

Dicke模型在非平衡相变中的热力学性质

钱奕凡

浙江师范大学物理与电子信息工程学院, 浙江 金华

收稿日期: 2025年4月14日; 录用日期: 2025年5月22日; 发布日期: 2025年5月30日

摘要

本研究基于Dicke模型, 探讨了激发态量子相变(ESQPT)对系统非平衡热力学性质的影响。具体来说, 通过细致分析量子功分布的性质, 深入探究了一阶和二阶激发态量子相变在功分布中体现。我们的结果表明, 尽管功分布的特定性质可以很好地刻画Dicke模型中二阶激发态量子相变, 但一阶激发态量子相变无法通过功分布得到揭示。该研究一方面表明了功分布在激发态量子相变的研究中具有重要的作用, 另一方面也表明了复杂多体模型中激发态量子相变研究的困难性。由于Dicke模型可以在不同的实验平台上得到实现, 因而, 我们的研究还将进一步促进更多的关于激发态量子相变的实验研究。

关键词

激发态量子相变, Dicke模型, 量子功分布, 量子淬火

Thermodynamic Properties of the Dicke Model in Non-Equilibrium Phase Transitions

Yifan Qian

College of Physics and Electronic Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 22nd, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

In this study, by employing the Dicke model, we investigate the impacts of the excited-state quantum phase transitions on the nonequilibrium thermodynamic properties. Specifically, by performing a detailed examination on the features of the quantum work distribution, we investigate how the first- and second-order ESQPTs in the Dicke model manifest themselves in the work distribution. Our results show that the presence of the second-order ESQPT in the Dicke model can be detected by certain properties of the work distribution. However, all our considered features of the work distribution are unable to probe the occurrence of the first-order ESQPT. On the one hand, our

findings verify the usefulness of the work distribution in the studies of the ESQPTs. On the other hand, the results of our study also indicate the difficult for analyzing the ESQPTs in complex quantum many-body systems. As the Dicke model can be realized by several experimental platforms, we expect that our studies could motivate more experimental explorations of the signatures of ESQPTs.

Keywords

Excited State Quantum Phase Transitions, Dicke Model, Quantum Work Distribution, Quantum Quench

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在过去的几十年中,量子相变成为凝聚态物理和量子系统研究中的重要课题。最初,研究者的注意力集中在基态量子相变[1][2]上,这种相变是由量子涨落驱动的零温度现象。基态量子相变通常发生在控制参数(如外部场或耦合强度)跨越临界点时,系统的基态性质会发生突变。它不仅为我们揭示了量子系统的独特性质,也成为量子多体系统理论与实验研究的核心内容。随着研究的深入,量子相变的研究方向逐渐扩展,不仅局限于基态,还涉及到了激发态量子相变[3][4]。激发态量子相变作为基态量子相变的自然延伸,通常与基态相变紧密相关。近年来,激发态量子相变的研究已在多个物理模型中取得重要进展,涉及模型如 Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) [5]模型、Dicke 模型[6]、Rabi 模型[7]、旋量玻色-爱因斯坦凝聚体[8]、Kicked top [9]模型等。这些研究表明,激发态量子相变不仅对量子系统的宏观特性产生深远影响,而且为探索非平衡量子动力学[10]、量子混沌[11]、量子热力学[12]以及量子退相干[13]等多个领域提供了新的研究视角。在激发态量子相变的研究中,相关方法和技术也经历了不断发展。量子保真度[14]、量子功统计[15]、洛施密特回波[16]、Husimi 函数[17]、非时序关联函数[18]和量子纠缠[19]等手段,已经成为探测和研究激发态量子相变的重要工具。这些方法不仅提升了我们对激发态量子相变机制的理解,也促进了实验技术的创新与发展。值得一提的是,激发态量子相变的理论特征已在多个实验平台中[20]得到了验证,这些成果进一步推动了该领域的理论研究和应用探索。

本文旨在探讨激发态量子相变对量子系统非平衡热力学性质的影响,并重点研究如何通过系统的热力学特性来揭示相变的发生。特别地,我们运用量子功分布熵的方法[21]-[23],研究 Dicke 模型中激发态量子相变的表现。通过量子淬火过程中的量子功分布,我们能够揭示系统非平衡热力学的行为,进一步证明量子功分布可以作为探测量子多体系统中激发态量子相变的有效工具。

2. 激发态量子相变

激发态量子相变(Excited-state Quantum Phase Transition, ESQPT)指的是一些孤立量子系统的激发态谱中出现的各种临界现象。与标准的量子相变(Quantum Phase Transition, QPT)不同,后者主要描述的是系统基态在控制参数(例如外部场强或内部耦合强度)变化时的非平凡演化,激发态量子相变通常涉及大量激发态的变化,而非仅仅是基态上方的少数几个激发态。在此过程中,系统的能量和谱结构会随着控制参数 κ 及激发能量 E 的变化而表现出剧烈的非平滑变化。与热相变(Thermal Phase Transition, TPT) [24]不同,后者通过热涨落作用于激发态,导致能量分布的模糊变化,而激发态量子相变则通常在某一特定能量值

附近对激发态(可能是其子集)产生显著影响,从而引发能级结构的突变。越来越多的研究表明,这种谱的奇异性在多种量子力学模型以及凝聚态物理中的多体系统中具有深远的影响。激发态量子相变表现为控制参数 κ 和能量 E 组成的平面中能级密度的非解析性,这种非解析性通常出现在某些临界区域内,即平面中的曲线 $E = E_c(\kappa)$,并伴随着激发态性质的剧烈变化。一般而言,激发态量子相变的临界能量 $E_c(\kappa)$ 会延伸至基态量子相变的临界能量点。

根据现有的研究,大多数激发态量子相变与经典极限下哈密顿量的不动点相关,或与潜在的经典动力学奇点有关。这些奇点在量子能谱中的表现显著依赖于系统的自由度(f),且当自由度较低时,相关效应的可见性会更加显著。激发态量子相变的概念最早由 Cejnar 等人提出,随后, Caprio 等人通过建立更加坚实的理论框架,进一步发展了这一领域,并在 $f=1$ 模型中提供了多个激发态量子相变的实例。在 $f=2$ 系统中,激发态量子相变效应最初由 Cejnar 和 Stránský 等人提出,之后同一团队与 Macek 和 Leviatan 共同开展了一系列系统的研究。迄今为止,关于各种多体系统中激发态量子相变的特征已经积累了大量的文献。最近关于 ESQPT 的研究可以归纳为以下几类:在各种具体模型中识别 ESQPT 并确定其在量子谱和经典动力学中的特征,分析 ESQPT 的热力学后果,探索由 ESQPT 引起的动态效应以及将 ESQPT 概念扩展。我们的研究先在 Dicke 模型中寻找 ESQPT,继续探讨了激发态量子相变对系统非平衡热力学性质的影响。

3. Dicke 模型

3.1. 模型介绍

Dicke 模型描述了一个由 N 个二能级原子与腔体内单模辐射场相互作用的量子系统。它最初由物理学家 R. H. Dicke 在 1954 年提出,用于研究集体原子辐射现象(如超辐射现象)。近年来, Dicke 模型广泛应用于量子光学、腔电动力学和量子相变等领域的研究中,成为研究集体量子现象和量子临界行为的重要工具之一。该模型的哈密顿量由三部分构成:第一部分与单色量子化辐射场相关,第二部分涉及原子系统,最后一部分描述原子系统与辐射场之间的相互作用。Dicke 哈密顿量可以表示为:

$$H_D = \omega_0 J_z + \omega a^\dagger a + \frac{2\kappa}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a) J_x \quad (1)$$

其中,辐射模式的频率为 ω ,对应的光子数算符为 $a^\dagger a$ 。对于原子部分, ω_0 表示激发能量,而 J_z, J_+, J_- 是遵循 SU(2)代数的原子集体伪自旋算符。在热力学极限下,二阶量子相变(QPT)发生在相互作用参数达到临界值 $\kappa_c = \sqrt{\omega\omega_0}/2$ 时,当耦合常数 κ 较小(即 $\kappa < \kappa_c$)时,系统中的原子和光场之间的相互作用较弱。每个原子几乎独立存在,光场的能量较低,基态中光子的数量几乎为零,此时系统表现出相对较弱的集体行为为正常相。当耦合常数 κ 增大(即 $\kappa > \kappa_c$)时,系统中的原子集体与光场发生强烈的相互作用。光场中的光子数增大,原子之间通过集体效应产生强辐射,形成超辐射相。在这个相中,光场和原子的集体行为变得显著,基态中的光子数远高于正常相,称作超辐射相。

3.2. 经典极限

在研究 Dicke 模型中的激发态量子相变时,经典极限[25][26]的分析扮演着至关重要的角色。量子相变本质上是量子系统参数变化时,在基态或激发态出现剧烈变化的现象,而这些现象通常涉及到系统的相空间结构和量子态密度的变化。通过在经典极限下分析 Dicke 模型,我们能够更加深入地理解这些量子相变的微观机制。经典极限的研究能够揭示出量子系统与经典系统之间的相互联系,提供一种全新的视角来理解量子相变。

经典哈密顿量可为:

$$H_{cl} = \frac{\omega_0}{2}(p^2 + q^2) + \omega(P^2 + Q^2) + \kappa q Q \sqrt{4 - (p^2 + q^2)} - \omega_0 \quad (2)$$

在经典极限下, Dicke 模型的态密度(DoS)可以写成:

$$\rho(E) \equiv \sum_n \delta(E - E_n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int dP dQ dp dq \delta(E - jH_{cl}) \quad (3)$$

其中 E_n 表示第 n 个本征态的能量。利用 δ 函数的性质, Dicke 模型的态密度可以表示为:

$$\frac{\omega}{2j} \rho(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{x^-}^{x^+} dx \arccos \left(\sqrt{\frac{2\kappa_c^2}{(x-\varepsilon)\kappa^2(1-x^2)}} \right), & \varepsilon_0 \leq \varepsilon < -1 \\ \varepsilon + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{x^+} dx \arccos \left(\sqrt{\frac{2\kappa_c^2}{(x-\varepsilon)\kappa^2(1-x^2)}} \right), & |\varepsilon| \leq 1 \\ 1, & \varepsilon > 1 \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$x^\pm = \left[\frac{-\kappa_c^2}{\kappa^2} \pm \frac{\kappa_c}{\kappa} \sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_0)} \right] \quad (5)$$

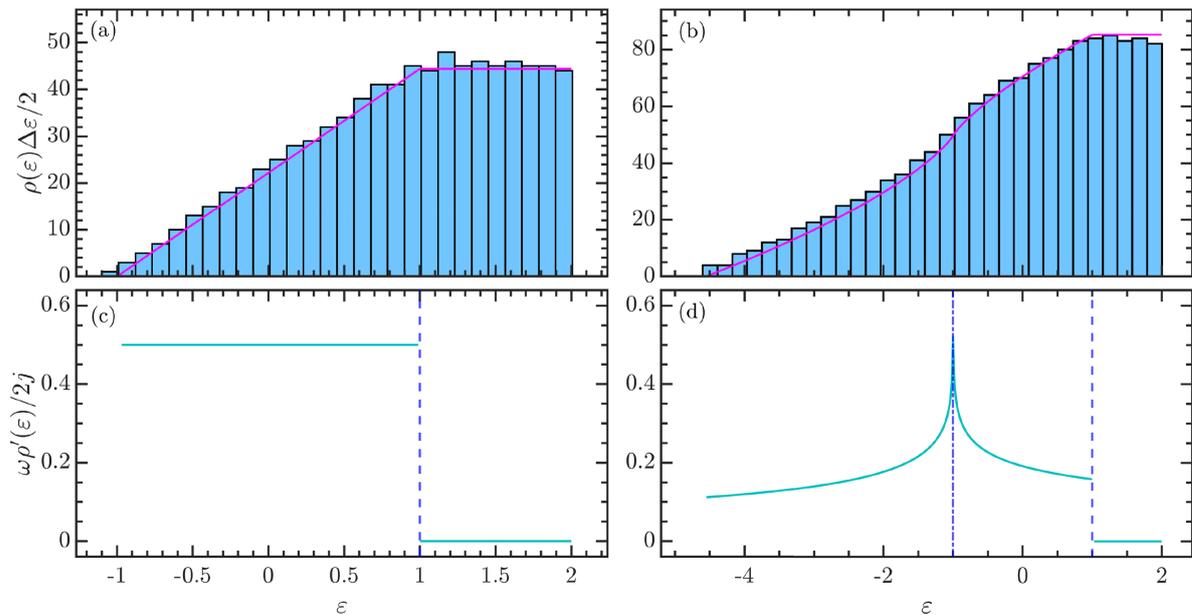


Figure 1. (a), (b): The density measure for the Dicke model as a function of the rescaled energy $\varepsilon = E/\omega_0 j$, where (a) $\kappa/\kappa_c = 0.2$ and (b) $\kappa/\kappa_c = 3$. The solid lines represent the semiclassical approximation of the DoS, and the blue dashed lines in panels (c) and (d) denote the critical energy for the first-order ESQPT, while the blue dotted lines in panel (d) mark the critical energy for the second-order ESQPT $\varepsilon_{c2} = -1$. Other parameters $j = N/2 = 20, \omega = \omega_0 = 1, \kappa_c = 0.5$, and all units are dimensionless

图 1. (a), (b): Dicke 模型的态密度作为重新缩放的能量 $\varepsilon = E/\omega_0 j$ 的函数, 其中(a) $\kappa/\kappa_c = 0.2$ 和(b) $\kappa/\kappa_c = 3$ 。实线表示半经典近似的 DoS, 图(c)和(d)中的蓝色虚线标记了第一阶 ESQPT 的临界能量, 而图(d)中的蓝色点划线标记了第二阶 ESQPT 的临界能量 $\varepsilon_{c2} = -1$ 。其他参数: $j = N/2 = 20, \omega = \omega_0 = 1, \kappa_c = 0.5$, 单位都是无量纲化的

在图 1(a)和图 1(b)中展示了 Dicke 模型在不同 κ 值下, 偶对称谱段的态密度。我们发现态密度 $\rho(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=1$ 处的行为出现不连续性, 如图 1(c)和图 1(d)中蓝色虚线所示。由于 ESQPT 特征是态密度及其导数中的非解析行为, 观察到 $\rho'(\varepsilon)$ 的跳跃表明存在一阶 ESQPT, 其临界能量为 $\varepsilon_{c1}=1$, 并且与耦合强度无关。

除了不连续行为外, 如图 1(d)中的蓝色点划线所示, $\rho'(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=-1$ 处还会出现尖点, 尤其是在 $\kappa > \kappa_c$ 的情况下。这源于底层经典系统中的鞍点, 正如图 1(c)所示。鞍点通常会导致态密度及其导数中的奇异行为。对于 Dicke 模型, $\rho'(\varepsilon)$ 中的尖点在热力学极限下会转变为对数发散。这意味着 Dicke 模型在超辐射相中会经历二阶 ESQPT, 其临界能量为 $\varepsilon = E/\omega_j$ 。一阶和二阶 ESQPT 具有不同的非解析行为, 在能谱中表现为不同的特征。

4. 量子功

4.1. 量子功分布

量子功的概率分布存在多种不同的定义形式, 这取决于测量量子功的方法。在本文的研究中, 我们采用了广泛使用的两点测量方案(two-point measurement scheme) [27], 即通过在驱动过程的初态和末态分别测量系统的能量以确定量子功的统计分布。

两点测量法要求对系统在驱动过程的初始和最终状态分别测量能量本征值。定义量子功为系统两次测量能量的差值, 即 $W = E_k^f - E_n^i$, 由此, 量子功的统计分布可表示为:

$$P(W) = \sum_{k,n} p_{k,n} \delta[W - (E_k^f - E_n^i)] \quad (6)$$

其中联合概率 $P_{k,n}$ 由以下关系给出

$$p_{k,n} = \text{Tr}[\Pi_f^{(k)} U \Pi_i^{(n)} \rho \Pi_i^{(n)}] \quad (7)$$

式中 $\Pi_i^{(n)} = |n_i\rangle\langle n_i|$ 和 $\Pi_f^{(k)} = |k_f\rangle\langle k_f|$ 分别为驱动过程开始和结束时能量测量所对应的投影算符。

由于量子功的定义与测量方法的选择相关, 因此量子功分布存在不同的形式。实际研究中, 为更深入地理解系统在驱动条件下的响应特性, 通常会进一步分析量子功分布的统计特征, 如量子功的平均值、方差及标准差等。

量子功分布的平均功反映了系统在量子淬火过程中的能量变化趋势, 描述了系统如何从初始状态转移到最终状态时功的平均值。

$$\langle W \rangle = \sum_k |c_k|^2 (E_k^f - E_n^i) \quad (8)$$

量子功分布的方差是描述量子系统功的波动性的关键物理量。在研究激发态量子相变时, 功分布的方差可以揭示系统如何响应外部驱动的变化, 特别是在接近临界点时的行为。量子功分布的方差定义为:

$$\sigma_W = \sqrt{\langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2} \quad (9)$$

在各种多体系统中, 虽然某时刻的功或者功的累积量可以表现到非平衡热力学的几个特征, 但是它们不能揭露量子功分布 $P(W)$ 中所包含的全部信息。因此, 引入了一个测量量子功分布复杂度的量, 即量子功分布的熵, 这是研究量子系统非平衡动力学中一个重要的物理量, 它能够反映功分布的混乱程度和不确定性。在量子淬火等非平衡过程中, 功分布的熵能够揭示系统的热力学行为, 尤其是系统如何响应外部驱动协议的变化。我们可以通过量子功分布来计算熵。在量子系统中, 功的分布 $P(W)$ 描述了不同功值 W 的概率分布, 而熵通常通过 Shannon 熵定义, 用于量化概率分布的混乱程度或信息量。对于功分布 $P(W)$, 其熵 S 可以定义为:

$$S = -\int P(W) \ln P(W) dW \quad (10)$$

4.2. 量子淬火

量子淬火(Quantum Quenching)是指在量子系统中, 某个控制参数(例如哈密顿量中的耦合常数、外场等)突然发生变化的过程。通过这种快速改变系统参数, 通常会导致系统从一个初始状态跳跃到一个新的状态, 为了分析 Dicke 模型中的两个激发态量子相变如何通过量子功分布的熵影响非平衡热力学及其相关特征, 我们考虑了一个突然淬火协议。由于我们的目的是揭示两个激发态量子相变的影响和特征, 因此淬火必须使系统通过分别激发态量子相变的临界能量。由于淬火后体系中的能量依赖于 $\delta\kappa$ 值, 所以确定合适的临界淬火值 $\delta\kappa$ 是非常重要的。在这里, 临界淬火值定义为将系统淬火后恰好达到激发态量子相变临界能量所需的淬火值, 用 $\delta\kappa$ 表示。为了探索一阶和二阶 ESQPT 对功统计性质的影响, 我们需要将系统带过相应 ESQPT 的临界能量。这是通过突变过程实现的, 该过程改变系统的能量, 导致重新缩放的淬火能量 $\varepsilon_f = \langle \psi_0 | H_f | \psi_0 \rangle / \omega_0 j$, 在经典极限下, ε_f 可以表示为:

$$E_{f,cl} = H_{cl} |K = K_f\rangle (p^*, q^*, P^*, Q^*) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_i^2}{\kappa_c^2} + \frac{\kappa_c^2}{\kappa_i^2} \right) - \delta K \frac{\kappa_i^4 - \kappa_c^4}{\kappa_i^3 \kappa_c^2} \quad (11)$$

将淬火后的能量带入临界能量后, 所需的 $\delta\kappa$ 值定义为该 ESQPT 的临界淬火强度。因此, 通过分别设置 $E_{f,cl} = \varepsilon_{c1}$ 和 ε_{c2} , 我们可以得出一阶和二阶 ESQPT 的临界淬火强度分别为:

$$\delta\kappa_{c1} = -\frac{\kappa_i (\kappa_i^2 + \kappa_c^2)}{2(\kappa_i^2 - \kappa_c^2)}, \quad \delta\kappa_{c2} = -\frac{\kappa_i (\kappa_i^2 - \kappa_c^2)}{2(\kappa_i^2 + \kappa_c^2)} \quad (12)$$

4.3. 数值模拟

为了更清晰地分析 Dicke 模型的淬火后各能级变化, 我们根据对称性关系, 对 Dicke 模型哈密顿量的能谱进行了分析。首先, 从代数的角度对算符进行了代换。Dicke 模型的哈密顿量与总自旋算符对易, 即 $[H, J^2] = 0$, 其中 $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ 因此, 哈密顿量的矩阵可以在 J^2 的特征子空间内分解为完全独立的对角块。在本研究中, 我们将限制在最大自旋子空间 $j = N/2$, 其中包含基态。此外, 由于奇偶算符 $\Pi = e^{i\pi(a^\dagger a + J_z + j)}$ 也与哈密顿量对易, 哈密顿量矩阵可以进一步分解为偶奇子空间。在以下讨论中, 仅考虑该模型的偶奇子空间。

我们考虑 Hilbert 空间的基集 $\{|n; j, m_z\rangle = |n\rangle \otimes |j, m_z\rangle\}$, 其中 $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \dots, \infty$) 是玻色子模式的基态而 $|j, m_z\rangle$ ($m_z = -j, -j+1, \dots, j$) 是原子部分的 Dicke 态。通过 $u(2) \supset u(1)$ 动力学对称关系, 把各算符作用在 $|j, m\rangle$ 基矢上, 求出各精确的 J 值, 其中:

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad m = -j, \dots, j. \quad (13)$$

这里 $-j \leq m \leq j$ 是总自旋。通过不同的自旋作用在 J_z 方向上的投影, 在这里我们有如下关系

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (14)$$

$$J^+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \quad (15)$$

$$J^- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \quad (16)$$

然后, 哈密顿量矩阵在此基中的元素可以表示为:

$$\begin{aligned} \langle n'; j, m_z | H | n; j, m_z \rangle &= (n\omega + m_z \omega_0) \delta_{n',n} \delta_{m_z, m_z} + \sqrt{\frac{K}{N}} \left[\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} \right] \\ &\times \left[j(j+1) - m_z(m_z-1) \delta_{m_z, m_z-1} \right] + j(j+1) - m_z(m_z+1) \delta_{m_z, m_z+1} \end{aligned} \quad (17)$$

需要注意的是，系统中玻色子的数目是无限的，因此哈密顿量矩阵的维度也是无限的。为了数值对角化其哈密顿量，必须将玻色子 Hilbert 空间截断至较大但有限的维度 N_c ，从而保证解的收敛性。在本研究中，玻色子基被截断，并且已仔细检查结果对 N_c 变化的稳定性。

4.4. 数值分析

4.4.1. 不同淬火参数量子功分布

为了分析 Dicke 模型中的两个激发态量子相变如何通过功统计影响非平衡热力学及其相关特征，我们先从基态触发，考虑了一个瞬时淬火。我们重点使用量子功分布的熵来描述 Dicke 模型中出现的两个激发态量子相变。

我们不固定耦合参数，调整淬火强度 κ_i ，图 2 展示了在 Dicke 模型中，平均功 W (a)、功分布方差 σ_W (b)和功分布的熵 S_W (c)随着淬火强度 $\delta\kappa$ 和初始耦合强度 κ_i/κ_c 的变化。两条虚点线分别代表了两种激发态量子相变(ESQPT)的临界点 $\delta\kappa_{c1}$ 和 $\delta\kappa_{c2}$ 。在这些图中，每个子图通过不同的参数变化展示了系统在不同情况下的非平衡热力学性质。

在第一条虚点线($\delta\kappa_{c1}$)附近，颜色发生明显变化。这表明在这个临界点附近，功、方差和熵等物理量出现突变，系统的热力学性质发生剧烈变化。在量子功方差图 2(b)中，可以明显发现在虚点线附近方差变深，反映出在相变发生时，系统的量子功方差急剧增加。但在一阶激发态量子相变的临界点处(图中白色的点虚线)，不论是平均功，功分布的方差，还是功分布的熵，都没有表现出明显的临界特性。换句话说，量子功分布无法揭示一阶激发态量子相变的出现，这是因为在一阶激发态量子相变处，态密度不连续且模型不可积，当模型变为不可积时，系统会具有更复杂的相互作用。不可积性通常伴随有混沌和复杂的相互作用，混沌效应会抹掉相变的特征。

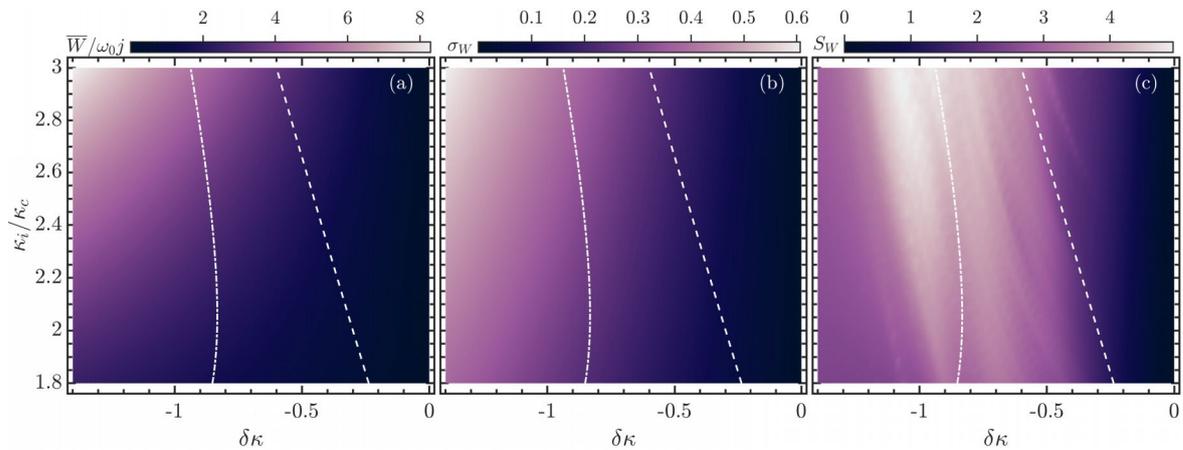


Figure 2. Averaged work W (a), the variance σ_W (b), and the entropy S_W (c) of the work distribution as a function of $\delta\kappa$ and κ_i/κ_c for the Dicke model with $j = N/2 = 20$. The white dot-dashed and dashed curves in each panel denote the critical quenches for the first-and second-order ESQPTs. Other parameters: $\omega = \omega_0 = 1, \kappa_c = 1/2$. All units are dimensionless

图 2. 对于 $j = N/2 = 20$ 的 Dicke 模型，平均功 W (a) 功分布方差 σ_W (b) 和功分布的熵 S_W (c) 随着淬火强度 $\delta\kappa$ 和初始耦合强度 κ_i/κ_c 的变化。每个图中的白色虚点线和虚线分别表示第一阶和第二阶 ESQPTs 的临界淬火值 $\delta\kappa_{c1}$ 和 $\delta\kappa_{c2}$ 。其他参数： $\omega = \omega_0 = 1, \kappa_c = 1/2$ ，所有单位都是无量纲化的

4.3.2. 不同能级量子功分布

到目前为止，在 Dicke 模型中，我们已经利用不同参数下量子功分布的熵来研究激发态量子相变的影响和表征。然而，激发态量子相变的显著特征是在临界能量处的态密度发生奇异行为。因此，我们也有必要探索量子功分布的熵如何随不同的能量而变化。

为了使系统处于非平衡状态，我们使用了第二种突然淬火过程。即系统最初处于 $H_i = H(\kappa_i)$ 的第 n 个本征态 $|\psi_n\rangle$ ，其中 $\kappa_i > \kappa_c$ 。在 $t = 0^+$ 时，我们突然将 κ 的值从 κ_i 改变为 $\kappa_f = \kappa_i + \delta\kappa$ 。在图 3 中，我们绘制了第 n 个特征态 $|\psi_n\rangle$ 的量子功分布 $P(W)$ ，用于研究这两个激发态量子相变。其他参数取值为 $\kappa_i = 1.5, \omega = \omega_0 = 1$ ，系统尺寸大小 $N = 2j = 40$ 。由于要求淬火强度 $\delta\kappa$ 的值非常小，所以在淬火过程中注入或提取的量子功也非常小。尽管如此，对于这两个激发态量子相变，我们依然可以观察到 $P(W)$ 的明显差异。在发生这两个激发态量子相变的临界能量下的态密度最高，这也意味着临界本征态对小的扰动是非常敏感。因此，如图 3(b)和图 3(d)所示，与远离临界能量的情况相比，在临界能量下功分布的能谱更宽却具有更明显的涨落，可见通过量子功分布我们能标记到激发态量子相变。

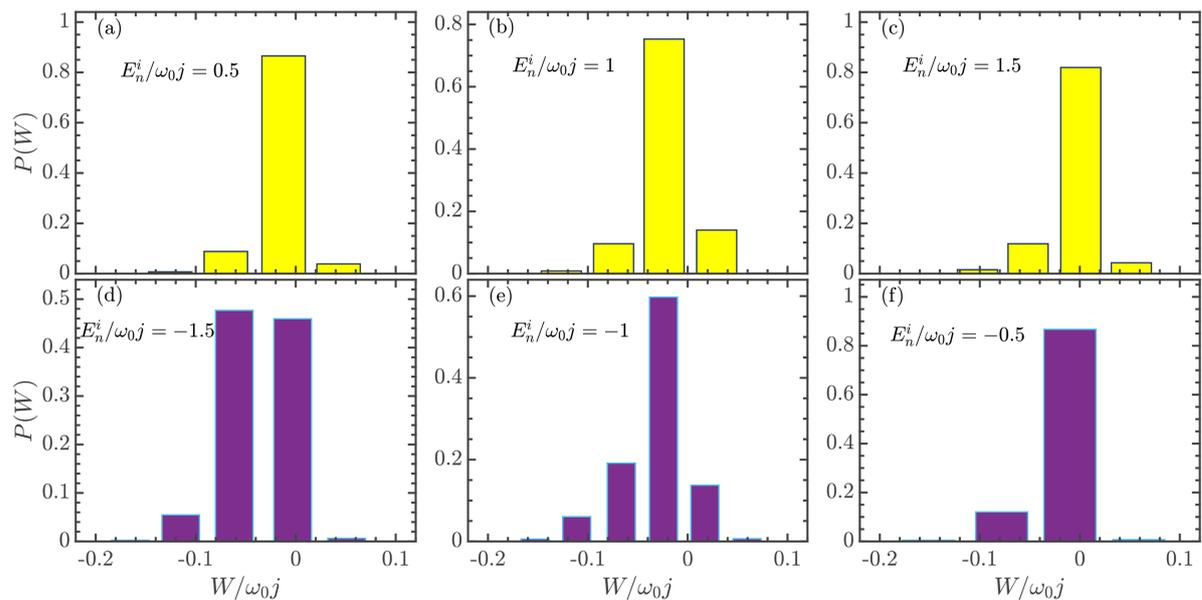


Figure 3. Work probability distributions $P(W)$ of the Dicke model. (a)–(c): $P(W)$ of the first-order ESQPT for several initial states with energy $E_n^i/\omega_0 j = 0.5$ (a), $E_n^i/\omega_0 j = \epsilon_{c1} = 1$ (b), and $E_n^i/\omega_0 j = 1.5$ (c), respectively. (d)–(f): $P(W)$ of the second-order ESQPT for the initial states with $E_n^i/\omega_0 j = -1.5$ (d), $E_n^i/\omega_0 j = \epsilon_{c2} = -1$ (e), and $E_n^i/\omega_0 j = -0.5$ (f). In all panels, we have fixed $\delta\kappa = 0.01$. Other parameters: $\kappa_i = 1.5, \omega = \omega_0 = 1$

图 3. Dicke 模型的功分布 $P(W)$ 。(a)–(c)：第一阶激发态量子相变(ESQPT)的功分布对于几个初始态，其中能量分别为 $E_n^i/\omega_0 j = 0.5$ (a), $E_n^i/\omega_0 j = \epsilon_{c1} = 1$ (b), 和 $E_n^i/\omega_0 j = 1.5$ (c)。(d)–(f)第二阶激发态量子相变(ESQPT)的功分布 $P(W)$ ，对于初始态，其中能量分别为 $E_n^i/\omega_0 j = -1.5$ (d), $E_n^i/\omega_0 j = \epsilon_{c2} = -1$ (e), 和 $E_n^i/\omega_0 j = -0.5$ (f)。在所有图中，我们固定了淬火强度 $\delta\kappa = 0.01$ 。其他参数： $\kappa_i = 1.5, \omega = \omega_0 = 1$ ，所有单位都是无量纲化的

接下来我们画了 3 副图，分别对应 Dicke 模型中的平均功 W 、功分布方差 σ_w 以及功分布的熵 S_w 作为 $E_n^i/\omega_0 j$ 的函数。在每个图中，红色实线表示在 30 个点上平滑处理后的结果，垂直的虚线和点划线标出了激发态量子相变(ESQPT)发生的临界能量 $\epsilon_{c2} = -1$ 和 $\epsilon_{c1} = 1$ ，分别与两个量子相变的临界能量相关。

图 4(a)展示了平均功 \bar{W} 随着 $E_n^i/\omega_0 j$ 的变化情况。从图中可以看出, 随着 $E_n^i/\omega_0 j$ 增加, 平均功呈现出一种逐渐增加的趋势, 特别是临界能量附近的增长迅速。由于淬火过程, 能量的改变引发了系统的反应, 特别是在临界点附近, 功的变化会更为剧烈。

功分布的方差 σ_w 不同能量范围内的波动性, 可以通过图 4(b)观察到。随着 $E_n^i/\omega_0 j$ 的增大, 功分布的方差显著增加, 显示了系统对于外部驱动的反应程度。在临界点附近, 方差出现了明显的突变, 表明在临界能量附近, 系统的波动性发生了质的变化。

功分布的熵反映了系统的无序度和复杂性。图 4(c)中, 功分布的熵随着 $E_n^i/\omega_0 j$ 的增加表现出清晰的跃升, 特别是在临界能量附近, 熵值急剧增大。这表明在二阶激发态量子相变的临界点, 系统经历了明显的相变, 量子功分布的熵急速上升, 然后趋于平缓, 表现为系统响应的混乱程度急剧变化。

图 4 展示 Dicke 模型中两个激发态量子相变对系统热力学性质(包括功、功分布的方差和熵)的影响。通过观察这些物理量在能量空间中的变化, 我们能用这些热力学量标记 $E_n^i/\omega_0 j$ 为 -1 时的第二阶激发态量子相变, 此时态密度发散, 而对于态密度不连续的第一阶激发态量子相变标记不明显。

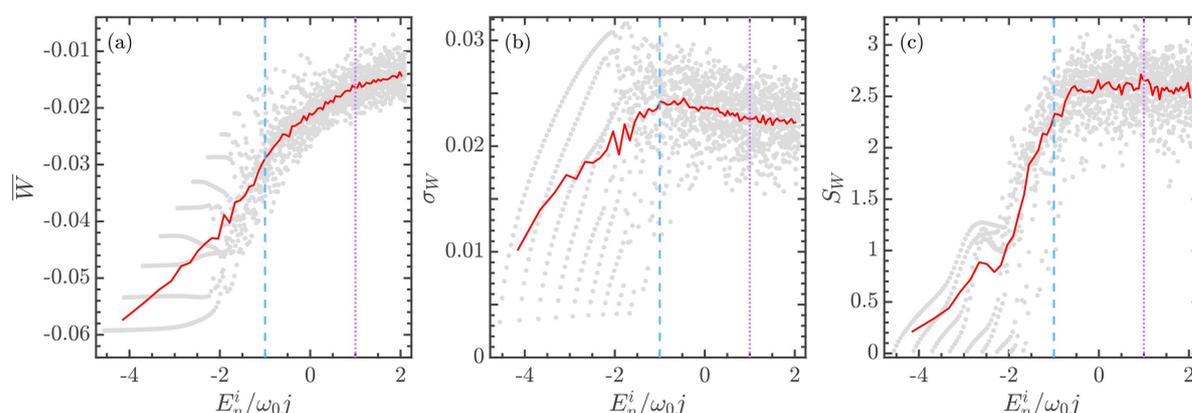


Figure 4. Averaged work \bar{W} , the variance of σ_w , and the entropy of S_w as a function of $E_n^i/\omega_0 j$ for the Dicke model with $\kappa_i = 1.5$. The red solid curve in each panel denotes the results smoothed over 30 points. The vertical dashed and dotted lines mark the ESQPT's critical energies $\varepsilon_{c_2} = -1$ and $\varepsilon_{c_1} = 1$, respectively. The quench strength $\delta\kappa = 0.01$ has been used for all panels. Other parameters: $\omega = \omega_0 = 1$

图 4. Dicke 模型中的平均功 \bar{W} 、功分布方差 σ_w 以及功分布的熵 S_w 作为 $E_n^i/\omega_0 j$ 的函数。其中, $\kappa_i = 1.5$ 。每个面板中的红色实线表示对 30 个点平滑后的结果。垂直虚线和点划线分别标记了激发态量子相变(ESQPT)的临界能量 $\varepsilon_{c_2} = -1$ 和 $\varepsilon_{c_1} = 1$ 。所有子图使用的淬火强度为 $\delta\kappa = 0.01$, 其他参数 $\omega = \omega_0 = 1$ 。所有单位都是无量纲化的

5. 总结

在本研究中, 我们利用量子功分布深入探讨了 Dicke 模型中激发态量子相变及其相关的临界特征。为了深入理解 Dicke 模型中的激发态量子相变, 我们详细研究了 Dicke 模型, 揭示了 Dicke 模型中一阶和二阶激发态量子相变出现的物理根源, 以及对应的态密度奇异行为。

利用瞬时淬火的方法, 通过分析淬火后量子功分布的特性, 我们发现, 二阶激发态相变可以对功分布产生显著影响, 但功分布对一阶激发态相变并不敏感。我们的研究表明功分布不仅无法区分 Dicke 模型中的一阶和二阶激发态相变, 而且也无法利用功分布探查一阶相变的发生。这一方面表明了激发态相变与非平衡热力学间的复杂联系, 另一方面也表明了如何有效揭示量子多体模型中的激发态相变依然是一个需要深入探索的问题。

参考文献

- [1] Nagy, D., Kónya, G., Szirmai, G. and Domokos, P. (2010) Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity. *Physical Review Letters*, **104**, Article 130401. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.104.130401>
- [2] Pires, A.S.T. (2007) Quantum-Phase Transition in a XY Model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **373**, 387-391. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.08.004>
- [3] Cejnar, P., Macek, M., Heinze, S., Jolie, J. and Dobeš, J. (2006) Monodromy and Excited-State Quantum Phase Transitions in Integrable Systems: Collective Vibrations of Nuclei. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **39**, L515-L521. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/31/L01>
- [4] Cejnar, P. and Stránský, P. (2008) Impact of Quantum Phase Transitions on Excited-Level Dynamics. *Physical Review E*, **78**, Article 031130. <https://doi.org/10.1103/physreve.78.031130>
- [5] Yuan, Z., Zhang, P., Li, S., Jing, J. and Kong, L. (2012) Scaling of the Berry Phase Close to the Excited-State Quantum Phase Transition in the Lipkin Model. *Physical Review A*, **85**, Article 044102. <https://doi.org/10.1103/physreva.85.044102>
- [6] Wang, Q. and Pérez-Bernal, F. (2021) Characterizing the Lipkin-Meshkov-Glick Model Excited-State Quantum Phase Transition Using Dynamical and Statistical Properties of the Diagonal Entropy. *Physical Review E*, **103**, Article 032109. <https://doi.org/10.1103/physreve.103.032109>
- [7] Puebla, R., Hwang, M. and Plenio, M.B. (2016) Excited-State Quantum Phase Transition in the Rabi Model. *Physical Review A*, **94**, Article 023835. <https://doi.org/10.1103/physreva.94.023835>
- [8] Feldmann, P., Klempt, C., Smerzi, A., Santos, L. and Gessner, M. (2021) Interferometric Order Parameter for Excited-State Quantum Phase Transitions in Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, **126**, Article 230602. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.230602>
- [9] Bastidas, V.M., Pérez-Fernández, P., Vogl, M. and Brandes, T. (2014) Quantum Criticality and Dynamical Instability in the Kicked-Top Model. *Physical Review Letters*, **112**, Article 140408. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.112.140408>
- [10] Chávez-Carlos, J., Lezama, T.L.M., Cortiñas, R.G., Venkatraman, J., Devoret, M.H., Batista, V.S., *et al.* (2023) Spectral Kissing and Its Dynamical Consequences in the Squeeze-Driven Kerr Oscillator. *NPJ Quantum Information*, **9**, Article No. 76. <https://doi.org/10.1038/s41534-023-00745-1>
- [11] Peres, A. (1984) Stability of Quantum Motion in Chaotic and Regular Systems. *Physical Review A*, **30**, 1610-1615. <https://doi.org/10.1103/physreva.30.1610>
- [12] Solinas, P. and Gasparinetti, S. (2015) Full Distribution of Work Done on a Quantum System for Arbitrary Initial States. *Physical Review E*, **92**, Article 042150. <https://doi.org/10.1103/physreve.92.042150>
- [13] Relaño, A., Arias, J.M., Dukelsky, J., García-Ramos, J.E. and Pérez-Fernández, P. (2008) Decoherence as a Signature of an Excited-State Quantum Phase Transition. *Physical Review A*, **78**, Article 060102. <https://doi.org/10.1103/physreva.78.060102>
- [14] You, W., Li, Y. and Gu, S. (2007) Fidelity, Dynamic Structure Factor, and Susceptibility in Critical Phenomena. *Physical Review E*, **76**, Article 022101. <https://doi.org/10.1103/physreve.76.022101>
- [15] Sampaio, R., Suomela, S., Ala-Nissila, T., Anders, J. and Philbin, T.G. (2018) Quantum Work in the Bohmian Framework. *Physical Review A*, **97**, Article 012131. <https://doi.org/10.1103/physreva.97.012131>
- [16] Wang, Q. and Quan, H.T. (2017) Probing the Excited-State Quantum Phase Transition through Statistics of Loschmidt Echo and Quantum Work. *Physical Review E*, **96**, Article 032142. <https://doi.org/10.1103/physreve.96.032142>
- [17] Fink, J.M., Bianchetti, R., Baur, M., Göppl, M., Steffen, L., Filipp, S., *et al.* (2009) Dressed Collective Qubit States and the Tavis-Cummings Model in Circuit QED. *Physical Review Letters*, **103**, Article 083601. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.103.083601>
- [18] Li, J., Fan, R., Wang, H., Ye, B., Zeng, B., Zhai, H., *et al.* (2017) Measuring Out-of-Time-Order Correlators on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Simulator. *Physical Review X*, **7**, Article 031011. <https://doi.org/10.1103/physrevx.7.031011>
- [19] Vidal, J., Mosseri, R. and Dukelsky, J. (2004) Entanglement in a First-Order Quantum Phase Transition. *Physical Review A*, **69**, Article 054101. <https://doi.org/10.1103/physreva.69.054101>
- [20] Wang, Q. and Wu, S. (2020) Excited-State Quantum Phase Transitions in Kerr Nonlinear Oscillators. *Physical Review A*, **102**, Article 063531. <https://doi.org/10.1103/physreva.102.063531>
- [21] Francica, G. (2022) Class of Quasiprobability Distributions of Work with Initial Quantum Coherence. *Physical Review E*, **105**, Article 014101. <https://doi.org/10.1103/physreve.105.014101>
- [22] Francica, G. (2022) Most General Class of Quasiprobability Distributions of Work. *Physical Review E*, **106**, Article

054129. <https://doi.org/10.1103/physreve.106.054129>
- [23] Lostaglio, M., Belenchia, A., Levy, A., Hernández-Gómez, S., Fabbri, N. and Gherardini, S. (2023) Kirkwood-Dirac Quasiprobability Approach to the Statistics of Incompatible Observables. *Quantum*, **7**, Article 1128. <https://doi.org/10.22331/q-2023-10-09-1128>
- [24] Bakemeier, L., Alvermann, A. and Fehske, H. (2013) Dynamics of the Dicke Model Close to the Classical Limit. *Physical Review A*, **88**, Article 043835. <https://doi.org/10.1103/physreva.88.043835>
- [25] Braak, D. (2011) Integrability of the Rabi Model. *Physical Review Letters*, **107**, Article 100401. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.107.100401>
- [26] Brandes, T. (2013) Excited-State Quantum Phase Transitions in Dicke Superradiance Models. *Physical Review E*, **88**, Article 032133. <https://doi.org/10.1103/physreve.88.032133>
- [27] Talkner, P., Hänggi, P. and Morillo, M. (2008) Microcanonical Quantum Fluctuation Theorems. *Physical Review E*, **77**, Article 051131. <https://doi.org/10.1103/physreve.77.051131>