapse well, further validating the universality. These results suggest this percolation model exhibits highly consistent critical behavior. This discovery not only provides a new theoretical

文章引用: 武宇森. K-Mers 渗流中的临界现象[J]. 应用物理, 2025, 15(5): 435-442.
DOI: 10.12677/app.2025.155049

basis for understanding critical phenomena in statistical physics but also a foundation for the application of this model in more complex systems.

Keywords

Percolation, Critical Behaviors, Critical Exponents, Gap

1. 引言

相变与临界现象广泛存在于真实的物理系统中。与一般的相变不同，在连续相变点处物理系统往往表现出独特的行为。渗流(percolation)是一种可以产生相变与临界现象的数学模型。物理学中，临界现象指的是某种物质在临界点[1] [2] (连续相变点)附近区域展示出的各种奇怪的现象，与常见的相变过程不同。长久以来，人们对自然界的相变以及伴随来的独特的临界行为充满兴趣。渗流是统计物理学中用于研究临界现象与临界行为的数学模型，是研究系统内部随机过程连通性的范例，专注于几何结构的形成与演化规律。与 Ising 模型类似，渗流模型是从流体在多孔介质的传导过程而得到的，并且发现其内部存在一个渗流阈值 r_c (percolation threshold) [1]-[6]，等价于临界点，代表内部产生了一个贯穿整个系统的连通路径。根据不同研究对象，渗流可分为点(site)渗流和边(bond)渗流，它们的临界点通常不同。以点渗流为例，一个完整的渗流过程始于一个空的网络，之后每个格点以概率 p 被占据，彼此相互独立，边将格点连接形成连通集团(团簇)，进而生成一个破碎的晶格结构。当系统的尺寸无限大时，换言之处于热力学极限状态，存在一个特定的值 r_c，使得控制参量 $r < r_c$ 时，系统内部仅存在有限规模的团簇，这些团簇无法做到全局连通；而当 $r > r_c$ 时，系统内部的最大团簇趋于无限大，这里的 r_c 视为临界点。与真实物理系统类似，渗流模型中，在连续相变点附近系统的需残联、响应函数、关联函数呈现出幂律形式，可以经此得到一组决定系统性质的指数集，视为临界指数。若两个系统具有完全相同的临界指数，称它们属于同一普适类。

2. 理论基础

渗流模型在临界点处表现出丰富的临界现象。在渗流模型中，研究序参量作为网络尺度 L 的函数可以全面了系统的性质。对于不同的渗流模型，是否存在一个统一框架可以解释标度行为是充满挑战的。然而，最近的一项研究提供了一个动态的视角来研究渗流模型的标度行为，通过追踪序参量的变化实现，即记录并计算在添加一条边后的序参量的增量，将其定义为“gap”。定义参数 T 用以表示添加的 k-mers 分子的数量，网络内部的最大团簇(特征团簇)记为 $S(T)$，而 $r = k \times T/N$ 代表网络内部被占据点的浓度。临界点区域内，序参量的约化形式具有有限尺度标度形式，gap 也表现出类似的标度特性。在每个尺寸下收集了 10^5 个样本，并取其平均值，来探究模型的性质。首先确定对于序参量一阶增量的定义如下：

$$\Delta(L) = \frac{1}{N}\left(S(T) - S(T-1)\right) \tag{1}$$

其中的 $N = L \times L$ 表示系统为二维的正方形网络，具有周期性边界条件。当 $T = T_c$ 时，gap 达到最大值。此时，临界点和最大团簇分别表示为 $r_c = k \times T_c/N$、$S(T_c) = S_c$。演化过程中的 gap 的一阶最大增量的平

均值及其涨落，具有如下的标度形式[7]-[10]：

$$\overline{\Delta}(L)\sim L^{-\beta_1},\chi_{\Delta}=\sqrt{\left\langle\left[\delta\Delta\right]^2\right\rangle}\sim L^{-\beta_2} \tag{2}$$

$$\overline{r}_c(L)-r_c(\infty)\sim L^{-1/\nu_1},\chi_{r_c}=\sqrt{\left\langle\left[\delta r_c\right]^2\right\rangle}\sim L^{-1/\nu_2} \tag{3}$$

$$\overline{S}_c(L)\sim L^{d_{f_1}},\chi_{S_c}=\sqrt{\left\langle\left[\delta S_c\right]^2\right\rangle}\sim L^{-1/d_{f_2}} \tag{4}$$

其中，$\chi_{\Delta},\chi_{r_c},\chi_{S_c}$ 分别表示 Δ,r_c,S_c 的标准差，$r_c(\infty)$ 代表热力学极限状态下的系统的临界点。根据上述幂律形式可以计算出六个临界指数，并且满足 $\beta_1=\beta_2,\nu_1=\nu_2,d_{f_1}=d_{f_2}$，通常情况下，这些指数与二维边渗流完全相同。$\nu_1,\nu_2$ 为关联长度指数，d_{f_1},d_{f_2} 为分形维数。

对于一些连续相变的系统，通常引入序参量来表述其内部有序程度的转变过程。在渗流模型中，这种有序程度表现为系统内部特征团簇(通常是最大团簇)的演化，在临界点处最大团簇会贯穿整个晶格。因此，渗流模型中序参量的定义如下：

$$s(r,L)=S_1(r,L)/N \tag{5}$$

其中 r 代表系统内部格点的浓度，$S_1(r,L)$ 为最大团簇。根据有限尺度标度理论，在临界点处序参量满足如下形式：

$$s(r,L)=L^{-\beta/\nu}\phi\left[(r-r_c)L^{1/\nu}\right] \tag{6}$$

其中 $\phi\left[(r-r_c)L^{1/\nu}\right]$ 是一个普适函数，在临界点处退化为一个常数。因此，在临界点处系统的最大的 gap 取值为：

$$\Delta(L)=s(r,L)-s(r_c,L)=L^{-\beta/\nu}\left(\phi\left[(r-r_c)L^{1/\nu}\right]-\phi[0]\right) \tag{7}$$

这其中 $r=r_c+k/N$，在 k-mers 渗流中需要满足 $L\gg k$，这使得 $(r-r_c)L^{1/\nu}\to 0$，并且 $\phi[0]$ 是一个常数，因此方程(7)将会具有如下幂律形式：

$$\Delta(L)\sim L^{-\beta/\nu} \tag{8}$$

这样便证明了 $\beta_1=\beta/\nu$。对与边渗流模型，最大 gap 通常为系统内部的第二大团簇。文献[3]-[6]指出临界点区域内次大团簇同样满足方程(6)的形式，因此猜测 k-mers 模型中同样满足此规律。文献[7]中指出了系统的响应函数的定义，其形式如下：

$$\chi=\frac{\left[\left\langle S_1^2\right\rangle-\left\langle S_1\right\rangle^2\right]}{L^d} \tag{9}$$

而最大 gap 与最大团簇性质类似，因此假设由 $\Delta(L)$ 定义的响应函数如下：

$$\chi=L^d\left(\left\langle\Delta(L)^2\right\rangle-\left\langle\Delta(L)\right\rangle^2\right) \tag{10}$$

在方程(1)中的 $\Delta(L)$ 是约化形式，所以方程(10)等号右侧应乘以 L^d。根据有限尺度标度理论，响应函数与系统尺寸也满足一个幂律形式：

$$\chi\sim L^{\gamma/\nu} \tag{11}$$

因此证得 $\left\langle\Delta(L)^2\right\rangle-\left\langle\Delta(L)\right\rangle^2\sim L^{\gamma/\nu-d}$。超标度关系描述了临界指数之间的联系，其中的 β,ν,γ 之间满

足 $-\beta/\nu=(\gamma/\nu-d)/2$，所以证得 $\beta_2=\beta/\nu$。在连续渗流模型中，可以通过三个临界指数来推导出全部的 6 个临界指数。对于 $d_{f_1}=d_{f_2}$ 证明与上述类似。

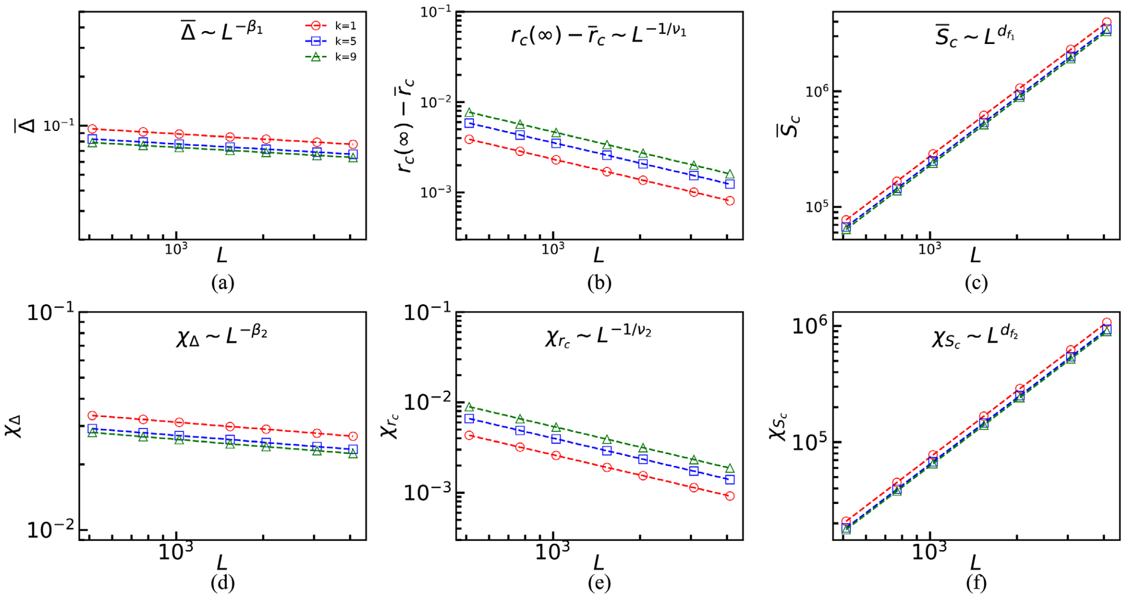

Figure 1. Log-log plot between parameters and ln(L)
图 1. 变量与系统尺寸的双对数函数图像

至此定义了 6 个临界指数，并且证明了它们之间的对应关系。在图 1 中，绘制了方程(2)、(3)、(4)的双对数曲线，其中的空心形状为原始数据，虚线是由最小二乘法拟合而来，系统尺寸为：512、768、1024、1536、2048、3072、4096，样本总数为 10^5。曲线的斜率即为临界指数，相应的结果在附录的表 A1 中。由表 1 可知，$k=5$ 的临界指数分别为：$\beta_1=0.105(1)$、$1/\nu_1=0.748(8)$、$d_{f_1}=1.896(4)$。而文献[2]指出二维边渗流模型的临界指数可以精确求解，取值为：$\beta/\nu=5/48$、$\nu=4/3$、$d_f=91/48$、$\gamma=43/18$ 并且与系统的形状无关，它们之间满足超标度关系。结果表明，k=5 时的临界指数与二维边渗流模型高度一致，同样满足超标度关系。

3. 概率分布图像

图 1 绘制了在 k 取值为 1、5、9 时，$\bar{\Delta},r_c(L),\bar{S}_c$ 及其涨落关于系统尺寸 L 的双对数图像。结果表明，k-mers 渗流模型的普适类与 k 的取值无关，详细的拟合结果展示在表 1 中。根据有限尺度标度理论，上述三个变量的概率分布函数呈现如下形式：

$$P_\Delta(\delta\Delta,L)=L^{\beta_2}f_\Delta\left(\delta\Delta\times L^{\beta_2}\right) \tag{12}$$

$$P_r(\delta r_c,L)=L^{1/\nu_2}f_r\left(\delta r_c\times L^{1/\nu_2}\right) \tag{13}$$

$$P_S(\delta S_c,L)=L^{-d_{f_2}}f_S\left(\delta S_c\times L^{-d_{f_2}}\right) \tag{14}$$

其中 $f_\Delta(.),f_r(.),f_S(.)$ 是三个普适函数，而 δ 代表变量与平均值的偏差是一个集合，对其求解标准差可以得到 $\chi_\Delta,\chi_{r_c},\chi_{S_c}$。在传统的有限尺度分析中，无法记录每一次渗流过程的临界点，而是对序参量的数据进行平均来求解，且标度分析便是基于这个平均值。与之不同的是，gap 被定义为序参量的一阶最大增量，

此时我们可以准确捕捉并记录每一次渗流过程中的临界点。对于一个有限规模系统，临界点附近的团簇尺寸分布与关联长度相关并且呈现处指数衰减的规律。

文献[3] [11] [12]指出，在一些连续渗流模型中团簇尺寸的分布遵从该形式 $n(s)\sim s^{-\tau}\mathrm{e}^{-s/s_\xi}$，其中的 τ 代表 Fisher 指数，s_ξ 表示截止尺寸。序参量的一阶最大增量是由整个渗流过程中的第二大团簇给出的，换言之最大 gap 等于第二大团簇的大小，由于第二大簇的规模远远大于截止尺寸 s_ξ，最大间隙的大小必然由临界簇尺寸分布的轻尾部分表征。

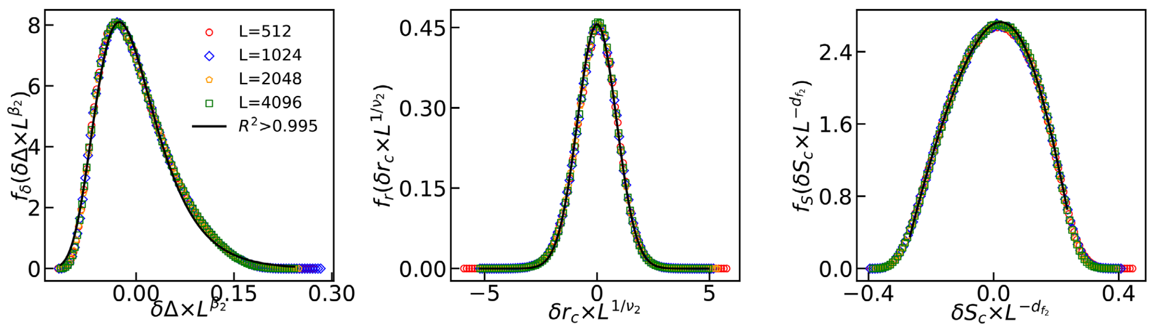

Figure 2. Distribution of three universal scaling function
图 2. 三个普适函数的分布

这意味着对于大尺寸系统，最大 gap 的概率分布图像十分尖锐。因此，极值理论预测方程(5) (6) (7)服从以下的形式：

$$f_\Delta\left(\delta\Delta\times L^{\beta_2}\right)=f_0+A\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-z}-z},z=\left(\delta\Delta\times L^{\beta_2}-B\right)/\omega \tag{15}$$

$$f_r\left(\delta r\times L^{1/\nu_2}\right)=f_1+A_1\mathrm{e}^{-z^2},z=\left(\delta r_c\times L^{1/\nu_2}\right)/\omega_1 \tag{16}$$

$$f_S\left(\delta S_c\times L^{-d_{f_2}}\right)=f_2+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-z}-z},z=\left(\delta S_c\times L^{-d_{f_2}}-B_2\right)/\omega_2 \tag{17}$$

重整化群理论指出临界点的普适函数必然是一个齐次函数，因此假设 $f_0=f_1=f_2=0$，概率分布图也证明了这一点。其中的 $A,A_1,A_2,B,B_1,B_2,\omega,\omega_1,\omega_2$ 为待拟合变量。如图 2 所示，绘制了 $k=5$ 的三个普适函数的分布函数，表明系统的涨落可以通过临界指数而重新标度。方程(15)近似一个 Gumbel 分布，对应于图 2(a)中的黑色实线，并且决定系数 $R^2>0.99$。根据 Gumbel 的性质，可以证明 $A=1/\omega$。方程(16)近似符合高斯分布，图 2(b)的黑色实线为拟合曲线，其决定系数 $R^2>0.99$。对与边渗流模型，f_S 近似符合 Gumbel，$A_2=1/\omega_2$。然而在 k-mers 渗流模型中，最大团簇的概率分布图像十分复杂，并不满足 Gumbel 分布。本文对部分区间及进行了拟合，发现可以通过 Gumbel 分布加高斯分布来拟合。

4. 高阶 Gap 的临界行为

考虑一个边渗流过程，一条边会随机连接两个顶点并添加到晶格中。在演化过程中，序参量(最大团簇)会连续的增加并最终趋于一个小于 1 的数，而第二大团簇(次大团簇)在演化过程中连续的增加到极大值，之后迅速衰减。在临界点附近区域，可以显著观察到最大团簇吸收次大团簇的位置几乎完全对应于此大团簇的迅速衰减，并且十分接近热力学极限条件下的临界点的位置。在整个演化过程中，最大团簇吸收次大团簇的位置可构成一个集合，对应于方程(1)提及的 gap 的各个取值。文献[13]对 Moore 格子中的 clique 渗流过程的最大的五个取值做了研究，发现与系统规模呈现完美的幂律形式，由此计算的五阶

临界指数相等。边渗流模型中，一条边连接两个顶点，即链接两个团簇，这使得可以定量的分析最大团簇与次大团簇的融合。

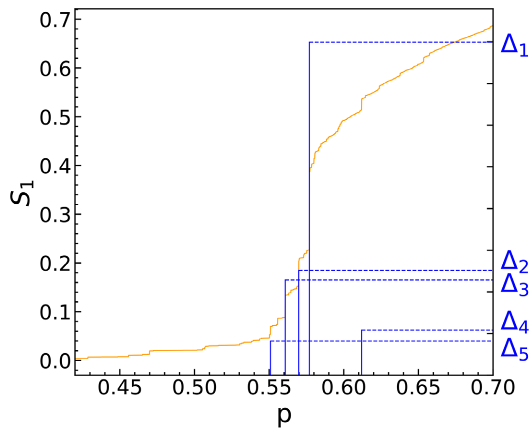

Figure 3. Illustration of dynamical process in k-mers percolation on a square lattice with size N = 128^2

图 3. 正方形晶格的动态 k-mers 渗流过程，系统尺寸为 N = 128^2

而与边渗流不同，k-mers 渗流每一个刚性分子具有 $2k + 2$ 个相邻格点，每一步添加过程会导致多个团簇的合并，这会加快序参量的演化并加速此大团簇的衰减。图 3 中描述了序参量的动态演化过程，可以观察到最大的五阶 gap 均发生在临界点附近，而由方程(8)可以推测最大的五阶 gap 具有相似的临界行为，并且这种临界行为应广泛存在于二维连续渗流模型中，而不受系统尺寸、形状等约束。在为获取较高精度的结果，采用蒙特卡洛模拟方法对每个尺寸均收集了 10^5 个样本。其中包含第一大 gap 至第五大 gap，表示为 Δ_m （$m = 1,2,3,4,5$）；五个最大 gap 的位置为 r_m；五阶最大团簇记为 S_m。图 4 中展示了 $k = 9$ 时，变量及其涨落关于系统尺寸 L 的对数函数图像，显然五阶 gap 与系统尺寸均呈现出完美的幂律关系。

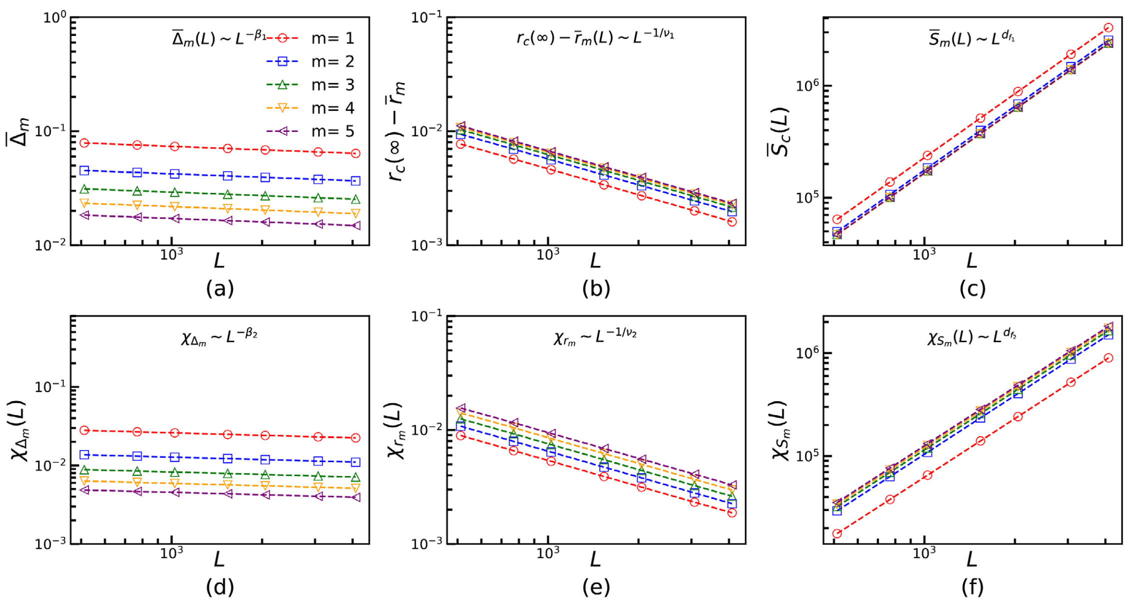

Figure 4. Log-log scale plot of the five largest gaps

图 4. 正方形网络上的 k-mers 渗流的最大的五个 gap 处参数及其涨落的双对数图像

序参量的演化过程中存在着团簇的合并，而五阶 gap 代表了规模最大的五次合并过程，它们发生的位置用 r_m （$m=1,2,3,4,5$）表示，并对其进行拟合。图 4(b)的结果表明 $r_c-\overline{r}_m$ 随着系统尺寸的增长而具有相似的幂律行为，数值模拟的结果为其斜率大致为 0.75 (1)，等价于二维渗流模型的理论值，模拟结果符合理论预测。这表明在 $\overline{r}_m$ 位置处系统表现出了有限尺寸效应。已知在无限大系统中，渗流相变点为无穷大团簇产生的位置，系统内部存在一个固定位置使得有限大团簇合并形成无无限大团簇。图中的结果表明曲线随着系统尺寸的增加而持续保持平行，这说明了在有限尺寸的系统中，r_m 彼此之间相互独立，而在热力学极限条件下它们之间的区别消失。若将有限尺寸下的 r_m 处视为“特征”合并，在无限大系统内部的“特征”合并将同时发生在临界点 $r_c(\infty)$ 处。

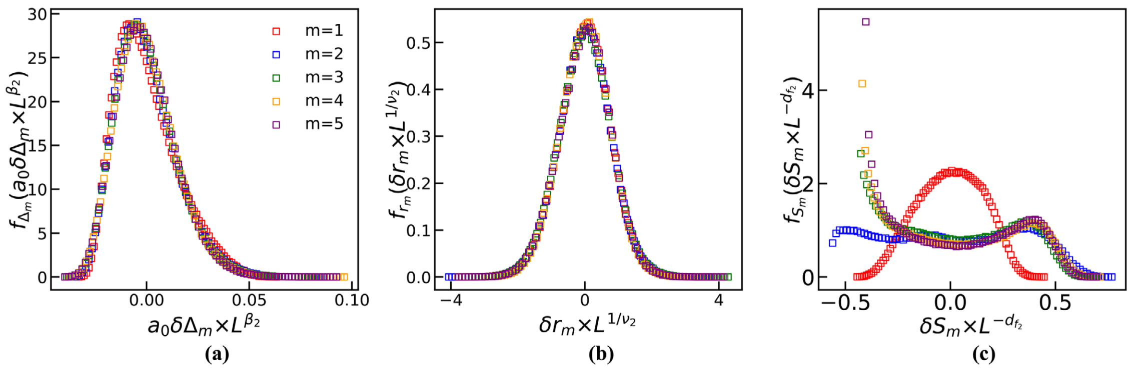

Figure 5. Probaility distribution of five largest gap
图 5. 最大的五阶 gap 的概率分布函数图像

在图 5 中绘制了五阶 gap 的概率分布图像，系统尺寸为 $L=2^{12}$，其中的 $f_{\Delta_m}, f_{r_m}, f_{S_m}$ 是三个普适函数，a_0 是一个参数，用于调节变量。具体而言，对于 f_{Δ_m}, f_{r_m} 可以通过调节 a_0 的值使得五阶 gap 的分布图通过一个指数而统一标度，它们的分布符合 Gumbel，并且满足 $R^2>0.99$。而图 5(b)则展示了 f_{r_m} 的概率密度分布，可通过高斯分布对其进行描述，其决定系数 $R^2>0.99$。与 f_{Δ_m}, f_{r_m} 不同，f_{S_m} 的分布图象近似符合双峰分布，并且无法对其进行拟合。在图 5(f)中，绘制了 χ_{S_m} 关于系统尺寸 L 的双对数函数图像，图像的结果表明 χ_{S_m} 会随着 m 的增加而增加，说明高阶的 S_m 存在着更大的涨落，这种涨落作用导致了双峰分布。在伪临界点附近，一些簇通过与附近簇合并而迅速生长，而另一些簇则生长得更慢或发生分裂，产生一种动态相互作用，表明通过高阶的 gap 观察到了更加丰富和更复杂的团簇形成机制。

5. 总结

K-mers 渗流模型是随机顺序吸附(Random Sequential Absorbion)模型的一种变体，描述了物体不可逆的沉积过程，与二维连续渗流模型属于同一普适类。然而，k-mers 渗流模型存在一些约束。k-mers 是由最近邻的格点组成的聚合物分子，而每个格点只允许被占据一次，因此在充分演化后系统达到 jamming 的状态，此时系统内部将存在诸多空隙而无法容纳一个聚合物分子。所以系统内部存在渗流与 jamming 状态的竞争机制，当 L 远大于 k 时通常渗流临界点会先于 jamming，而 L 与 k 的差距较小时，系统可能只会达到 jamming 而不发生渗流。这些性质与二维连续渗流不同，同样使得其被用于研究蛋白质的沉积、停车场模型等。此外，还可以通过广义 Achlioptas 过程将 k-mers 渗流模型构造为爆炸渗流模型，此时序参量在临界点处的变化更加剧烈，同样存在许多临界现象与临界行为。

本文通过引入“gap”的概念，即序参量的一阶最大增量，确定每一次渗流过程的临界点，经由蒙特卡洛模拟方法深入研究了 k-mers 渗流的临界行为。结果表明，不同 k 值($k=1$~9)下的 k-mers 渗流模型展

现出高度一致的临界行为，其临界指数完全一致，这进一步验证了该模型的普适性，与二维边渗流的结果高度一致。本文还研究了最大的五阶 gap 的临界行为，给出了相应的标度方程。结果表明，高阶 gap 的标度行为与一阶 gap 类似。未来的研究可以进一步探索 k-mers 渗流模型在不同维度和网络结构下的行为，以及其在实际复杂系统中的应用潜力，例如在生物网络、社会网络和材料科学中的应用。

参考文献

[1] 于渌, 郝柏林, 陈晓松. 边缘奇迹: 相变与临界现象[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 131-132.

[2] 汪志诚. 热力学·统计物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018: 304-308.

[3] Stauffer, D. and Aharony, A. (2018) Introduction to Percolation Theory. Taylor & Francis.

[4] Chen, F., Fang, P., Li, L., You, W. and Liu, M. (2022) Random Adsorption Process of Linear k-Mers on Square Lattices under the Achlioptas Process. *Physical Review E*, **105**, Article ID: 064116. https://doi.org/10.1103/physreve.105.064116

[5] Sun, W., Qing, Y., Chen, F. and Liu, M. (2022) Two-Dimensional Continuum Percolation Models with Disks under the Generalized Achlioptas Process. *Journal of Statistical Mechanics*: *Theory and Experiment*, **2022**, Article ID: 043202. https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac601e

[6] Fan, J., Liu, M., Li, L. and Chen, X. (2012) Continuous Percolation Phase Transitions of Random Networks under a Generalized Achlioptas Process. *Physical Review E*, **85**, 132-140. https://doi.org/10.1103/physreve.85.061110

[7] Fan, J. and Chen, X. (2014) General Clique Percolation in Random Networks. *EPL* (*Europhysics Letters*), **107**, Article No. 28005. https://doi.org/10.1209/0295-5075/107/28005

[8] Longone, P., Centres, P.M. and Ramirez-Pastor, A.J. (2019) Percolation of Aligned Rigid Rods on Two-Dimensional Triangular Lattices. *Physical Review E*, **100**, Article ID: 052104. https://doi.org/10.1103/physreve.100.052104

[9] Fan, J., Meng, J., Liu, Y., Saberi, A.A., Kurths, J. and Nagler, J. (2020) Universal Gap Scaling in Percolation. *Nature Physics*, **16**, 455-461. https://doi.org/10.1038/s41567-019-0783-2

[10] Li, M., Wang, J. and Deng, Y. (2024) Explosive Percolation in Finite Dimensions. *Physical Review Research*, **6**, Article ID: 033319. https://doi.org/10.1103/physrevresearch.6.033319

[11] Li, M., Wang, J. and Deng, Y. (2023) Explosive Percolation Obeys Standard Finite-Size Scaling in an Event-Based Ensemble. *Physical Review Letters*, **130**, Article ID: 147101. https://doi.org/10.1103/physrevlett.130.147101

[12] Newman, M.E.J., Strogatz, S.H. and Watts, D.J. (2001) Random Graphs with Arbitrary Degree Distributions and Their Applications. *Physical Review E*, **64**, Article ID: 026118. https://doi.org/10.1103/physreve.64.026118

[13] 董家奇. 复杂系统中的相变与临界现象[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2017.

附　录

Table A1. Critical exponents of k value from 1 to 9
表 A1. K = 1~9 的临界指数

k	β_1	β_2	$1/\nu_1$	$1/\nu_2$	d_{f_1}	d_{f_2}
1	0.105 (1)	0.105 (1)	0.75 (1)	0.745 (8)	1.895 (4)	1.895 (6)
2	0.103 (1)	0.103 (2)	0.754 (8)	0.747 (5)	1.896 (3)	1.894 (4)
3	0.104 (2)	0.106 (2)	0.751 (6)	0.745 (6)	1.895 (4)	1.894 (5)
4	0.104 (1)	0.105 (3)	0.752 (5)	0.748 (8)	1.896 (4)	1.893 (5)
5	0.105 (1)	0.104 (2)	0.748 (8)	0.744 (8)	1.896 (4)	1.894 (6)
6	0.104 (1)	0.105 (3)	0.758 (8)	0.749 (4)	1.896 (6)	1.892 (6)
7	0.105 (1)	0.105 (3)	0.752 (4)	0.748 (5)	1.896 (5)	1.893 (6)
8	0.104 (1)	0.106 (2)	0.746 (8)	0.750 (5)	1.896 (6)	1.890 (8)
9	0.103 (2)	0.107 (4)	0.753 (9)	0.751 (5)	1.897 (8)	1.890 (8)