Applied Physics 应用物理, 2026, 16(3), 144-153
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2026.163014

Hans汉斯

受控跃迁下的一维扩展Hubbard模型的基态相图

白培焯，孙　欣，丁汉芹*

新疆大学物理科学与技术学院，新疆　乌鲁木齐

收稿日期：2026年1月26日；录用日期：2026年3月3日；发布日期：2026年3月11日

摘　要

我们通过引入调制参数ξ，在弱耦合区域研究了由受控跃迁、在位作用 U 和最近邻库仑作用 V 描述的一维关联电子体系。研究表明，诱导产生的三体吸引作用改变了标准 Hubbard 模型的相图。在半满情况下，除了熟悉的电荷密度波(CDW)和自旋密度波(SDW)，基态相图中$|U-2V|<8\xi^2 t/\pi$ 区域还存在一个键序自旋密度波(BSDW)。当最近邻库仑作用 V 消失时，体系中存在绝缘体－金属相变。在$\xi>\sqrt{\pi U/8t}$ 区域，存在三重超导(TS)序 Luttinger 金属相。我们也从有效相互作用角度讨论了包含超导(TS, SS)的一般量子相图。

关键词

一维，Hubbard 模型，受控跃迁，弱耦合，基态相图

Ground State Phase Diagram of the One-Dimensional Extended Hubbard Model with Modified Hopping

Peizhuo Bai, Xin Sun, Hanqin Ding*

School of Physical Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: January 26, 2026; accepted: March 3, 2026; published: March 11, 2026

Abstract

By introducing a modulation parameter ξ, we study the one-dimensional correlated system with modified hopping, on-site U and nearest-neighbor V repulsion in the weak-coupling regime. The

*通讯作者。

文章引用: 白培焯, 孙欣, 丁汉芹. 受控跃迁下的一维扩展 Hubbard 模型的基态相图[J]. 应用物理, 2026, 16(3): 144-153. DOI: 10.12677/app.2026.163014

induced three-body attraction changes the phase diagram of the standard Hubbard model. Besides the usual charge-density-wave (CDW) and spin-density-wave (SDW), a bond-spin-density-wave (BSDW) phase exists for $|U-2V|<8\xi^2 t/\pi$ at half filling. In the absence of the nearest neighbor Coulomb interaction V, an insulator-metal transition takes place. A Luttinger metallic phase with the triplet superconducting (TS) correlations is realized for $\xi>\sqrt{\pi U/8t}$. Effectively, a general quantum phase diagram including superconductivity (TS, SS) is also discussed.

Keywords

One Dimension, Hubbard Model, Modified Hopping, Weak Coupling, Ground State Phase Diagram

1. 引言

低维体系和电子关联一直是凝聚态物理中一个重要的研究课题。一维 Hubbard 模型是描述低维关联电子体系物理行为的最小量子模型，它的哈密顿量包含二项：除了单个电子在最近邻格点间跃迁运动(t)，同位格点上的二个自旋相反的电子还存在一定强度的库仑排斥作用(U)。此时，体系的低能激发表现为独立的电荷激发和自旋激发，费米液体理论失效，低能行为由 Luttinger 液体理论描述。Hubbard 模型有着悠久的研究历史，它与很多准一维结构材料相关，如聚合物[1]，鍶铜氧化物[2]和电荷转移盐[3]。但是，Hubbard 模型本身只考虑了局域电子间的关联，具有一定程度的应用局限性。因此，具有非局域电子相互作用的扩展 Hubbard 模型描述更加复杂的物理，其中一个简单且重要扩展是具有最近邻电子库仑作用(V)的一维 t-U-V 模型[4]。在半满填充和排斥区域，该模型的基态相图深受广泛的研究[5]-[19]。很长时间以来，研究得到的共识是：模型的量子相图由相变线 $U=2V$ 分为二个相区，$U>2V$ 区域对应自旋密度波(SDW)，$U<2V$ 区域对应电荷密度波(CDW)。出乎预料，Nakamura 第一次打破了二相区的物理图像。他通过数值计算发现，在自旋密度波和电荷密度波之间的 $U\simeq 2V$ 附近，在弱耦合和中间耦合部分区域，还存在着一个键序电荷密度波(BCDW) [12]。这个结论立即引起了人们对 t-U-V 模型基态相图的研究兴趣[13]-[19]。其中，大量数值研究都验证了这个新相的存在，但对 SDW，CDW he BCDW 的三相点位置存在一些分歧。

为了进一步从物理上揭示 SDW-CDW 相变和键位密度波的形成原因，Nakamura 考虑了关联跃迁(X)的影响，他认为 X 分离了重合在 $U=2V$ 的 Gaussian 相变线和自旋－能隙相变线，$X<0$ 情况扩大了简并在基态中的 BCDW 相；$X>0$ 情况产生另一个键位自旋密度波(BSDW) [12]。与此不同，双占据态跃迁作用(W) [20]和近邻 Heisenberg 作用(J) [21]也能导致一维电子体系中的 BCDW 相的产生。除此之外，人们通过改变电子常规跃迁运动，推广 Hubbard 模型。在这篇文章中，我们研究这样的一维相互作用的电子系统，模型的哈密顿量对应下列形式：

$$\begin{aligned} H &= H_t + H_U + H_V \\ &= -t\sum_{j,\alpha}\left(\bar{c}^{\dagger}_{j,\alpha}\bar{c}_{j+1,\alpha} + h.c.\right) + U\sum_j n_{j\uparrow}n_{j\downarrow} + V\sum_j n_j n_{j+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

哈密顿量中的变形 Hubbard 算符定义为

$$\bar{c}_{j,\alpha}=c_{j,\alpha}\left(1-\xi n_{j,\bar{\alpha}}\right), \tag{2}$$

其中，$\bar{\alpha}=-\alpha$，表示 S_z 表象中相反的自旋方向。为了从物理上明确算符(2)的引入，我们把它代入哈密顿量(1)中的动能项，可分解为三种方式的单电子跃迁：

$$\begin{aligned}H_t=&-t\sum_{j,\alpha}\left(c_{j,\alpha}^{\dagger}c_{j+1,\alpha}+h.c.\right)\left(1-n_{j,\bar{\alpha}}\right)\left(1-n_{j+1,\bar{\alpha}}\right)\\&-(1-\xi)^2 t\sum_{j,\alpha}\left(c_{j,\alpha}^{\dagger}c_{j+1,\alpha}+h.c.\right)n_{j,\bar{\alpha}}n_{j+1,\bar{\alpha}}\\&-(1-\xi)t\sum_{j,\alpha}\left(c_{j,\alpha}^{\dagger}c_{j+1,\alpha}+h.c.\right)\left[n_{j,\bar{\alpha}}\left(1-n_{j+1,\bar{\alpha}}\right)+n_{j+1,\bar{\alpha}}\left(1-n_{j,\bar{\alpha}}\right)\right].\end{aligned} \tag{3}$$

第一项表示单占据态电子和空占据态的交换，跃迁积分为 t；第二项表示双占据态和单占据态的交换，跃迁积分为 $(1-\xi)^2 t$；第三项表示双占据态中的电子向空占据态的跃迁，跃迁积分为 $(1-\xi)t$。根据量子力学，这三种情况波函数的交叠程度不完全一样，因此相应的跃迁积分可以存在理论上的不同。参数 ξ 调制跃迁矩阵元的大小，越小引起的跃迁积分就越接近，这是依赖占据数(0, 1, 2)的跃迁，就是本文引入的受控跃迁。当 $\xi=0$ 时，系统恢复到传统的 t-U-V 模型。当 $\xi=1$ 时，希尔伯特空间中没有双占据态。因此，我们只需要考虑 $0<\xi<1$ 的情况。但是人们立即意识到受控跃迁项会引发二个附加的多体作用：二体作用和三体作用。下面我们研究受控跃迁对模型(1)的基态相图的影响。我们仅考虑弱排斥相互作用($U/t, V/t\ll 1$)和小的调制参数($\xi\ll 1$)，在这种条件下，玻色化方法和重整化群技术可以很好的运用。我们将展示，没有库仑作用 V 时，三相超导可以在 $\xi\geq\xi_c=\sqrt{\pi U/8t}$ 区域形成。当二体对角作用 U 和 V 同时存在时，诱导产生的三体吸引作用破坏 t-U-V 模型后向散射和倒逆散射的附加对称性，原来重合在 $U=2V$ 的高斯相变线和自旋－能隙相变线分开，在此位置形成键序自旋密度波(BSDW)。系统的基态相图包含三个绝缘相：在 $2V-U>8t\xi^2/\pi$ 区域是电荷密度波(CDW)，在 $|2V-U|<8t\xi^2/\pi$ 是键序自旋密度波(BSDW)，在 $U-2V>8t\xi^2/\pi$ 区域时电荷密度波(CDW)。我们并没有发现值得争议的键序电荷密度波(BCDW)。

2. 模型的玻色化和重整化群分析

为了突出受控跃迁对一维扩展 Hubbard 模型基态特性的影响，我们把哈密顿量(1)写成另一种等价形式：

$$H=H_{tUV}+H_{t\xi}+H_{t\xi^2}, \tag{4}$$

$$H_{tUV}=-t\sum_{j,\alpha}\left(c_{j,\alpha}^{\dagger}c_{j+1,\alpha}+h.c.\right)+U\sum_j n_{j,\uparrow}n_{j,\downarrow}+V\sum_j n_j n_j, \tag{5}$$

$$H_{t\xi}=t\xi\sum_{j,\alpha}\left[c_{j,\alpha}^{\dagger}c_{j,\alpha}\left(n_{j,\bar{\alpha}}+n_{j+1,\bar{\alpha}}\right)+h.c.\right], \tag{6}$$

$$H_{t\xi^2}=-t\xi^2\sum_{j,\alpha}\left(c_{j,\alpha}^{\dagger}c_{j+1,\alpha}n_{j,\bar{\alpha}}n_{j+1,\bar{\alpha}}+h.c.\right). \tag{7}$$

H_{tUV} 描述熟悉的 t-U-V 模型，$H_{t\xi}$ 和 $H_{t\xi^2}$ 分别表示诱导产生的二体作用和三体作用。$H_{t\xi^2}$ 前面的负号表示吸引作用，以补偿 $H_{t\xi}$ 项的额外排斥。这二个附加作用分别与 ξ 和 ξ^2 成正比，当 $\xi\ll 1$ 时，这些相互作用可以当作微扰处理。

在一维情况下，玻色化方法是分析相互作用电子体系的一个非常有力的工具。一维低能谱可以在左(L)右(R)二个费米点($\pm k_F$)展开，算符 $c_{j,\alpha}$ 可以写成 $c_{j,\alpha}\to\sqrt{a}\sum_{r=L,R}\psi_{r,\alpha}(x)$ 的形式，其中 $\psi_{r,\alpha}(x)$ 湮灭位于格点 j、自旋 α 的 r 支的费米子。这些守征费米场能够通过玻色算符 $\varphi_{L/R,\alpha}(x)$ 来表示，其标准公式如

下[22]

$$\psi_{L,\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\mathrm{e}^{-i\sqrt{4\pi}\varphi_{L,\alpha}(x)},\quad \psi_{R,\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\mathrm{e}^{i\sqrt{4\pi}\varphi_{R,\alpha}(x)}. \tag{8}$$

我们定义一对共轭标量场 $\phi_\alpha(x)$ 和 $\theta_\alpha(x)$，

$$\phi_\alpha(x)=\varphi_{L,\alpha}(x)+\varphi_{R,\alpha}(x),\quad \theta_\alpha(x)=\varphi_{L,\alpha}(x)-\varphi_{R,\alpha}(x). \tag{9}$$

再引入它们的线性组合

$$\phi_{c/s}(x)=\frac{\phi_\uparrow(x)\pm\phi_\downarrow(x)}{\sqrt{2}},\quad \theta_{c/s}(x)=\frac{\theta_\uparrow(x)\pm\theta_\downarrow(x)}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

这二个场算符分别描述场的电荷自由度和自旋自由度。经过这样处理，我们获得玻色型的哈密顿量，$H=H_c+H_s$，

$$H_c=\frac{v_F}{2\beta_c}\int \mathrm{d}x\left[(\partial_x\phi_c)^2+\beta_c^2(\partial_x\theta_c)^2\right]+\frac{g_{3\perp}}{2a\pi^2}\int \mathrm{d}x\cos\left(\sqrt{8\pi}\phi_c\right), \tag{11}$$

$$H_s=\frac{v_F}{2\beta_s}\int \mathrm{d}x\left[(\partial_x\phi_s)^2+\beta_s^2(\partial_x\theta_s)^2\right]+\frac{g_{1\perp}}{2a\pi^2}\int \mathrm{d}x\cos\left(\sqrt{8\pi}\phi_s\right). \tag{12}$$

这里(以及文中以下部分)我们省略了场的宗量 x。在电荷部分和自旋部分定义了Luttinger参数：$\beta_c\simeq 1+g_c/2$，$\beta_s\simeq 1+g_s/2$，以及重整化的速度：$v_c=v_F/\beta_c$，$v_s=v_F/\beta_s$，式中的 $v_F=2ta$ 是半满下无相互作用的费米速度。耦合常数对应

$$g_c=-U-6V+\frac{8\xi^2}{\pi}t \tag{13}$$

$$g_s=U-2V+\frac{8\xi^2}{\pi}t \tag{14}$$

$$g_{3\perp}=-U+2V+\frac{8\xi^2}{\pi}t \tag{15}$$

$$g_{1\perp}=U-2V+\frac{8\xi^2}{\pi}t \tag{16}$$

相等关系 $g_s=g_{1\perp}$ 来源于模型的自旋SU (2)对称性。

在获得表达式 H_c 和 H_s (11)和(12)的过程中，我们利用了处理弱耦合的常用方案[20] [23]-[28]，也不考虑标度维度 $d_{cs}\approx 4$ 的电荷－自旋耦合强无关算符的贡献。此时，电荷激发和自旋激发是独立的，模型可以运用标准的“g-术语”技术来表述。在弱耦合情况下，我们通过重整化群分析判断耦合常数的相关性，以及相联系的 umklapp 散射和向后散射的影响。体系的低能激发能够通过有效耦合常数 $\Gamma_i(l)$ 的重整化群方程进行分析[25] [27]，

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{3\perp}(l)}{\mathrm{d}l}=-2\Gamma_{3\perp}(l)\Gamma_c(l),\quad \frac{\mathrm{d}\Gamma_c(l)}{\mathrm{d}l}=-2\Gamma_{3\perp}^2(l), \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{1\perp}(l)}{\mathrm{d}l}=-2\Gamma_{1\perp}(l)\Gamma_s(l),\quad \frac{\mathrm{d}\Gamma_s(l)}{\mathrm{d}l}=-2\Gamma_{1\perp}^2(l). \tag{18}$$

我们已利用了截断标度变换 $a\to ae^{\mathrm{d}l}$，l 是标度长度，无量纲的跑动耦合常数 $\Gamma_i(0)=g_i/4\pi ta$。标度方程决定着如图 1 所示的重整化流向图。

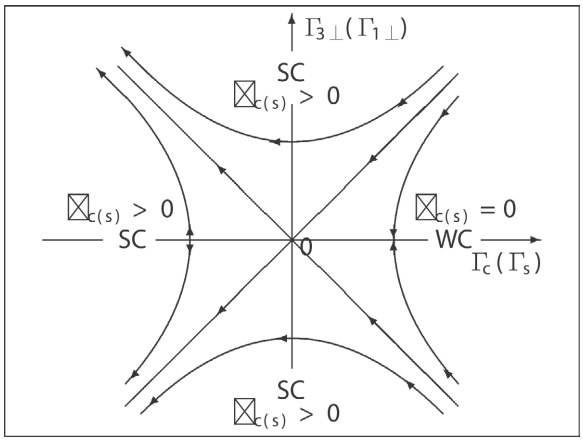

Figure 1. The renormalization-group flow diagram. The arrows represent the direction of flow with increasing length scale. The infrared behavior is determined by the direction of RG flow with increasing length scale
图 1. 重整化流向图。箭头表示流的流动方向，体系的红外特性由流的方向决定

根据建立的重整化流向图，我们可以直接分析倒逆散射和后向散射的影响。如果这二个散射是相关算符时，会分别导致电荷能隙相变和自旋能隙相变。我们首先考虑自旋部分。自旋SU (2)对称性保证了重整化流精确的沿着分界线 $\Gamma_s(l)=\Gamma_{1\perp}(l)$，因此自旋激发由裸耦合 g_s 符号决定。当 $g_s>0$，随着增加的标度 l，$\Gamma_{1\perp}(l)\to 0$。自旋激发无能隙($\Delta_s=0$)，ϕ_s 是个涨落场。当 $g_s<0$，$\Gamma_{1\perp}(l)$ 随着增加的标度增加。流向强耦合不动点 $\Gamma_{1\perp}^*(l\to\infty)=-\infty$。在这种情况下，自旋场的平均值为 $\langle\phi_s\rangle=0$，以降低体系势能。这意味着自旋能隙相变发生在

$$U-2V=-\frac{8\xi^2}{\pi}t. \tag{19}$$

$U-2V\geq-\frac{8\lambda^2}{\pi}t$ 区域自旋激发无能隙，$U-2V<-\frac{8\lambda^2}{\pi}t$ 的区域自旋激发有能隙。

由于电荷部分具有较低的U(1)对称性，电荷激发和自旋激发不同，重整化流偏离分界线 $\Gamma_c(l)=\Gamma_{3\perp}(l)$，有多种流向选择。根据方程(13)和(15)，在整个参数空间($U,V>0$)，$\Gamma_c(l)<\Gamma_{3\perp}(l)$ 总是满足。这说明体系的低能电荷总是有能隙($\Delta_c>0$)，耦合 $\Gamma_{3\perp}(l)$ 是相关算符，趋向强耦合不动点。但依赖裸耦合 $g_{3\perp}$ 是正还是负，$\Gamma_{3\perp}^*(l)=\infty$ 或 $\Gamma_{3\perp}^*(l)=-\infty$。电荷场锁在 $\langle\phi_c\rangle=\sqrt{\pi/8}$ 或0。因此，高斯相变发生在

$$U-2V=\frac{8\xi^2}{\pi}t. \tag{20}$$

3. 基态相图

为了描述基态相图的特性，我们运用一套序参量[25] [29]：$\mathcal{O}_{CDW}=\sin\sqrt{2\pi}\phi_c\cos\sqrt{2\pi}\phi_s$，$\mathcal{O}_{SDW}=\cos\sqrt{2\pi}\phi_c\sin\sqrt{2\pi}\phi_s$，$\mathcal{O}_{BCDW}=\cos\sqrt{2\pi}\phi_c\cos\sqrt{2\pi}\phi_s$，$\mathcal{O}_{BSDW}=\sin\sqrt{2\pi}\phi_c\sin\sqrt{2\pi}\phi_s$，这四个参量描写着电荷能隙相。电荷无能隙相对应二个超导序参量，$\mathcal{O}_{SS}=\exp\left(i\sqrt{2\pi}\theta_c\right)\cos\left(\sqrt{2\pi}\phi_s\right)$和 $\mathcal{O}_{TS}=\exp\left(i\sqrt{2\pi}\theta_c\right)\exp\left(i\sqrt{2\pi}\theta_s\right)$。量子相态由最大序参量来决定。

我们首先考虑受控跃迁对 Hubbard 模型基态的影响。这对应 $V=0$ 的情况，模型具有较高的 SU (2)⊗SU (2)对称性。描述电荷和自旋的耦合常数简化为

$$g_c=g_{3\perp}=\frac{8\lambda^2}{\pi}t-U, \tag{21}$$

$$g_s = g_{1\perp} = \frac{8\lambda^2}{\pi} t + U. \tag{22}$$

这种行为严格限制标度流向精确沿着分界线(如图 1 所示)。二个渠道分别由单个参数 g_s 和 g_c 刻画。依据重整化群分析，自旋能隙总是关闭的($\Delta_s = 0$)。就像 Hubbard 模型一样，体系没有自旋－能隙相变的发生。但是，电荷－能隙相变存在，且发生在 $g_c = 0$，即

$$\xi_c = \sqrt{\frac{\pi U}{8t}} \tag{23}$$

当 $\xi < \xi_c$ 时，电荷部分有激发能隙($\Delta_c > 0$)；当 $\xi \geq \xi_c$ 时，电荷部分没有激发能隙($\Delta_c = 0$)。这种特性是 Hubbard 模型本身所不具备的。基态相图由相变线 $\xi_c = \sqrt{\pi U/8t}$ 分为二个相区：三重超导(TS)序描述的 Luttinger 金属和自旋密度波(SDW)描述的 Mott 绝缘体(如图 2 所示)。

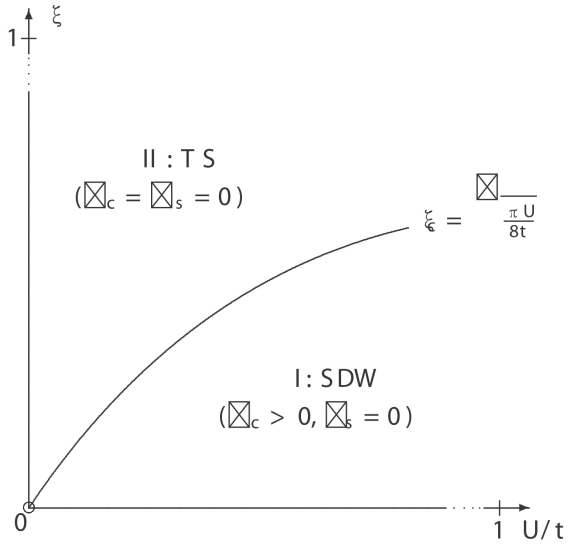

Figure 2. Phase diagram corresponding to the model (1) for the $V = 0$ case. The curve marks the SDW-TS transition
图 2. 模型(1)在 $V = 0$ 极限下的基态相图，曲线表示 TS-SDW 相变线

相区 **I**：$\xi < \sqrt{\pi U/8t}$。自旋模式是无能隙的，不动点 $\beta_s^*(l) = 1$，即 $\Gamma_{1\perp}^*(l) = 0$。电荷模式是有能隙的，$\Gamma_{3\perp}^*(l) = -\infty$，电荷场平均值 $\langle \phi_c \rangle = 0$。序参量 $\mathcal{O}_{SDW}$ 取得最大值，键序电荷密度波被 SDW 序所抑制，体系是 SDW 序主导的 Mott 绝缘体，表现为自旋密度波行为。

相区 **II**：$\xi > \sqrt{\pi U/8t}$。电荷模式和自旋模式都是无能隙的，对应 Luttinger 参数的不动点 $\beta_c^*(l) = \beta_s^*(l) = 1$。由于电荷场和自旋场是涨落场，所有的序参量都可以取非零值。为了确定最终的序和相，需要比较这些序的关联函数[10]：

$$C_{\mathrm{TS}}(x) = x^{-2}\ln x, \tag{24}$$

$$C_{\mathrm{SS}}(x) = x^{-2}\ln^{-1} x, \tag{25}$$

$$C_{\mathrm{SDW}}(x) = C_{\mathrm{BSDW}}(x) = x^{-2}, \tag{26}$$

$$C_{\mathrm{BOW}}(x) = x^{-2}\ln^{-2} x, \tag{27}$$

$$C_{\mathrm{CDW}}(x) = x^{-2}\ln^{-3} x. \tag{28}$$

很明显，根据关联函数的衰减行为，基态表现为三重超导序(TS)的 Luttinger 金属态。

我们再考虑一般情况。基态相图由自旋－能隙相变线 $U=2V-8\xi^2 t/\pi$ 和 Gaussian 相变线 $U=2V+8\xi^2 t/\pi$ 划分为三个不同的量子区域(如图 3 所示)。

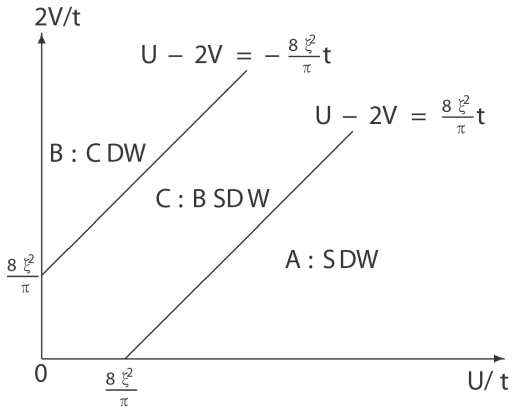

Figure 3. The ground state phase diagram of the model (1). The two solid lines denote the spin-gap transition ($U-2V=-8\xi^2 t/\pi$) and the Gaussian transition ($U-2V=8\xi^2 t/\pi$)

图 3. 模型(1)的基态相图。二个实线分别表示自旋－能隙相变线($U-2V=-8\xi^2 t/\pi$)和 Gaussian 相变线($U-2V=8\xi^2 t/\pi$)

区域 **A**，相互作用满足 $2V<U-8t\xi^2/\pi$，在位排斥作用(U)占主导地位。电荷激发有能隙($\Delta_c>0$)，umklapp 过程是相关的。自旋激发没有能隙($\Delta_s=0$)，向后散射过程是无关的。体系的性质与 $V=0$ 情况的相区 **I** 相似，基态处于自旋密度波(SDW)主导的 Mott 绝缘态。

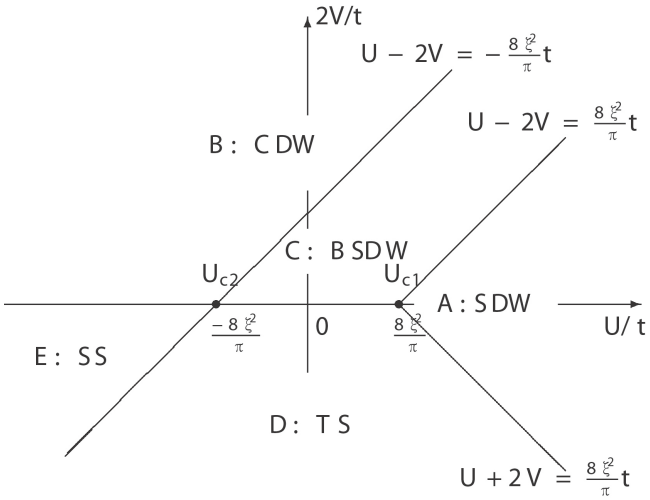

Figure 4. The general quantum phase diagram of the model (1) including effective parameters. U_{c1} and U_{c2} represent the critical points for $V=0$, respectively corresponding to the insulator-superconductor transition and the SS-TS transition

图 4. 当相互作用作为有效参数时，模型(1)的一般量子相图。U_{c1} 和 U_{c2} 表示 $V=0$ 情况下的临界点值，分别对应绝缘体－超导体相变和单重超导－三重超导相变

区域 **B**，相互作用满足 $2V>U+8\xi^2 t/\pi$，近邻排斥作用(V)占主导地位。低能电荷激发和自旋激发都是有能隙的，umklapp 和向后散射过程也都是相关的。不动点 $\Gamma_{3\perp}^{*}(l)=+\infty$，$\Gamma_{1\perp}^{*}(l)=-\infty$。相场期望值锁

在$\langle\phi_c\rangle=\sqrt{\pi/8}$及$\langle\phi_s\rangle=0$。通过简单的计算，序参数$\mathcal{O}_{\mathrm{CDW}}$取得最大值，基态是电荷密度波(CDW)序的绝缘态。

区域 **C**，相互作用满足$|U-2V|<8\xi^2 t/\pi$。低能激发与区域 **A** 的行为相似，即电荷能隙存在而自旋能隙消失，umklapp 相关，但向后散射无关。不动点$\Gamma_{1\perp}^{*}(l)=0$，自由的自旋场ϕ_s倾向于$\langle\phi_s\rangle=\sqrt{\pi/8}$。不动点$\Gamma_{3\perp}^{*}(l)=+\infty$，电荷场锁在$\langle\phi_c\rangle=\sqrt{\pi/8}$，序参量$\mathcal{O}_{\mathrm{BSDW}}$取得最大值，基态是键序自旋密度波(BSDW)主导的绝缘体。

通常情况下，相互作用 U 和 V 是排斥的。但是为了进一步理论研究，我们可以把U,V当作唯像参量$U,V<0$。这次我们得到更加丰富的基态相图(如图 4 所示)。我们发现，超导相态能够在$V<0$和$U<U_{c1}=8\xi^2 t/\pi$的区域产生。而且在$U<U_{c2}=-8\xi^2 t/\pi<0$，基态是半能隙的单重超导(SS)；在$U_{c2}<U<U_{c1}$区域，基态是完全无能隙的三重超导(TS)。

4. 讨论与总结

在本篇论文中，我们利用玻色化方法和重整化群方案，解析研究了半满下的一维相互作用的电子体系的量子特性。我们通过调控电子的跃迁运动，对标准扩展 Hubbard 模型进行了推广研究，这与通过改变相互作用的推广方式不同。研究表明，电子常规跃迁方式的变化导致 *t*-*U*-*V* 模型相图的改变。我们集中于弱耦合区域，并假定调制参量$\xi\ll 1$，从而合理忽略强无关电荷–自旋耦合的贡献，电荷和自旋自由度分离，模型的低能激发由 sine-Gordon 模型描述。通过重整化群分析，我们展示了 Gaussian 相变和自旋–能隙相变的存在。这二个相变线把基态相图分成三个不同的绝缘态相区，分别对应自旋密度波(SDW)、键序自旋密度波(BSDW)和电荷密度波(CDW)。在$V=0$的极限情况下，体系存在金属–绝缘体相变(对应 TS-SDW 相变)，基态处于无自旋能隙的量子态，对应自旋密度波(SDW)序的 Mott 绝缘体(在$\xi<\xi_c$区域)或三重超导(TS)序 Luttinger 金属(在$\xi>\xi_c$区域)。

从物理角度上来说，随着电子跃迁方式的改变，体系中空穴、电子单占据和双占据的布局也相应发生变化，并倾向于减弱双占据态。耦合常数(13)~(16)显示的耦合常数中没有与ξ成比例的项，这是由于$H_{\xi t}$依赖于电子浓度的缘故，在半满下这项恰好消失。与此不同的是，诱导产生的三体项$H_{\xi^2 t}$在半满下就非常重要，本质上它等于吸引作用。在某种程度上，依赖于双占据态的项不易形成。在没有V作用时，$H_{\xi^2 t}$诱导近邻自旋相同的二个电子相互吸引形成库珀对。因此，三相超导的形成就不足为奇了(见图 2)。当 U 和 V 都存在时，这两个排斥作用受到吸引项$H_{\xi^2 t}$的调制，并进一步调制 Gaussian 相变和自旋–能隙相变。同时附加三体吸引又有利于近邻电子键的形成和键上电荷的极化。这样的调制会导致在电荷密度波(CDW)和自旋密度波(SDW)之间的键序自旋密度波(BSDW)的产生。我们获得的相图与文献[12] ($X>0$)和[20] ($W>0$)中相图相似，但物理机制不同。

如果我们作如下代换：$\xi t\to t_2$，$-\xi^2 t\to t_3$，模型哈密顿量与 Aligia 和 Arrachea 研究的模型哈密顿量(2)等价[26]。相图 4 与文献[26]中的图 1(a)完全相似，包含 CDW，SDW，SBOW (即 BSDW)，SS 和 TS。当$V>0$，体系在半满浓度下是个绝缘体：$V\le 0$是 TS 形成的必要条件，这与文献[25]和[26]的结论完全一致。在$V=0$的情况下，发生在$\xi_c=\sqrt{\pi U/8t}$下的 SDW-TS 相变与文献[30]的数值结果和文献[25]的解析结果完全一致。人们已经证实，在一个有限大小的局域库仑排斥U_c下三体吸引可以导致超导相态[31]-[33]。另一方面，诱导二体作用在偏离半满时[34]或者二阶项角修正下[35]会起着重要的作用。

致　谢

本项工作受到新疆维吾尔自治区自然科学基金资助(2024D01C49)。

参考文献

[1] Kiess, H.G. (1992) Conjugated Conducting Polyers. Springer-Verlag.

[2] Kim, Y., Hill, J.P., Benthien, H., Essler, F.H.L., Jeckelmann, E., Choi, H.S., *et al*. (2004) Resonant Inelastic X-Ray Scattering of the Holon-Antiholon Continuum Insrcuo2. *Physical Review Letters*, **92**, Article ID: 137402. https://doi.org/10.1103/physrevlett.92.137402

[3] Benthien, H., Gebhard, F. and Jeckelmann, E. (2004) Spectral Function of the One-Dimensional Hubbard Model Away from Half Filling. *Physical Review Letters*, **92**, Article ID: 256401. https://doi.org/10.1103/physrevlett.92.256401

[4] Emery, V.J. (1979) Theory of the One-Dimensional Electron Gas. In: de Vreese, J.T., Ed., *Highly Conducting One-Dimensional Solids*, Plenum, 247-304. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2895-7_6

[5] Sólyom, J. (1979) The Fermi Gas Model of One-Dimensional Conductors. *Advances in Physics*, **28**, 201-303. https://doi.org/10.1080/00018737900101375

[6] Hirsch, J.E. (1984) Charge-Density-Wave to Spin-Density-Wave Transition in the Extended Hubbard Model. *Physical Review Letters*, **53**, 2327-2330. https://doi.org/10.1103/physrevlett.53.2327

[7] Cannon, J.W. and Fradkin, E. (1990) Phase Diagram of the Extended Hubbard Model in One Spatial Dimension. *Physical Review B*, **41**, 9435-9443. https://doi.org/10.1103/physrevb.41.9435

[8] Cannon, J.W., Scalettar, R.T. and Fradkin, E. (1991) Ground-State Phase Diagram of the One-Dimensional Extended Hubbard Model. *Physical Review B*, **44**, 5995-6001. https://doi.org/10.1103/physrevb.44.5995

[9] Zhang, G.P. (1997) Ground-state Phase Diagram of the One-Dimensional Extended Hubbard Model: A Density-Matrix Renormalization-Group Approach. *Physical Review B*, **56**, 9189-9192. https://doi.org/10.1103/physrevb.56.9189

[10] Voit, J. (1992) Phase Diagram and Correlation Functions of the Half-Filled Extended Hubbard Model in One Dimension. *Physical Review B*, **45**, 4027-4042. https://doi.org/10.1103/physrevb.45.4027

[11] Van Dongen, P.G.J. (1994) Extended Hubbard Model at Strong Coupling. *Physical Review B*, **49**, 7904-7915. https://doi.org/10.1103/physrevb.49.7904

[12] Nakamura, M. (2000) Tricritical Behavior in the Extended Hubbard Chains. *Physical Review B*, **61**, 16377-16392. https://doi.org/10.1103/physrevb.61.16377

[13] Tsuchiizu, M. and Furusaki, A. (2002) Phase Diagram of the One-Dimensional Extended Hubbard Model at Half Filling. *Physical Review Letters*, **88**, Article ID: 056402. https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.056402

[14] Sengupta, P., Sandvik, A.W. and Campbell, D.K. (2002) Bond-Order-Wave Phase and Quantum Phase Transitions in the One-Dimensional Extended Hubbard Model. *Physical Review B*, **65**, Article ID: 155113. https://doi.org/10.1103/physrevb.65.155113

[15] Sandvik, A.W., Sengupta, P. and Campbell, D.K. (2003) Comment on "Ground-State Phase Diagram of a Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model". *Physical Review Letters*, **91**, Article ID: 089701. https://doi.org/10.1103/physrevlett.91.089701

[16] Sandvik, A.W., Balents, L. and Campbell, D.K. (2004) Ground State Phases of the Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model. *Physical Review Letters*, **92**, Article ID: 236401. https://doi.org/10.1103/physrevlett.92.236401

[17] Jeckelmann, E. (2002) Ground-State Phase Diagram of a Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model. *Physical Review Letters*, **89**, Article ID: 236401. https://doi.org/10.1103/physrevlett.89.236401

[18] Zhang, G.P. (2003) Accurate Ground-State Phase Diagram of the One-Dimensional Extended Hubbard Model at Half Filling. *Physical Review B*, **68**, Article ID: 153101. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.153101

[19] Zhang, Y.Z. (2004) Dimerization in a Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model. *Physical Review Letters*, **92**, Article ID: 246404. https://doi.org/10.1103/physrevlett.92.246404

[20] Japaridze, G.I. and Sarkar, S. (2002) Phase Diagram of the Extended Hubbard Model with Pair Hopping Interaction. *The European Physical Journal B*, **28**, 139-144. https://doi.org/10.1140/epjb/e2002-00212-0

[21] Huang, X.X., Quan, P.E., Xu, Z.X., Dai, J.H. and Ying, H.P. (2006) Evolution of Bond-Order-Wave Phase in One-Dimensional Mott Insulators. *Communications in Theoretical Physics*, **46**, 923-928. https://doi.org/10.1088/0253-6102/46/5/032

[22] Gogolin, A.O., Nersesyan, A.A. and Tsvelik, A.M. (1998) Bosonization and Strongly Correlated Systems. Cambridge University Press.

[23] Japaridze, G.I. (1995) Bond-Located Antiferromagnetism in a One-Dimensional Electron System. *Physics Letters A*, **201**, 239-246. https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00216-p

[24] Ding, H. and Wang, Y. (2011) Bond-Located Phases Driven by Exchange Interaction in the One-Dimensional T-U-V-J Model. *Physics Letters A*, **375**, 1751-1755. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.02.025

[25] Japaridze, G.I. and Kampf, A.P. (1999) Weak-Coupling Phase Diagram of the Extended Hubbard Model with Correlated-Hopping Interaction. *Physical Review B*, **59**, 12822-12829. https://doi.org/10.1103/physrevb.59.12822

[26] Aligia, A.A. and Arrachea, L. (1999) Triplet Superconductivity in Quasi-One-Dimensional Systems. *Physical Review B*, **60**, 15332-15338. https://doi.org/10.1103/physrevb.60.15332

[27] Japaridze, G.I. and Müller-Hartmann, E. (2000) Triplet Superconductivity in a One-Dimensional Ferromagnetic t-J Model. *Physical Review B*, **61**, 9019-9027. https://doi.org/10.1103/physrevb.61.9019

[28] Ding, H. and Zhang, J. (2014) Modulating Effect of Pair-Hopping and Spin Exchange Interactions on a Half-Filled Generalized U-V Chain. *Modern Physics Letters B*, **28**, Article ID: 1450042. https://doi.org/10.1142/s0217984914500420

[29] Nersesyan, A.A. (1991) Orbital Antiferromagnetic Ordering in a Two-Chain Model of Interacting Fermions. *Physics Letters A*, **153**, 49-54. https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90360-k

[30] Aligia, A.A., Gagliano, E., Arrachea, L. and Hallberg, K. (1998) Superconductivity with S and P Symmetries in an Extended Hubbard Model with Correlated Hopping. *The European Physical Journal B*, **5**, 371-378. https://doi.org/10.1007/s100510050456

[31] Aligia, A.A., Arrachea, L. and Gagliano, E.R. (1995) Phase Diagram of an Extended Hubbard Model with Correlated Hopping at Half Filling. *Physical Review B*, **51**, 13774-13777. https://doi.org/10.1103/physrevb.51.13774

[32] Gagliano, E.R., Aligia, A.A., Arrachea, L. and Avignon, M. (1995) Single-Particle Spectral Function of a Generalized Hubbard Model: Metal-Insulator Transition. *Physical Review B*, **51**, 14012-14019. https://doi.org/10.1103/physrevb.51.14012

[33] Arrachea, L., Aligia, A.A., Gagliano, E., Hallberg, K. and Balseiro, C. (1994) Superconducting Correlations in Hubbard Chains with Correlated Hopping. *Physical Review B*, **50**, 16044-16051. https://doi.org/10.1103/physrevb.50.16044

[34] Buzatu, F.D. (1995) One-Dimensional (t,U,X) Model: Ground-State Phase Diagram in a Mean-Field-Type Approximation. *Physical Review B*, **49**, Article 10176. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.10176

[35] Dobry, A.O. and Aligia, A.A. (2011) Quantum Phase Diagram of the Half-Filled Hubbard Model with Bond-Charge Interaction. *Nuclear Physics B*, **843**, 767-783. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2010.10.017