

含驱动外场的超导量子比特退相干问题研究

李 恺*, 杨海彬, 王文龙

海军工程大学基础部物理教研室, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年9月17日; 录用日期: 2025年10月15日; 发布日期: 2025年10月24日

摘 要

超导量子比特的退相干效应是量子计算发展的主要障碍之一。本文基于最新超导量子比特实验参数($T_1 = 200 \mu s$, $T_2 = 300 \mu s$), 通过求解含驱动场的主方程, 得到了系统的稳态解, 分析了量子态的退相干动力学过程。本文进一步采用4~5阶龙格-库塔法数值求解Bloch方程, 并计算得到在当前高保真度门操作时间10 ns内, 退相干效应的影响已显著降低(态保真度 $> 99.7\%$)。通过计算发现, 驱动外场频率与量子比特固有振动频率的失谐, 能够有效保护量子比特的相干性。

关键词

超导量子比特, 退相干, Bloch方程, 门操作保真度

Research on Decoherence of Superconducting Qubits with Driving External Field

Kai Li*, Haibin Yang, Wenlong Wang

Department of Basic Courses, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

Received: September 17, 2025; accepted: October 15, 2025; published: October 24, 2025

Abstract

The decoherence effect of superconducting qubits is one of the main obstacles to the development of quantum computing. Based on the latest experimental parameters of superconducting qubits ($T_1 = 200 \mu s$, $T_2 = 300 \mu s$), the steady-state solution of the system is obtained by solving the master equation with the driving field, and the decoherence dynamics of the quantum state is analyzed. In this paper, the 4~5 order Runge Kutta method is further used to numerically solve the Bloch equation,

*通讯作者。

and it is calculated that the influence of decoherence effect has been significantly reduced (state fidelity > 99.7%) within 10 ns of the current high fidelity gate operation time. It is found that the detuning between the driving external field frequency and the natural vibration frequency of the qubit can effectively protect the coherence of the qubit.

Keywords

Superconducting Qubit, Decoherence, Bloch Equation, Gate Operation Fidelity

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

量子计算凭借其超越经典计算的潜力，在密码学、材料模拟和药物设计等领域展现出广阔前景。然而，量子系统与环境相互作用的退相干效应一直是实现实用量子计算的主要障碍。退相干过程导致量子态相位信息丢失，使得量子计算过程中误差积累，最终导致计算失败。超导量子比特作为最有前途的量子计算平台之一，近年来在相干时间和门操作保真度方面取得了显著进展。

在量子计算中，退相干的影响主要体现在两个阶段：量子态存储阶段和门操作阶段。在存储阶段，量子比特处于自由演化状态，退相干时间 T_1 (能量弛豫时间) 和 T_2 (退相位时间) 直接决定了量子信息的保存时长[1]。在门操作阶段，外部驱动场被施加到量子比特上，此时退相干效应与控制误差共同影响门操作的保真度。随着超导量子比特相干时间从纳秒量级提高到百微秒量级甚至毫秒量级，门操作期间退相干的影响已大大降低[2]。

量子退相干的理论研究始于二十世纪八十年代。Zurek 提出了量子退相干理论，解释了环境如何破坏量子叠加态[3] [4]。随后，Shor 和 Steane 分别提出了量子纠错码和稳定子码方法来对抗退相干引起的错误[5] [6]。在超导量子比特方面，Martinis 等人开发的传输量子比特(transmon)显著提高了相干时间[7]。近年来，Retzker 团队提出了利用交叉相关噪声的破坏性干扰来延长相干时间的新方法，将稳定性提高了十倍[8]。闫磊磊等人提出了基于“捕获 - 释放”动力学的量子计算方案(CRQC)，有效抑制了退相干，将量子门保真度提高至 99.91% [9]。

本文基于最新超导量子比特实验数据，系统研究了退相干动力学过程，分析了门操作时间与退相干时间的关系，探讨了影响门操作保真度的主要因素及解决方案，为未来高保真度量子门设计提供了理论指导。

2. 量子态退相干问题

2.1 Bloch-Redfield 主方程(BRME)

基于含驱动外场哈密顿量的主方程问题，我们可以考虑一个两能级系统，以其 z 方向的自旋态作为量子比特的 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，其系统哈密顿量为 $H_s = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z$ ， ω_0 可以理解为系统的固有振动频率。当量子比特需要进行门运算时，实质上是对该系统施加一个可操控自旋态的驱动外场，驱动外场的哈密顿量为 $\tilde{\rho}(t) = U(t) \rho(t) U^\dagger(t)$ 。其中， Ω 是 Rabi 频率， ω_d 是驱动场的振动频率。如果定义失谐量 $\Delta = \omega_0 - \omega_d$ ，我们可以探究外场频率和固有频率，在共振或者存在一定失谐时的退相干问题。

主方程描述的是系统约化密度矩阵的演化，而 Bloch-Redfield 方法的核心是马尔可夫近似(环境记忆时间远短于系统演化时间)和旋转波近似(忽略高频振荡项) [1]。

驱动项包含时间依赖的 $\cos(\omega_d t)$ ，通过么正变换 $U(t) = e^{i\omega_d t \sigma_z/2}$ 转换到“旋转坐标系”(与外场同频旋转)，新密度矩阵 $\tilde{\rho}(t) = U(t)\rho(t)U^\dagger(t)$ ，其演化方程满足

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = U(t) \frac{d\rho}{dt} U^\dagger(t) + i\omega_d \left[\frac{\sigma_z}{2}, \tilde{\rho} \right] \quad (1)$$

将原 BRME 代入，利用 Pauli 矩阵对易关系化简后，在旋转框架下通过旋转波近似，有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = -\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\Omega}{2}\sigma_x \quad (2)$$

H_{eff} 包含系统自由项、驱动项及环境导致的能级移位，但都属于么正演化的部分，不论如何影响，系统和环境始终没有能量交换。主方程中还包括耗散项，用来描述自发辐射和纯退相位，最终 BRME 的形式为

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_{\text{eff}}, \rho] + \mathcal{L}[\rho] \quad (3)$$

$\mathcal{L}[\rho]$ 是耗散算符，对超导量子比特而言，主要的噪声源包括能量弛豫和退相位，具体表达如下

$$\mathcal{L}[\rho] = \Gamma_1 \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho \} \right) + \Gamma_\phi (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho) / 2 \quad (4)$$

这里， $\Gamma_1 = 1/T_1$ 是弛豫率， Γ_ϕ 是纯退相位率。通常，退相位率 $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_\phi$ ，且 $\Gamma_2 = 1/T_2$ 。将密度矩阵参数化为布洛赫矢量形式

$$\rho = \frac{1}{2} (I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \quad (5)$$

则主方程转化为布洛赫方程：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Delta y - \Gamma_2 x \\ \frac{dy}{dt} = -\Delta x - \Omega z - \Gamma_2 y \\ \frac{dz}{dt} = \Omega y - \Gamma_1 (z + 1) \end{cases} \quad (6)$$

其中， x 、 y 、 z 是布洛赫矢量分量。该方程组是线性常微分方程组，可通过解析方法(特征值分解)或数值方法求解。

2.2. 4~5 阶龙格 - 库塔(RK45)方法

四阶龙格 - 库塔法(RK4)是一种高精度的数值积分方法，可以用于求解非线性微分方程[10]。

对于一阶微分方程 $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ ，RK4 方法的迭代公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

其中，

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2) \\
k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_2/2) \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3),
\end{aligned} \tag{8}$$

h 是步长。对于布洛赫方程，我们需要同时求解三个变量 x 、 y 、 z ，因此需要分别计算它们的 k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 ，然后同时更新。RK4 方法的局部截断误差为 $O(h^5)$ ，全局误差为 $O(h^4)$ ，具有较高的精度和稳定性，非常适合求解量子系统的动力学演化。

传统的 RK4 是固定步长的 4 阶龙格 - 库塔方法，需要手动指定步长，精度固定，且在复杂系统中可能需要更小的步长才能保证精度，效率较低。在代码编程时，我们将采用 4~5 阶龙格 - 库塔方法(RK45，一种自适应步长方法)。它会根据误差估计自动调整步长：在精度要求高的区域用小步长，在变化平缓的区域用大步长，兼顾效率和精度。

3. 超导量子比特的退相干解

量子比特在制备完成后，不论是在存储过程中还是在计算过程中，都不可避免地与环境发生相互作用。当时间足够长时，量子态最终会和环境共同达到稳定状态，不再发生改变，因此我们需要先得到量子态退相干后的稳态解。但达到退相干最大化的量子比特已经属于混合态，没有相干特性，显然不能用于量子计算。因此我们还需要评估量子比特在多大的退相干时间内可以保持高度的相干性，以用于量子计算。

3.1. 稳态解

在稳态条件下，量子态的布洛赫矢量不再随时间演化，因此满足 $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$ 。基于以上条件，我们可以解析地求解方程组：

$$\begin{cases}
0 = \Delta y - \Gamma_2 x \\
0 = -\Delta x - \Omega z - \Gamma_2 y \\
0 = \Omega y - \Gamma_1 (z + 1)
\end{cases} \tag{9}$$

解得：

$$x_{ss} = \frac{\Omega \Delta}{\Delta^2 + \Gamma_2^2 + \frac{\Omega^2 \Gamma_2}{\Gamma_1}}, \quad y_{ss} = \frac{\Omega \Gamma_2}{\Delta^2 + \Gamma_2^2 + \frac{\Omega^2 \Gamma_2}{\Gamma_1}}, \quad z_{ss} = \frac{\frac{\Omega^2 \Gamma_2}{\Gamma_1}}{\Delta^2 + \Gamma_2^2 + \frac{\Omega^2 \Gamma_2}{\Gamma_1}} - 1 \tag{10}$$

因此稳态解的密度矩阵为

$$\rho_{ss} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z_{ss} & x_{ss} - iy_{ss} \\ x_{ss} + iy_{ss} & 1 - z_{ss} \end{pmatrix} \tag{11}$$

ρ_{ee} 代表系统处于激发态的概率。 ρ_{gg} 则代表系统处于基态的概率。 ρ_{eg} 和 ρ_{ge} 反映了激发态和基态之间的量子相干性，表示系统处于叠加态的能力，反映了偶极子的振荡和相位信息。相干性由驱动场维持，但被耗散部分抑制。实部代表布洛赫矢量的 x 分量，虚部代表 y 分量，表示偶极子相对于驱动场的相位。

这种稳态是驱动和耗散相互竞争的结果。根据最新研究(如清华大学的“天目 2 号” 125 比特超导量子芯片和 Google 的 Sycamore 处理器等)，目前超导量子比特的性能参数已有显著提升。我们采用以下参

数来演示性地计算一下稳态解:

弛豫时间 T_1 : 超导量子比特的弛豫时间目前可达 $100\sim 300\ \mu\text{s}$ 。这里取典型值 $T_1 = 200\ \mu\text{s}$, 对应弛豫率 $\Gamma_1 = 5 \times 10^3\ \text{Hz}$ 。

退相位时间 T_2 : 由于纯退相位时间的改善, 总退相干时间 T_2 可接近 $2T_1$ 。取 $T_2 = 300\ \mu\text{s}$, 对应退相位

$$\Gamma_\phi = \Gamma_2 - \Gamma_1/2 = 833\ \text{Hz}$$

率 $\Gamma_2 = 3.333 \times 10^3\ \text{Hz}$ 。纯退相位率

$$F(t) = \langle g | \rho(t) | g \rangle = \rho_{gg}(t) = \frac{1-z(t)}{2}$$

驱动强度 Ω : 目前高保真度门操作中, Rabi 频率典型值为 $\Omega = 2\pi \times 10^7\ \text{Hz}$ (参考保真度 99.5% 以上的门操作)。

失谐量 Δ : 取共振情况 ($\Delta = 0$) 和典型失谐情况 ($\Delta = 2\pi \times 10^6\ \text{Hz}$) 进行对比分析。

我们令初态 $\rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 共振时有 $\Delta = 0$, 带入以上参数得到 $\rho_{ss} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。可以看到稳态解和初态几乎相同, 原因在于 $\Omega \gg \Gamma_1, \Gamma_2$, 系统被强烈驱动, 但耗散相对较弱, 稳态就会非常接近基态。

当驱动频率和固有频率存在大失谐时, 此时的稳态解则会产生非常大的不同。运用 RK45 方法求解, 我们解得 $\Delta = 2\pi \times 10^6\ \text{Hz}$ 时, 稳态密度矩阵为

$$\rho_{ss} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.971 & 0.291 - i0.000154 \\ 0.291 + i0.000154 & 1.029 \end{pmatrix} \quad (12)$$

可以看到当失谐较大时, 量子态最终会以较均匀的概率处于基态或者激发态上, 失谐同样也会影响相干性的大小(密度矩阵的非对角元)。

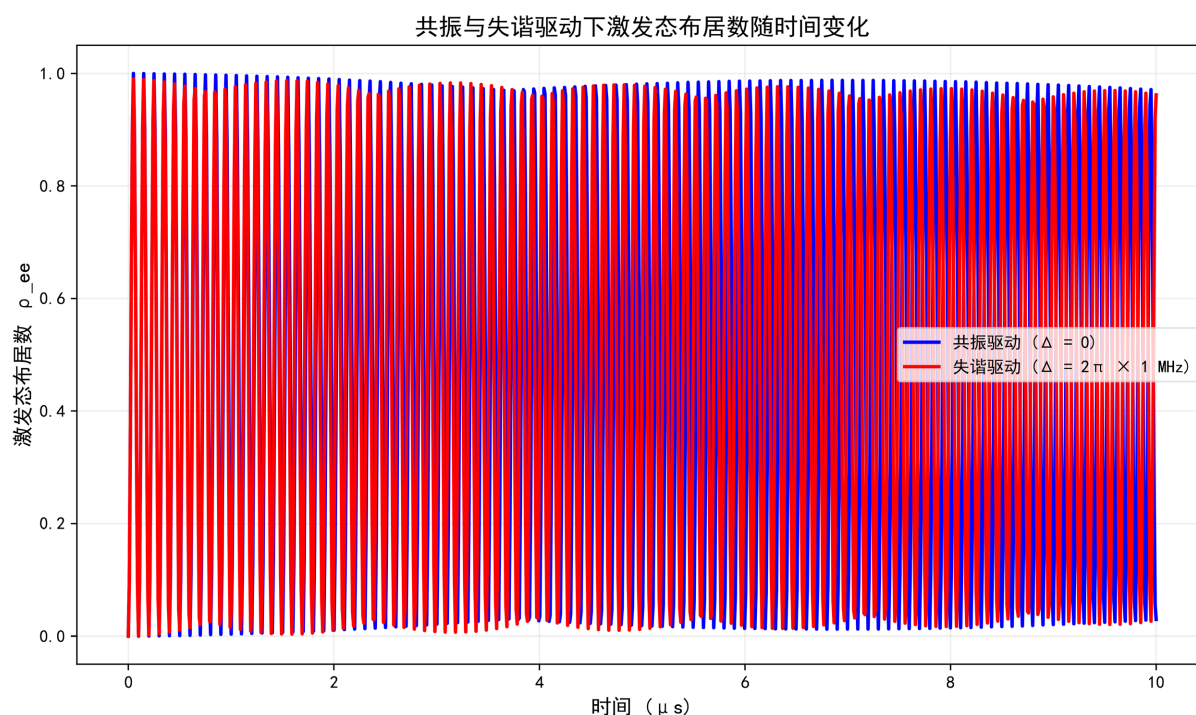


Figure 1. Changes in the population of excited states over time under resonance and detuning conditions

图 1. 共振与失谐条件下, 激发态布居数随时间的变化

从图 1 中可以看到, 共振时的布居数衰减速率(蓝色曲线)明显慢于失谐的衰减速率, 这表明失谐的存

在会一定程度降低量子比特的相干性。

3.2. 退相干与量子比特保真度

保真度是衡量量子态保持其初始纯度的指标。量子比特在进行操作的同时，退相干也会使量子比特逐渐失真。因此在单次门操作时间内，量子比特的退相干会在多大程度上影响比特保真度，是需要考虑在内的。

对于初始为基态的系统，保真度定义为：

$$F(t) = \langle g | \rho(t) | g \rangle = \rho_{gg}(t) = \frac{1 - z(t)}{2} \quad (13)$$

我们可以同样计算出，在共振和失谐情况下，保真度随时间的变化情况，见图 2。随着时间的推移，共振驱动下的保真度的演化会逐渐落后于失谐的曲线(蓝色曲线落后于红色曲线)，这使得长时间的比特操作的延迟逐渐增加。但正是由于这种延迟效应，使得在单次比特翻转周期内的同一时刻，失谐保真度是要大于共振保真度的。这证明了如果适当在驱动场中添加一定的失谐，可以提高门操作时的比特保真度。

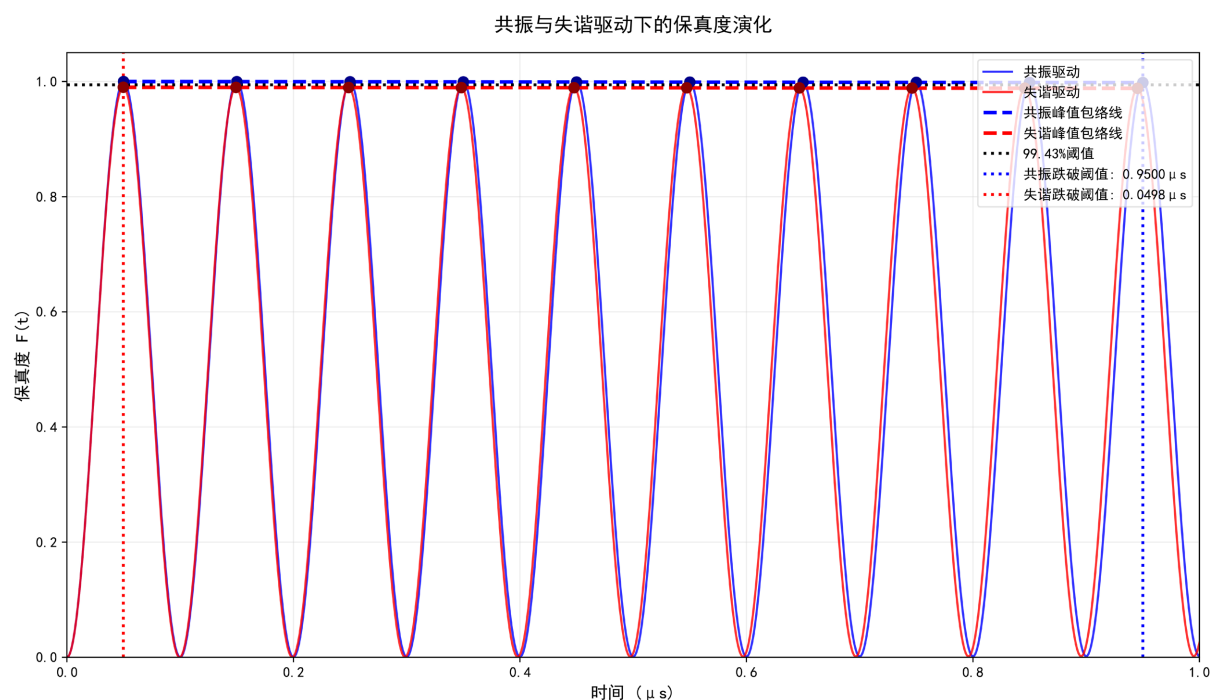


Figure 2. Evolution of fidelity under resonance and detuning driving

图 2. 共振与失谐驱动下的保真度演化

在单量子比特操作时长为 10 ns 左右时(如 X 门、H 门)，共振驱动的保真度降为 0.997235，失谐驱动的保真度降为 0.998152。可以看到，存在失谐的情况下，保真度反而更高，证明失谐对量子态相干性的保护作用。这是由于共振驱动与系统耦合更强，导致量子态在布洛赫球上旋转更快，微小的弛豫效应会更快体现在保真度衰减上；而失谐削弱了耦合，减缓了态的演化速度，因此衰减更慢。

两种驱动的衰减比例均低于 0.3%，这是因为 10 ns 远小于系统的弛豫时间，相干性损耗尚未显著积累。因此以现在最新的超导量子比特相干性而言，可以满足表面码纠错的阈值需求。

需要注意的是在稳态解演化和门操作下的演化过程中,失谐产生的物理效果看似是相矛盾的。稳态演化过程中失谐会使得布局数衰减更快,而门操作时,失谐又能减缓保真度的下降速度。真实原因如下:

图 1(激发态布居数随时间变化):失谐驱动下衰减快,是因为失谐削弱了驱动与系统的耦合强度,导致激发态布居数难以被驱动维持,更快向“基态-激发态均匀分布”的稳态趋近;

图 2(保真度随时间变化):失谐驱动下保真度高,是因为共振驱动时系统耦合强,布洛赫矢量在布洛赫球上旋转更快,微小弛豫效应会快速体现在保真度衰减上;而失谐减缓了态的演化速度,弛豫导致的保真度损耗更慢(尤其在 10 ns 短门操作时间内,“演化慢”的优势盖过“布居数衰减快”的影响)。

4. 总结与展望

本研究基于最新超导量子比特实验参数,通过解析和数值求解 Bloch 方程,分析了量子态退相干动力学特性。结果表明,随着超导量子比特相干时间的大幅提升($T_1 = 200 \mu\text{s}$, $T_2 = 300 \mu\text{s}$),退相干在门操作期间(10 ns)的影响已变得非常小(误差 $< 0.3\%$),满足表面纠错码的阈值下限,说明退相干已不再是限制门操作保真度的主要因素。同时存在一定失谐的驱动外场,能有效延长量子相干性的时长,代价则是牺牲一定的量子比特演化速度。

本文仅针对单点失谐(共振 $\Delta = 0$ 、典型失谐 $\Delta = 2\pi \times 1 \text{ MHz}$)开展了计算,明确了“失谐可影响激发态布居数衰减速率与门操作保真度”的定性结论,且给出了关键参数范围(弛豫率 $\gamma_1 = 1/T_1 = 5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 、纯退相位率 $\gamma_\phi = 1/(2T_2) \approx 1.67 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 、Rabi 频率 Ω 为高保真度门操作典型值),为后续系统性扫描提供了参数基准。后续将对失谐 Δ 的分析从单个点扩展为在一个合理范围内(例如 -5Ω 到 $+5\Omega$)的系统性扫描,进行多变量保真度计算,并绘制门保真度随 Δ 和 Ω 变化的二维图,以更全面地展示失谐的保护作用,并尝试找到在给定门操作时间下的最优工作点。

同时本文仅对连续波的门操作进行了计算,后续将连续波驱动替换为时间依赖的脉冲驱动,选取量子计算中常用的高斯脉冲(脉冲形状为 $g(t) = A \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right]$, 其中 A 为振幅、 σ 为脉宽、 t_0 为脉冲中心),确保脉冲面积满足“ π 脉冲”需求($\int_0^{\text{pul}} g(t) dt = \pi$, 实现量子态翻转),修正驱动哈密顿量为

$$H_d(t) = \frac{g(t)}{2} (\sigma_x \cos \omega_d t + \sigma_y \sin \omega_d t)。$$

最后,影响门操作保真度的主要因素已转变为:

(1) 控制误差:包括幅度失谐、频率失谐和时间失谐,这些系统误差可以通过精细校准和反馈控制来抑制;

(2) 1/f 噪声:源于二能级系统缺陷的涨落,是当前限制超导量子比特性能的主要因素之一,可以尝试通过动态解耦和脉冲优化来抑制;

(3) 非理想效应:包括旋波近似失效和载波包络失真,需要在理论模型中更精确地描述;

(4) 能级泄漏与串扰:尤其对于 transmon 超导量子比特等多能级系统,需要采用 DRAG 等高级脉冲整形技术来抑制。

为了提高门操作保真度,未来可以利用交叉相关噪声的破坏性干扰,这样可以显著延长相干时间。在错误不可避免或已经产生的情况下,可以利用量子纠错编码来主动纠正错误,但是同样也会带来量子比特数目的增加。

随着超导量子比特性能的不不断提升,量子门操作的优化重点已从抑制退相干转向控制精度优化和噪声抑制。这些进展将推动量子计算从当前的有噪声中等规模量子(NISQ)时代向可靠的大规模量子计算时代迈进。

基金项目

本文衷心感谢海军工程大学自主立项科研项目 NO. 2023501030 的资助。

参考文献

- [1] Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. (2010) Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press.
- [2] 赵虎, 李铁夫, 刘其春, 等. 三维传输子量子比特的退相干参数表征[J]. 物理学报, 2014, 63(22): 69-76.
- [3] Zurek, W.H. (1991) Decoherence and the Transition from Quantum to Classical. *Physics Today*, **44**, 36-44.
<https://doi.org/10.1063/1.881293>
- [4] Zurek, W.H. (2003) Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical. *Reviews of Modern Physics*, **75**, 715-775. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.75.715>
- [5] Shor, P.W. (1995) Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory. *Physical Review A*, **52**, R2493-R2496. <https://doi.org/10.1103/physreva.52.r2493>
- [6] Steane, A.M. (1996) Error Correcting Codes in Quantum Theory. *Physical Review Letters*, **77**, 793-797.
<https://doi.org/10.1103/physrevlett.77.793>
- [7] Martinis, J.M., Devoret, M.H. and Clarke, J. (2020) Quantum Josephson Junction Circuits and the Dawn of Artificial Atoms. *Nature Physics*, **16**, 234-237. <https://doi.org/10.1038/s41567-020-0829-5>
- [8] Salhov, A., Cao, Q., Cai, J., Retzker, A., Jelezko, F. and Genov, G. (2024) Protecting Quantum Information via Destructive Interference of Correlated Noise. *Physical Review Letters*, **132**, Article 223601.
<https://doi.org/10.1103/physrevlett.132.223601>
- [9] Zhang, S., Wei, J., Song, P., Yan, L., Kinoshita, A., Su, S., *et al.* (2025) Quantum Computation Based on Capture-and-Release Dynamics. *Physical Review A*, **111**, Article 012604. <https://doi.org/10.1103/physreva.111.012604>
- [10] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., *et al.* (1986) Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press.