Applied Physics 应用物理, 2025, 15(5), 558-567
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2025.155061

粘弹性螺旋射流的不稳定性

万友泽

绍兴文理学院数理信息学院，浙江 绍兴

收稿日期：2025年4月21日；录用日期：2025年5月24日；发布日期：2025年5月30日

摘 要

本文研究了液体射流破碎的机制，特别关注了扰动在液体射流中发展的影响。液体射流破碎通常是由微小扰动引起的，这些扰动会随着时间的推移而增长，最终导致液柱分裂并形成液滴。研究表明，扰动的类型和发展方式决定了液滴的尺寸和分布，尤其是在瑞利破碎模式下。在低速射流中，扰动主要由瑞利－普拉特不稳定性主导，而在高速射流中则由开尔文－亥姆霍兹不稳定性主导。本文还采用了粘弹性流体模型，对离心射流中的扰动进行了线性稳定性分析，揭示了不同流体特性和旋转速度对射流破碎的影响。研究表明，适当的弹性效应可以有效抑制射流表面扰动的增长，从而提高射流的稳定性，延缓其破裂过程。

关键词

粘弹性射流，离心射流，液滴形成，线性稳定性分析

Instability of Viscoelastic Spiralling Jet

Youze Wan

School of Mathematics and Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Apr. 21st, 2025; accepted: May 24th, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

This study investigates the mechanisms of liquid jet breakup, with a particular focus on the influence of disturbances on the development of the liquid jet. Liquid jet breakup is typically triggered by small disturbances, which grow over time and ultimately lead to the rupture of the liquid column and the formation of droplets. The research shows that the type and development of disturbances determine the size and distribution of the droplets, especially under the Rayleigh breakup mode. In low-velocity jets, disturbances are primarily governed by Rayleigh-Plateau instability, while in high-velocity jets, Kelvin-Helmholtz instability dominates. The study also employs a viscoelastic fluid model and conducts a linear stability analysis of disturbances in centrifugal jets, revealing the

文章引用: 万友泽. 粘弹性螺旋射流的不稳定性[J]. 应用物理, 2025, 15(5): 558-567.
DOI: 10.12677/app.2025.155061

effects of different fluid properties and rotational speeds. On jet breakup. The findings suggest that appropriate elastic effects can effectively suppress the growth of surface disturbances in the jet, thereby enhancing jet stability and delaying the rupture process.

Keywords

Viscoelastic Fluid, Centrifugal Jet, Droplet Formation, Linear Stability Analysis

1. 引言

液体射流的破碎可以定义为液柱向液滴转变的过渡过程。普遍认为，该破碎过程是由于液体表面的微小扰动逐渐增长，并最终达到使液柱半径收缩至零的程度，从而导致液体射流断裂形成液滴。自由表面不稳定性的主要来源是表面张力，因此这些不稳定性被称为毛细波不稳定性(capillaryinstabilities)。在液体射流中，扰动通常由内部流体特性(如粘度、表面张力)或外部激励(如气流、机械振动、电场)引起[1] [2]。这些扰动的增长受到流体力学不稳定性的影响，例如瑞利－普拉特不稳定性(Rayleigh-Plateau Instability)主导了低速射流的分裂[3]，而开尔文－亥姆霍兹不稳定性(Kelvin-Helmholtz Instability)则在高速射流中起关键作用[4]。不同类型的扰动决定了液滴的尺寸、分布以及破裂模式，因此研究扰动的增长机制对于控制和优化液滴生成具有重要意义。研究表明，从喷口流出的流体在不同的液体惯性、表面张力及空气动力学效应的共同作用下，会表现出四种不同的破碎模式。其中，低速条件下的两种破碎模式被称为瑞利破碎(Rayleighregime) [5]和第一类风致破碎(firstwind-inducedregime) [5]，其特征是在射流下游发生破碎，并产生与喷口尺寸相近的液滴。而在更高流速下，则出现第二类风致破碎(secondwind-inducedregime)和雾化破碎(atomizationregime) [6]，这两种破碎模式的特点是射流在靠近喷口处就发生破碎，并生成远小于喷口半径的液滴。此外，还需要注意，如果流体的出口速度过低，则液体不会形成射流，这种现象在高粘度液体中尤为显著。尽管这些不同的破碎模式在工业应用中具有重要意义，但在本论文的研究中，仅考虑遵循瑞利破碎模式的射流破碎。对于扰动产生的形式，考虑在离心射流的应用中，扰动主要是在射流的起始点、喷丝板的孔或边缘处引入的，在这些地方射流受到发射装置的振动，因此本研究关注的正是这种情况，即外部激励致使扰动。具体而言，假设出口速度足够高，以确保射流的形成，但又不足以引发雾化破碎。同时，忽略空气动力学效应，并假设射流分散到的介质为低密度气体或者说环境气体是惰性的。本研究通过理论分析研究，探讨扰动如何影响液滴的形成的不稳定性。

2. 理论模型

对于本文所研究的粘弹性流体射流在实际物理空间的存在形式，考虑为由自由液体射流从某种旋转装置中产生。例如，它可以是旋转圆盘雾化器，在所谓的“多液丝模式”中，流过旋转圆盘的膜以分离射流的形式从其边缘出来，或纳米纤维发生器，其中射流来自快速旋转的头部的侧壁中的孔口。假设射流周围的气体是无粘性的，并且是动态特性是被动的。在最简单的情况下，设备以恒定的角速度绕着指向重力 g 的垂直轴旋转，并且流体被建模为粘弹性的，在不可压缩的恒定密度 ρ 下，流体的速度 u 和压力 p (相对于环境气体中的恒定压力测量)由 Navier-Stokes 粘弹性方程描述，该方程在以角速度 Ω 旋转且原点在旋转轴处的观察者参考系中采用以下形式：

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1}$$

这是连续性方程的张量形式。因此有：

$$\rho\left(\partial u/\partial t + u\cdot\nabla u\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\tau - 2\Omega\times u - \Omega\times\left(\Omega\times d\right) + \boldsymbol{g} \tag{2}$$

这里 d 是流体中某点的位置矢量。流体的粘弹性通常使用经典的准线性模型(Oldroyd-B)进行描述，该模型将流体的总粘度分为来自牛顿溶剂和非牛顿溶剂的贡献，即：$\tau = \tau_s + \tau_p$，其中 τ_s 表示由溶剂引起的应力，τ_p 表示由聚合物引起的应力，其还可以通过以下方程表示：

$$\tau = \mu_s\left(\nabla u + \left(\nabla u\right)^{\mathrm{T}}\right) + \tau_p \tag{3}$$

μ_s 是溶剂的粘度，μ_p 是聚合物的粘度。额外的应力 τ_p 通过弹性分量进行松弛，而粘性分量则抑制应力的变化。这个关系通过应变率和应力松弛来表达，如下所示：$\tau_p + \lambda\overset{\nabla}{\tau}_p = 2\mu_p\boldsymbol{D}$。其中 λ 是粘弹性流体的特征松弛时间，$\overset{\nabla}{\tau}_p$ 是上对流导数，反映了聚合物链在随流动而运动时的变形和取向变化。$\boldsymbol{D} = \left(\nabla u + \left(\nabla u\right)^{\mathrm{T}}\right)\big/2$ 表示应变率张量。胡克模型模拟了流动中聚合物构型的应力贡献，可以通过以下方程表示：

$$\partial\tau_p/\partial t + \left(u\cdot\nabla\right)\tau_p - \tau_p\cdot\nabla u - \left(\nabla u\right)^{\mathrm{T}}\cdot\tau_p = \frac{1}{\lambda}\left(\mu_p\left(\nabla u + \left(\nabla u\right)^{\mathrm{T}}\right) - \tau_p\right) \tag{4}$$

式(1)、式(2)和式(4)构成了粘弹性离心射流流场的基本控制方程。式(4)表示 Oldroyd-B 模型中粘弹性应力的本构方程。稳定射流的空间演化还涉及到自由表面的限制以及射流表面在法向和径向方向上的应力平衡。对于射流的自由表面，定义函数为：$f\left(d,t\right) = r - R\left(d,t\right)$，其中 r 是局部横截面半径。自由表面的位置由 $f\left(d,t\right) = 0$ 来确定，自由表面的运动边界条件为：

$$\partial f/\partial t + u\cdot\nabla f = 0 \tag{5}$$

在自由表面上，必须满足法向和切向应力平衡的动态边界条件。这里假设外部环境是动态惰性的，并且忽略了空气粘性阻力的影响：

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(-p\boldsymbol{I} + \tau\right)\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\kappa \tag{6}$$

这个是法向应力平衡条件。

$$\boldsymbol{t}_i\cdot\left(-p\boldsymbol{I} + \tau\right)\cdot\boldsymbol{n} = 0, i = s,\phi \tag{7}$$

这个是切向应力平衡条件。其中，γ 是表面张力，κ 是自由表面的曲率。τ 包括额外应力张量的切向和法向分量：τ_{ps}，τ_{pr}，$\tau_{p\phi}$。为了确定特定的流动，需要在系统(1)~(4)的基础上添加边界条件，以指定射流的产生方式。例如在旋转容器的喷口处假定射流初始形态，以确定射流自由表面的初始形状和速度的初始分布。基于此，将在下面获得系统(1)~(4)在局部坐标系中的表达以及用于描述射流轨迹和沿射流传播的非线性扰动的方程，即：

$$\rho\left(\partial u/\partial t + u\cdot\nabla u\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\tau + F \tag{8}$$

这是动量方程的张量形式。其中密度 ρ、速度 u、压力 p、总应力张量 τ 以及体积力 F 的表示如下。在本文研究的离心射流中，动量方程中的体积力 F 由离心力 $-2\Omega\times u$、科里奥利力 $-\Omega\times\left(\Omega\times d\right)$ 和重力 $\boldsymbol{g}$ 的组合表示。

使用细长射流近似和渐近分析将方程的矢量形式转换为一维的无量纲形式，考虑篇幅起见，详细的处理方法可参考 Shikhmurzaev & Sisoev [7]以及 Li 等[8]，与文献中报道的不同的是，本研究是基于欧拉

方程进行推广的，研究对象从无粘流体和牛顿流体延申到粘弹性非牛顿流体。经过类似的处理，可得到以下无量纲非线性偏微分方程组：

$$\frac{\partial R^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(uR^2\right)=0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}=&-\frac{1}{\mathrm{We}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{3\beta}{R^2\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial s}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial s}\right)-\frac{Z'}{\mathrm{Fr}^2}\\&+\frac{XX'+YY'}{\mathrm{Rb}^2}+\frac{1}{R^2\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial s}\left(R^2\left(T_{ss}^0-T_{rr}^0\right)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\left(u^2-\frac{1}{R\mathrm{We}}-\frac{3}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\left(X'^2+Y'^2+Z'^2\right)=\frac{XX''+YY''}{\mathrm{Rb}^2}-\frac{2u\left(X'Y''-Y'X''\right)}{\mathrm{Rb}}-\frac{Z''}{\mathrm{Fr}^2} \tag{11}$$

$$0=\frac{X\left(Y'Z''-Z'Y''\right)+Y\left(Z'X''-X'Z''\right)}{\mathrm{Rb}^2}-\frac{X'Y''-Y'X''}{\mathrm{Fr}^2}+\frac{2uZ''}{\mathrm{Rb}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial\tau_{pss}^0}{\partial t}+u\frac{\partial\tau_{pss}^0}{\partial s}-2\frac{\partial u}{\partial s}\tau_{pss}^0=\frac{1}{\mathrm{De}}\left(2(1-\beta)\mathrm{Oh}\frac{\partial u}{\partial s}-\tau_{pss}^0\right) \tag{13}$$

$$\frac{\partial\tau_{prr}^0}{\partial t}+u\frac{\partial\tau_{prr}^0}{\partial s}+\frac{\partial s}{\partial s}\tau_{prr}^0=-\frac{1}{\mathrm{De}}\left((1-\beta)\mathrm{Oh}\frac{\partial u}{\partial s}+\tau_{prr}^0\right) \tag{14}$$

$$X'^2+Y'^2+Z'^2=1 \tag{15}$$

上述方程是含时间的，其中，基流解和轨迹由上述方程去掉时间项后组成的稳态系统获得。为了计算中心线，需要指定其物理量初始值，即给定 $X(0)$、$Y(0)$、$Z(0)$以及 $X'(0)$、$Y'(0)$、$Z'(0)$。显然，其中只有两个可以独立的规定。此外，已知该点的 $u(s,0)$ 和 $R(s,0)$ 后，可利用式(9)的稳态形式并结合 $u(s,0)$、$R(s,0)$ 以及 $X(0)$、$Y(0)$、$Z(0)$ 确定 Q_1。在质点的预设轨迹中，轨道对质点的法向和双法向反作用力由轨迹决定。而对于自由射流，情况正好相反：压力梯度的法向和双法向“反作用力”为零的条件决定了射流的轨迹。同时，对式(9)~式(15)的数值分析表明，为了使射流轨迹符合预期，即形成一个向外螺旋流动——即该过程由惯性主导而非毛细作用主导，即式(11)中第一括号内的表达式必须为正。方程(9)表示动态边界条件方程(6)在 ε 处的主导阶结果。方程(10)对应动量方程(2)在 ε 处的主导阶结果。方程(11)和方程(12)表示基线处切向应力平衡方程(6)的结果。方程(13)和方程(14)表示弹性应力本构方程(4)在轴向和径向上的主导阶结果。方程(15)描述了几何关系。特别地，对于方程(10)、方程(13)和方程(14)，当 $De=0$，$\beta=1$，τ_{prr}^0 和 $\tau_{pss}^0\to 0$ 时，这些方程退化为牛顿粘性流体方程,与 Kamis 等人[9]所得到的结果一致。这里需要简要说明的是，$X(s)$，$Y(s)$ 和 $Z(s)$ 在笛卡尔坐标系中描述射流的中心线的同时是归一化的，而 τ_{prr}^0 和 τ_{pss}^0 分别表示额外应力张量的法向和切向分量，描述了流体的粘弹性特性。方程(9)至方程(15)，结合适当的边界条件，构成一个封闭系统。在求解射流轨迹和基流时，喷嘴位置及无量纲出口速度被用作边界条件。

扰动在粘弹性离心射流表面发展的线性稳定性分析

尽管液体射流破碎是一个非线性过程，但许多特性可以通过线性理论进行较为高精度的研究，例如射流的破碎长度以及主滴的尺寸(在许多液体射流破碎情况下，生成的液滴具有不同的尺寸，因此需要研究非线性效应以确定卫星液滴的具体特性。对此将在后续部分进行更详细的讨论)。Rayleigh 提出，毛细射流的破碎是由随时间增长最快的波动模式(即“最大不稳定模式”)引起的。考虑一个无限长的轴对称柱形不可压缩流体，对自由表面施加形式为 $\exp\left(i\left(ks-n\theta+\lambda t\right)\right)$ 的扰动波，其中 s 代表沿柱体中心轴的距离，

θ 为方位角坐标，这里的 n 是模态数(modenumber)，表示绕圆柱对称轴的角度方向上的波动模式。它决定了扰动在方位角方向的变化模式。扰动的振幅与 $\exp(ks)$ 成正比。若 $Re(\lambda)>0$，则扰动振幅随时间增长，因此 $Re(\lambda)$ 被定义为扰动的实波长，虚部表示扰动的增长率。需要注意的是，这里的 $Re(\lambda)$ 表示复数波长 λ 的实部，与上面的无量纲数 Re 不同。波数 k 由 $k=2\pi/\lambda_w$ 给出，其中 λ_w 为扰动的波长。通过假设液滴的形成对应于该扰动的波长范围，可以预测射流破碎过程中生成液滴的尺寸。

当扰动的形式为 $\exp\left(i\left(kz-n\theta+\lambda t\right)\right)$，且 $Re(\lambda)>0$ 时，扰动随时间增长。这种不稳定性称为时间不稳定性(temporalinstability)。λ 为复数，表示为 $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$。扰动的振幅增长或衰减取决于 λ_i 的正负，因此 λ_i 被称为时间增长率(temporalgrowthrate)。λ 的实部代表(角)振荡频率，且 λ_r/k 为波的相速度。值得注意的是，在时间不稳定性分析中，波数 k 始终为实数。然而，Busker 等人[10]发现，这种稳定性分析假设扰动在整个流场中增长，包括喷口处。实际观测表明，喷口附近的扰动较小，并在射流下游逐渐增长。这种现象也可在实验研究中观察到，例如在喷口处施加谐波扰动以促使射流破碎，或在诸如喷墨打印机等技术设备中。这种不稳定性称为空间不稳定性(spatialinstability)，其波数为复数 $k=k_r+ik_i$，且仅有 λ 的虚部非零，即 $\lambda=i\lambda_i$。其中，k_i 为空间增长率(spatialgrowthrate)，k_r 为波数，λ_i 为频率。Busker 等人[10]指出，在空间稳定性分析中，对于不同的 k 和 n，λ 仅有两个解，但对于给定的 λ 和 n，k 可能有无穷多个解。上述空间不稳定性属于对流不稳定性(convectiveinstability)，即扰动仅随空间远离其起点而增长，而不会在扰动发生的初始位置增长。换言之，空间扰动在喷口处较小，且随传播距离的增加而增强。对于极低速射流，研究发现了一种增长速度快于 Rayleigh 模式的新型扰动。Leib 与 Goldstein [11]形式化地将这种不稳定性归类为绝对不稳定性(absolute instability)，并发现导致射流进入绝对不稳定状态的临界 We 数(表示射流惯性与表面张力的关系)是射流 Re 数(表示射流惯性与粘性的关系)的函数。在绝对不稳定性中，扰动不仅向外传播，而且在整个流场中增长，包括扰动的初始位置。Lin 与 Lian [12]进一步扩展了研究，探讨了周围气体对射流不稳定性的影响。他们发现了初始扰动将在沿着喷流的所有点上增长，这就是绝对不稳定性的定义。在本研究中，将考虑液体射流的空间对流不稳定性，即：扰动随着离开孔口的距离而增长。

现在考虑对基流施加外部扰动，并引入一个小振幅行波作为扰动的基本形式，该扰动在各种力学量中表现为以下形式：

$$\left(U,R,\tau_{pss}^{0},\tau_{prr}^{0}\right)=\left(U_0,R_0,\tau_{p0ss},\tau_{p0rr}\right)+A_{\left(U,R,\tau_{pss}^{0},\tau_{prr}^{0}\right)}\mathrm{e}^{i(ks-\omega t)} \tag{16}$$

设 k 表示扰动的波数，ω 表示扰动的频率，A 为一个极小量。$A_{\left(U,R,\tau_{pss}^{0},\tau_{prr}^{0}\right)}$ 表示各力学量中扰动的振幅，实波数 k 由 $k=\dfrac{2\pi R_0}{\lambda}$ 给出。其中 R_0 为特征半径，λ 为波长，而 ω 为喷嘴入口处引入的真实扰动频率。需要注意，在稳态方程中必须同时保留时间项和完整的曲率项。特别地，压力项 p 由以下关系给出：$p=\dfrac{1}{\mathrm{We}}\left[\dfrac{1}{R\left(1+R_s^2\right)^{1/2}}-\dfrac{R_{ss}}{\left(1+R_s^2\right)^{3/2}}\right]$，其中，We 为 Weber 数，$R_s$ 和 R_{ss} 这里使用的是先前定义的特定曲率项。此外，需要注意射流的尺度差异。在考虑沿射流传播的扰动时，类似于毛细波，扰动波长与射流半径处于相同的数量级。因此，尺度因子应表达为 s/L。其中，s 表示弧长，L 为射流的旋转半径 L。同样需要注意，这里的下标(如 s)表示对相应变量的导数，例如 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$，其中 s 为沿射流的弧长，R_s 和 R_{ss} 分别表示对弧长 s 的一阶和二阶导数，这与前面用于区分不同方向上的力学量的下标表示有所不同。线性稳定性分析的结果需要在完整的控制方程中获得，粘弹性离心射流的简化连续性方程、动量方程和粘弹性本构方程。它们是通过将细长射流近似加入到基本流中得到的。这些推导可在文献[13]中找到。这里的另

一个假设是基流的横截面是圆形的，并且轨迹通过这个圆的中心。当考虑轨迹方程中的一阶项，这些方程与直线射流情况相同，但现在选择基流作为螺旋情况。将上述扰动展开的表达式代入方程(9)~(14)可得到以下表达式：

$$\left(U_0k-\omega\right)A_R+\frac{kR_0}{2}A_u=0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3\beta}{\mathrm{Re}}k^2+ikU_0-i\omega\right)A_u-ik\left(A_{\tau_{pss}^0}-A_{\tau_{prr}^0}\right)=0\\&+\left(\frac{1}{\mathrm{We}}\frac{1}{R_0^2}ik-\frac{1}{\mathrm{We}}ik^3-\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{ik\left(\tau_{pss}^0-\tau_{pss}^0\right)}{R_0}\right)A_R\end{aligned} \tag{18}$$

$$A_{\tau_{pss}^0}\left(-i\omega+U_0ik+\frac{1}{\mathrm{De}}\right)-A_U\left(\frac{2\left(1-\beta\right)ik}{\mathrm{De}}+2ikA_{\tau_{pss}^0}\right)=0 \tag{19}$$

$$A_{\tau_{prr}^0}\left(-i\omega+U_0ik+\frac{1}{\mathrm{De}}\right)-A_U\left(ikA_{\tau_{prr}^0}-\frac{\left(1-\beta\right)ik}{\mathrm{De}}\right)=0 \tag{20}$$

方程(17)~(20)组成一组齐次方程，该方程组仅在系数矩阵的行列式为零时才存在非平凡解，其条件由方程(2.21)给出：

$$\begin{aligned}&\left(kU_0-\omega\right)^2-\frac{3\beta k^2}{\mathrm{Re}}\left(ikU_0-i\omega\right)+\frac{k^2}{\mathrm{Re}}\left(2\tau_{pss}^0+\tau_{pnn}^0+\frac{3}{\mathrm{De}}\right)\\&+\frac{k^2R_0}{2\mathrm{We}}\left(\left(\frac{1}{R_0^2}-k^2\right)+\frac{2\mathrm{We}}{R_0\,\mathrm{Re}}\left(\tau_{pss}^0-\tau_{pnn}^0\right)\right)=0\end{aligned} \tag{21}$$

该色散方程描述了射流上波的发展过程，其结果与 Alsharif & Uddin [14]的研究结果相似。从色散方程可以看出，波数 k 和频率 ω 的局部性质依赖于基流解 $U_0\left(s\right)$ 和 $R_0\left(s\right)$，后者通过求解方程(9)~(14)的稳态解得到。显然，沿弧长 s 的波数 k 和频率 ω 的空间分布可以由此逐步确定。其中，$\omega=\omega_r+i\omega_i$，其中 ω_i 为时间增长率(temporalgrowthrate)。

$$\omega_r=kU_0 \tag{22}$$

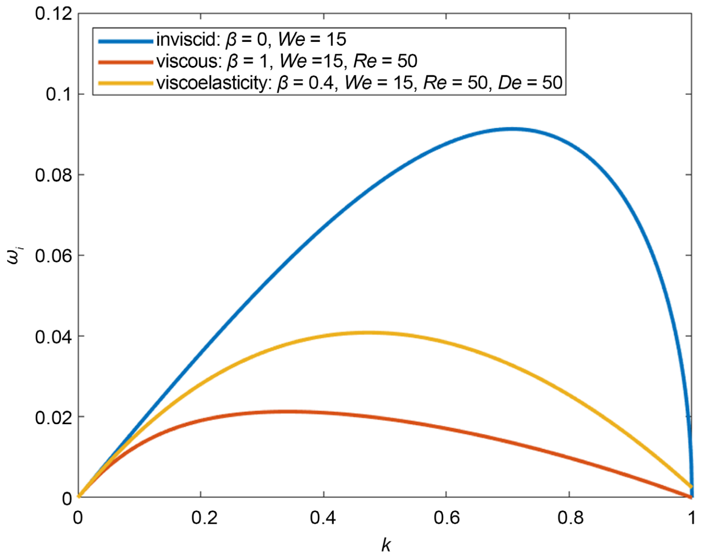
$$\begin{aligned}&\omega_i^2+\frac{3\beta k^2}{\mathrm{Re}}\omega_i-\frac{k^2}{\mathrm{Re}}\left(2\tau_{pss}^0+\tau_{pnn}^0+\frac{3}{\mathrm{De}}\right)\\&-\frac{k^2R_0}{2\mathrm{We}}\left(\left(\frac{1}{R_0^2}-k^2\right)-\frac{2\mathrm{We}}{R_0\,\mathrm{Re}}\left(\tau_{pss}^0-\tau_{pnn}^0\right)\right)=0\end{aligned} \tag{23}$$

在旋转射流的实际应用中，扰动主要由产生射流的装置边缘引入。因此，本文在射流出口处(满足 $U_0=R_0=1$)给出了增长率对波数的依赖关系。

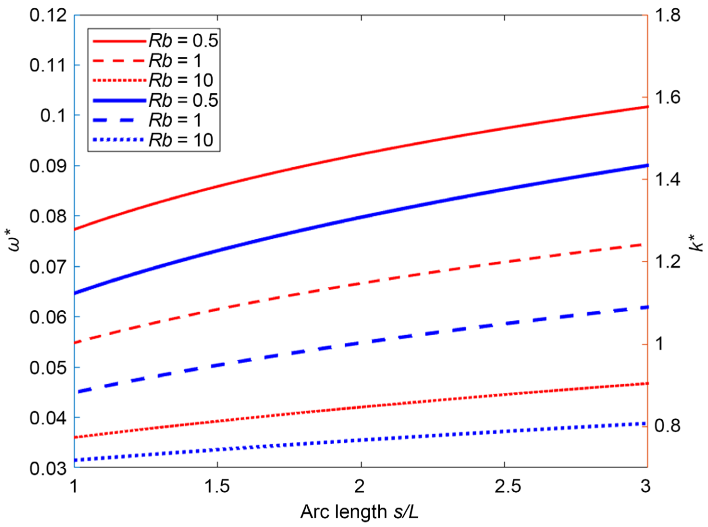
图 1(a)显示了无粘、粘性及粘弹性流体的增长率随波数的变化情况。可以观察到，无粘流体的增长率变化最为显著，这表明无粘流体射流表面的波动最不稳定。由于粘性的存在抑制了沿射流方向的能量传递，增强了能量耗散，从而阻碍了表面波的增长。这一现象与先前的研究结果一致。相比之下，由于弹性效应的存在，即使在相同的粘性条件下，粘弹性流体相比纯高粘性流体更容易发生不稳定，但其稳定性仍然高于无粘情况。在图 1(b)中，可以观察到随着旋转速度的增加(即 Rb 数的减小)，最不稳定模式 ω^* 和最不稳定波数 k^* 均增加。这表明不稳定性向短波长方向转移(短波长不稳定性)。因此，这些短波长扰动在流体中的传播速度更快，而最大不稳定模式的增加使射流更容易在较短时间内达到破碎条件。然

而，ω^* 和 k^* 的增长率(即斜率)逐渐减小。这一趋势可以通过 $\text{Rb} \gg 1$ 的极限情况来理解(即当旋转速度极低时)，此时离心射流将回归至直射流状态。这是因为速度显然受 Rossby 数 Rb 和 Froude 数 Fr 共同决定。同时，从图 1(b)还可以观察到，射流表面扰动的增长是累积的，即存在增益(gain)。为了理解射流的扰动如何导致最终破裂，从增益的角度研究射流的临界破裂条件。当考虑沿射流传播的毛细波时，其波长与射流半径处于相同的数量级。因此，其增长应当用 s/R 表达，即以射流半径为基准，而非螺旋臂长度。这一尺度设定适用于所有涉及毛细波的后续长度尺度。通过方程(16)可得到等效的空间增长率，该增长率满足：$k_i = -\omega_i / U_0$。因此，净增益(netgain)可表示为：

$$G(s) = \mathrm{e}^{S(s)}, \quad S(s) = \int_0^s -k_i(s)\,\mathrm{d}s \tag{24}$$



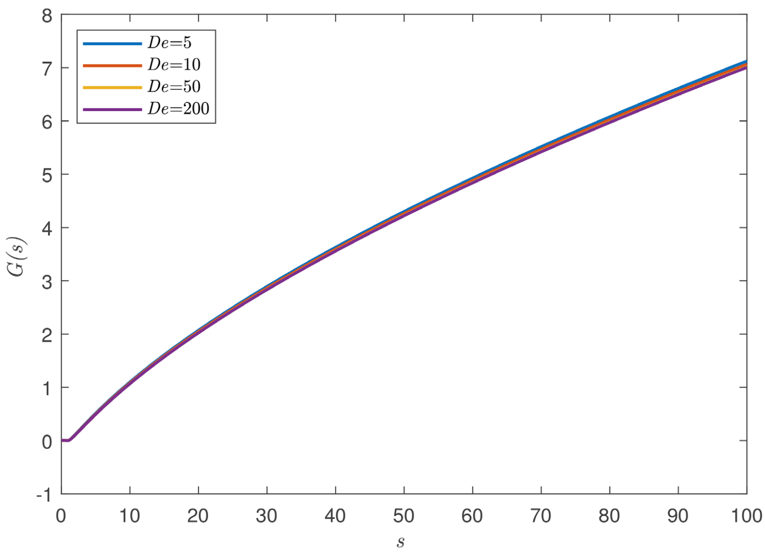
(a)



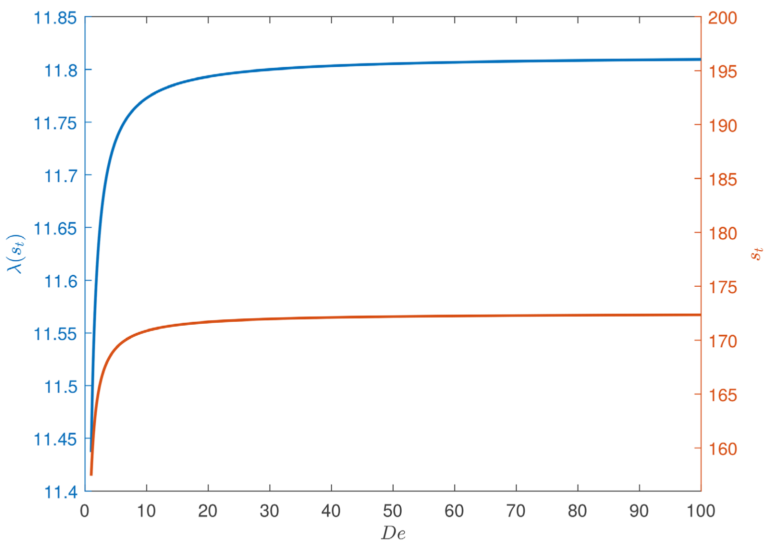
(b)

Figure 1. (a) The effect of wavenumber on the growth rate of different viscous and viscoelastic fluids; (b) The effect of different rotational speeds Rb on the most unstable mode

图 1. (a) 波数对不同粘性及粘弹性流体增长率的影响；(b) 不同旋转速度 Rb 对最不稳定模式的影响



(a)



(b)

Figure 2. (a) Effect of different Deborah numbers on the integral gain of the perturbation. (b) Dependence of the critical rupture position and the critical rupture wavelength on the Deborah number
图 2. (a) 不同 Deborah 数对扰动积分增益的影响。(b) 临界破裂位置及临界破裂波长对 Deborah 数的依赖关系

图 2(a)显示了在不同弹性条件下(采用的无量纲参数为：$We=10$，$Re=100$，$Rb=1$，$Fr=2$，$\beta=0.25$，$\omega=0.6$)，基于入口频率 $\omega=0.6$ 的局部增益沿射流的变化，其中初始相位增益为负。这是由于激励波长过小，扰动仅在波长沿射流拉伸并进入 Rayleigh 窗口后才开始增长。在较低 De 数(即弹性效应较弱)的情况下，射流表面的扰动积分增益较高，这意味着流体更容易受到扰动并产生不稳定性，使得液丝迅速破裂并形成液滴。然而，随着 De 数的增加，扰动增益显著降低，说明流体的弹性效应能够吸收部分扰动能量，从而增强射流的稳定性，延缓其破裂过程。当 De 数继续增大时，扰动增益的降低趋势趋于平缓，表明粘弹性效应的影响存在一定的饱和度，且不会无限制地增强稳定性。这一现象表明，适当的弹性效应可以有效抑制射流表面的扰动发展，从而提高喷雾或纤维成形的质量。在本研究中，选取 G = e7 作为临界破裂条件，该条件已在 LeDizVillermaux [15]中提出。图 2(b)展示了不同 Deborah 数(De)对射流临界破

裂位置 s_t 及破裂波长 $\lambda(s_t)$ 的影响，这一分析对于理解射流的演化规律及雾化特性至关重要。破裂波长是射流在破裂点处的特征长度，其计算公式如下：$\lambda(s_t)=2\pi U_0(s_t)\omega$，其中 $U_0(s_t)$ 为射流在破裂位置的速度，ω 为扰动频率。图中表明，随着 De 数的增加，射流的临界破裂位置逐渐向远离喷口的方向移动，这表明粘弹性效应在一定程度上延迟了射流的破裂，使得液丝能够传播更远。这一现象可归因于流体的弹性能够储存和释放能量，从而减缓射流界面上的扰动增长速度。此外，临界破裂波长随着 De 数的增加呈现出先增大后趋于稳定的趋势。数值结果表明，在较低 De 数下，破裂波长较小，表明射流破裂时形成的液滴较小。而随着 De 数的增加，破裂波长增大，这意味着形成的液滴尺寸也会相应增大，弹性阻尼对临界波长的增长在初始阶段较为显著。但是当 De 数进一步增加后，弹性阻尼对临界波长的增长迅速减缓，破裂波长趋于稳定，说明弹性效应对破裂特征的影响在一定范围内达到饱和状态。这一趋势与(a)中的观测结果一致。

3. 结论

本研究深入探讨了液体射流的破碎机制，尤其是外部扰动对射流不稳定性的影响。通过理论模型分析，研究表明，粘弹性效应能够显著提高射流的稳定性，延缓破裂过程，这对于喷雾或纤维成形等工业应用具有重要意义。此外，射流的破裂波长和破裂位置随着 Deborah 数的变化而变化，这表明流体的弹性效应在一定程度上延缓了破裂的发生，尤其在较低的 Deborah 数下，射流表面较易发生不稳定性。该研究为进一步优化液体射流的应用提供了理论依据，特别是在提高喷雾或液滴生成过程的质量方面具有重要价值。

参考文献

[1] Javadi, A. (2013) Drops and Jets of Complex Fluids. https://hdl.handle.net/11245/1.395832

[2] Soderberg, D. (1997) Experimental and Theoretical Studies of Plane Liquid Jets. https://www.researchgate.net/publication/240907510_Experimental_and_Theoretical_Studies_of_Plane_Liquid_Jets

[3] Patrascu, C. and Balan, C. (2022) Dispersion Relations, Capillary Waves, and the Rayleigh-Plateau Instability. *Incas Bulletin*, **14**, 75-85. https://doi.org/10.13111/2066-8201.2022.14.2.7

[4] Bodo, G. and Ferrari, A. (1994) Kelvin-Helmholtz Instability of Hydrodynamic Supersonic Jets. *Astronomy and Astrophysics*, **283**, 655-661.

[5] Wang, H., Hu, H., Yang, B., Yang, J., Yang, Y. and Wang, Y. (2024) Investigation of Droplet Splashing Behavior during Oblique Jet Impact onto a Wall. *Physics of Fluids*, **36**, Article ID: 105117. https://doi.org/10.1063/5.0227313

[6] Xu, Z., Kim, M., Oh, W., *et al.* (2005) Atomization of a High-Speed Jet. *Physics of Fluids*, **17**, 095107. https://pubs.aip.org/aip/pof/article/17/9/095107/881173

[7] Shikhmurzaev, Y.D. and Sisoev, G.M. (2017) Spiralling Liquid Jets: Verifiable Mathematical Framework, Trajectories and Peristaltic Waves. *Journal of Fluid Mechanics*, **819**, 352-400. https://doi.org/10.1017/jfm.2017.169

[8] Li, Y., Sisoev, G.M. and Shikhmurzaev, Y.D. (2019) On the Breakup of Spiralling Liquid Jets. *Journal of Fluid Mechanics*, **862**, 364-384. https://doi.org/10.1017/jfm.2018.956

[9] Kamis, Y.E., Prakash, S., Breugem, W. and Eral, H.B. (2023) Controlling the Breakup of Spiralling Jets: Results from Experiments, Nonlinear Simulations and Linear Stability Analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, **956**, A24. https://doi.org/10.1017/jfm.2023.31

[10] Busker, D.P., Lamers, A.P.G.G. and Nieuwenhuizen, J.K. (1989) The Non-Linear Break-Up of an Inviscid Liquid Jet Using the Spatial-Instability Method. *Chemical Engineering Science*, **44**, 377-386. https://doi.org/10.1016/0009-2509(89)85074-2

[11] Leib, S.J. and Goldstein, M.E. (1986) Absolute Instability Ininviscid Jets: Theory and Numerical Simulations: NASA-CR-178446. NASA Technical Reports

[12] Lin, S.P. and Ibrahim, E.A. (1990) Instability of a Viscous Liquid Jet Surrounded by a Viscous Gas in a Vertical Pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, **218**, 641-657. https://doi.org/10.1017/s002211209000115x

[13] Eggers, J. (1997) Nonlinear Dynamics and Breakup of Free-Surface Flows. *Reviews of Modern Physics*, **69**, 865-930.

https://doi.org/10.1103/revmodphys.69.865

[14] Alsharif, A.M., Uddin, J. and Afzaal, M.F. (2015) Instability of Viscoelastic Curved Liquid Jets. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 3924-3938. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.12.011

[15] Dizès, S.L. and Villermaux, E. (2017) Capillary Jet Breakup by Noise Amplification. *Journal of Fluid Mechanics*, **827**, 392-417.